УДК 004.415.2, 004.588

УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ И МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ: БАЗИС КВАНТОВОГО ПОСТУЛАТА

Ульянов Сергей Викторович

Доктор физико-математических наук, профессор;
ГОУ ВПО «Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,
Институт системного анализа и управления;
PronetLabs;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: ulyanovsv@mail.ru.

Приведены необходимые сведения из теории дифференциальных уравнений в частных производных и теории характеристик гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных. Описана обобщенная волновая форма уравнения Гамильтона-Якоби, являющаяся основой для вывода уравнений квантовой релятивистской механики на основе квантового постулата.

Ключевые слова: уравнение Гамильтона-Якоби, характеристики, уравнения в частных производных.

HAMILTON-JACOBI EQUATION AND METHOD OF CHARACTERISTIC MANIFOLD: QUANTUM POSTULATE BASIC

Ulyanov Sergey

Doctor of Science in Physics and Mathematics, professor;
Dubna International University of Nature, Society and Man,
Institute of system analysis and management;
PronetLabs;
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;
e-mail: ulyanovsv@mail.ru.

Necessary knowledge from the theory of partial differential equation and characteristic manifold are introduced. Generalized wave form of Hamilton-Jacobi equation is described. This form is the background for deriving of quantum relativistic equations based on quantum postulate.

Keywords: Hamilton-Jacobi equation, characteristics, partial differential equations.

Введение

Описание моделей объектов управления (ОУ) на основе уравнения Гамильтона-Якоби в задачах интеллектуального робастного управления квантовыми, термодинамическими и релятивистскими динамическими системами показало эффективность применения метода волновой механики и возможность эффективного поиска решения на основе метода характеристик уравнений в частных производных [1, 2]. Однако опыт применения такого подхода к решению задач управления [3] показал трудности восприятия инженерной аудиторией математических аспектов при изучении и применения данного аппарата.

В данной статье освещены особенности применения уравнения Гамильтона-Якоби и метода характеристик, которые используются для вывода уравнений квантовой релятивистской механики.

Такой подход позволяет использовать методы классической теории управления в задачах управления квантовыми и релятивистскими ОУ с учетом квантовых и релятивистских эффектов.

О характеристиках гиперболических дифференциальных уравнений

Рассмотрим понятие характеристик гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных. Под характеристической поверхностью заданной системы дифференциальных уравнений

$$\varphi = \varphi\left(x_1, x_2, \dots, x_n, t\right) \tag{1}$$

понимают поверхность, на которой могут существовать *разрывы старших производных* решений рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. При этом под старшими производными понимаются производные, входящие в рассматриваемую систему уравнений и определяющие ее порядок. Характеристические поверхности являются уравнениями распространения фронта волны нестационарного решения рассматриваемой системы уравнений.

Приведем теперь уравнения характеристических поверхностей или характеристик для систем линейных уравнений в частных производных.

Рассмотрим систему уравнений первого порядка линейных относительно неизвестных функций u_j следующего вида:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \Phi_i\left(x_k, u_j\right) = 0, \quad \left(i = 1, \dots, m\right). \tag{2}$$

Здесь коэффициенты a_{ij}^{k} зависят только от n координат $x_1, x_2, \dots, x_n$.

В данном случае задача Коши формулируется следующим образом. В пространстве независимых переменных $\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)$ задается поверхность

$$\omega_1\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) = 0. \tag{3}$$

На этой поверхности задаются начальные значения искомых функций

$$u_j = u_j\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) = 0 \quad \left(j = 1, 2, \dots, m\right). \tag{4}$$

Требуется найти значения u_j в некоторой области, примыкающей к начальной поверхности.

Рассмотрим вначале в качестве исходной поверхности (3) плоскость $x_1 = 0$, т.е. положим

$$\omega_1 = x_1 = 0. \tag{5}$$

Запишем начальные данные на этой поверхности в следующем виде:

$$u_j\Big|_{x_1=0} = \varphi_j\left(x_2, \dots, x_n\right), \quad \left(j = 1, 2, \dots, m\right). \tag{6}$$

Очевидно, что приведенные начальные данные дают возможность вычислить на поверхности $x_1 = 0$ все производные первого порядка $\partial u_j / \partial x_k$ $\left(k = 1, 2, \dots, n,\ j = 2, 3, \dots, m\right)$, кроме производных по координате x_1, т.е. $\partial u_j / \partial x_1$.

Подставим в (2) начальные данные искомых функций на поверхности $x_1 = 0$ и их производных по координатам $\left(x_2, \dots, x_n\right)$. Дальше может оказаться, что полученная таким образом система уравнений (линейная относительно $\partial u_j / \partial x_1$) разрешима относительно $\partial u_j / \partial x_1$. В этом случае будем иметь на поверхности $x_1 = 0$ значения всех производных $\partial u_j / \partial x_k$. В противном случае плоскость $x_1 = 0$ называется *характеристической* или *характеристикой* рассматриваемой линейной системы уравнений.

Приведенное определение обобщается следующим образом.

Если поверхность (3) с заданными на ней начальными данными и исходными уравнениями (2) не дает возможности однозначно определить все производные первого порядка от искомых функций на этой поверхности, то такая поверхность называется *характеристической* или *характеристикой* (*характеристическим многообразием*) рассматриваемой системы линейных дифференциальных уравнений.

Введем новую систему координат:

$$x_k' = \omega_k\left(x_1,\ldots,x_n\right), \quad \left(k = 1,2,\ldots,n\right). \tag{7}$$

Здесь предполагается, что последовательность $\left(n-1\right)$ функций $\omega_2,\ldots,\omega_n$ выбрана таким образом, что приведенная система (7) однозначно разрешима относительно x_k. Очевидно следующее соотношение:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_s'} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_k}. \tag{8}$$

Подставим (8) в (3), при этом ограничимся только членами уравнения, содержащими $\partial u_j / \partial x_1$, так как остальные производные известны из (8). В результате получим:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_1'} + \cdots = 0 \quad \left(i = 1,\ldots,m\right). \tag{9}$$

Производные $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_1'}$ не могут быть однозначно определены на поверхности:

$$x_1' = \omega_1\left(x_1,\ldots,x_n\right) = 0, \tag{10}$$

если определитель системы (9) тождественно равен нулю (здесь величины $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_1'}$ рассматриваются как неизвестные).

Введем обозначение:

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k'}. \tag{11}$$

В результате получим следующее нелинейное уравнение первого порядка для характеристической поверхности $\omega_1 = 0$:

$$\left|\omega_{ij}\right| = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1m} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \cdots & \omega_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{m1} & \omega_{m2} & \cdots & \omega_{mm} \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Очевидно, что уравнение (12) первого порядка будет *m*-й степени относительно производных $\dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_k}$. Обратим внимание, что, выписывая уравнение характеристик, будем писать вместо $\omega_1\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ функцию $\varphi\left(x_1,\ldots,x_n\right)$.

Рассмотрим частные случаи системы (2).

Пример 1. Линейное транспортное уравнение (переноса) и характеристики. Линейное транспортное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c = const \tag{13}$$

и носит свое название от физической интерпретации явления переноса потока частиц в однородной среде. Относительно наклона характеристики каждое частное решение является постоянным, т.е.

$$\frac{dx}{dt}=c,\quad x-ct=const. \tag{14}$$

Как следствие, решения определяются в виде волн перемещения в виде:

$$u(t,x)=p(x-ct), \tag{15}$$

где $p(\xi)$ является определенной функцией характеристической переменной $\xi=x-ct$. Для стационарного наблюдателя, решение (15) определяется как волна с неизменяемой формы и движущейся с постоянной скоростью *c*. При $c>0$ волна движется слева направо с неизменяемой формой волны с постоянной скоростью *c,* что показано на рис. 1.

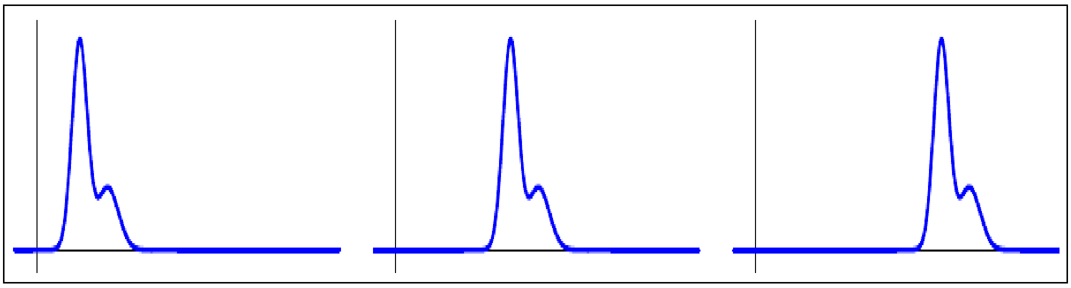


Рис. 1. Движение фронта волны (15)

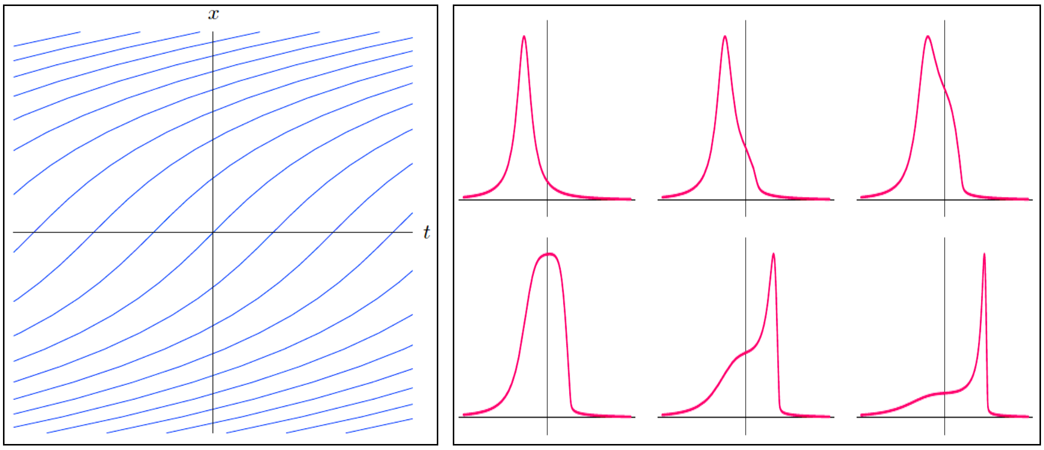
При $c<0$ фронт волны движется справа налево и при $c=0$ имеем стоячую волну в заданной точке пространства.

Пример 2. Рассмотрим решение частного случая разновидности (13) в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{x^2+1}\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{16}$$

методом характеристик. В этом случае имеем $\frac{dx}{dt}=c(x)=\frac{1}{x^2+1}$, т.е. в отличии от случая постоянной скорости, характеристики не обязательно прямые линии. Интегрируя данное соотношение, получим $\int(x^2+1)dx=\frac{1}{3}x^3+x=t+k$, где *к* – постоянная интегрирования.

Пример характеристических кривых приведен на рис. 2,а.



(а) *(б)*

Рис. 2. Вид характеристических кривых (а) и (б) решение уравнения (16)

Характеристическая переменная имеет вид $\xi = \frac{1}{3}x^3 + x - t$ и общее решение уравнения (16) принимает следующий вид: $u = p\left(\frac{1}{3}x^3 + x - t\right)$, где $p(\xi)$ - подходящая функция. Типовое решение для начальных условий $u(t,0) = \frac{1}{1+(x+2.75)^2}$ и для моментов времени $t = 0; 0.25; 10; 25; 50$ приведено на рис. 2,б. Согласно рис. 2,а характеристические кривые не являются больше прямыми линиями, что отражается на динамическом поведении профиля фронта волны и его скорости движения в неоднородной среде при переходе с одной характеристической кривой на другую.

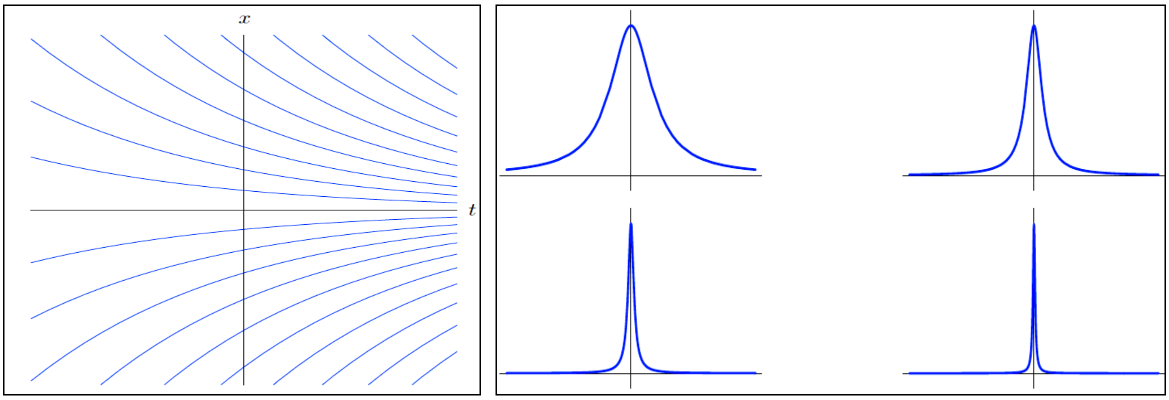
Пример 3. Рассмотрим теперь уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - x\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{17}$$

В этом случае, характеристические кривые определяются как решения уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -x, \qquad \text{и} \qquad xe^t = k\,, \tag{18}$$

где *к* – постоянная интегрирования (см рис. 3,а).



(а) (б)

Рис. 3. Вид характеристических кривых (а) и (б) решение уравнения (17)

Тогда переменная $\xi = xe^t$ может рассматриваться как характеристическая переменная, а ее множество уровней является характеристическими кривыми. Общее решение можно представить в виде:

$$u = p\left(xe^t\right), \tag{19}$$

где $p(\xi)$ определяется как функция переменной $\xi = xe^t$.

Задавая начальные условия в виде $u(0,x) = f(x)$. Решение имеет вид $u = f\left(xe^t\right)$. Например, решение $u(t,x) = \frac{1}{\left(xe^t\right)^2+1} = \frac{e^{-2t}}{x^2+e^{-2t}}$ соответствует начальным условиям $u(t,0) = f(x) = \left(x^2+1\right)^{-1}$ и приведено на рис. 3,б для моментов времени $t = 0,1,2,3$ соответственно. Характеристические кривые в этом случае сходятся к оси t и решение концентрируется вокруг исходного для $u(t,0) \equiv 1$, но при этом предел не является δ -функцией, так как его значение ограничено при $x = 0$.

Пример 4. Рассмотрим систему двух линейных уравнений для двух неизвестных функций u_j, зависящих от двух переменных x_1, x_2, следующего вида:

$$\begin{aligned}&\left(a_{11}^1\frac{\partial}{\partial x_1}+a_{11}^2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)u_1+\left(a_{12}^1\frac{\partial}{\partial x_1}+a_{12}^2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)u_2+\dots=0,\\&\left(a_{21}^1\frac{\partial}{\partial x_1}+a_{21}^2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)u_1+\left(a_{22}^1\frac{\partial}{\partial x_1}+a_{22}^2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)u_2+\dots=0.\end{aligned} \tag{20}$$

Воспользовавшись (11) и (12), получим следующее дифференциальное уравнение для характеристик:

$$\begin{vmatrix}\left(a_{11}^1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+a_{11}^2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right) & \left(a_{12}^1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+a_{12}^2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)\\ \left(a_{21}^1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+a_{21}^2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right) & \left(a_{22}^1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+a_{22}^2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)\end{vmatrix}=0. \tag{21}$$

В заключение отметим, что любое решение системы (2) можно представить в виде $\omega_1=\varphi\left(x_1,\dots,x_n\right)=c^1$, $c^1=const$, т.е. имеем не одну характеристику (когда $c^1 = 0$), а семейство характеристик, соответствующих различным значениям постоянной c^1.

Перейдем теперь к рассмотрению случая линейных относительно старших производных уравнений второго порядка:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{n}a_{ij}^{kl}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k\partial x_l}+\dots=0\,. \tag{22}$$

Предполагается, что $a_{ij}^{kl}=a_{ij}^{lk}$.

Зададим начальные данные Коши на гиперплоскости $x_1=0$ в виде:

$$u_j\Big|_{x_1=0}=\varphi_j\left(x_2,\dots,x_n\right);\quad \frac{\partial u_j}{\partial x_1}\Bigg|_{x_1=0}=\psi_j\left(x_2,\dots,x_n\right)\quad \left(j=1,2,\dots,m\right). \tag{23}$$

На этой гиперплоскости известны все производные первого порядка и все производные второго порядка, кроме $\partial^2 u_j/\partial x_1^2$. Если эти производные не могут быть найдены из исходных уравнений, то плоскость $x_1=0$ будет характеристической.

Повторяя почти дословно рассуждения к уравнениям первого порядка, можно записать уравнение для характеристического многообразия в следующем виде:

$$\left|\omega_{ij}'\right|=\begin{vmatrix}\omega_{11}' & \omega_{12}' & \cdots & \omega_{1m}'\\ \omega_{21}' & \omega_{22}' & \cdots & \omega_{2m}'\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \omega_{m1}' & \omega_{m2}' & \cdots & \omega_{mm}'\end{vmatrix}=0\ , \tag{24}$$

где $\omega_{ij}'=\sum_{k,l=1}^{n}a_{ij}^{kl}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_k}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_l}$.

Пример 5. Рассмотрим волновое уравнение следующего вида:

$$\sum_j\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j^2}-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0\,. \tag{25}$$

В этом одномерном случае характеристическое многообразие уравнения (25) имеет вид:

$$\chi(x,t)=0 \tag{26}$$

и часто носит название характеристической функции. Это однозначная относительно своих аргументов функция, удовлетворяющая уравнению характеристик:

$$\sum_j\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_j}\right)^2-\frac{1}{\upsilon^2}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)^2=0. \tag{27}$$

Характеристическая поверхность обозначается как Σ и определяется на пространстве R^{3N} координат, соответствующая фиксированному значению времени в (26). В пространстве R^{3N+1} координат и времени, поверхность, заданная уравнением (26), является конусом, называемый обычно характеристическим конусом.

Рассмотрим теперь общую систему линейных уравнений вида:

$$\sum_{r,k_0,k_1,\ldots,k_n} A_i^{(k_0,k_1,\ldots,k_n)}\frac{\partial^{n_r}u_r}{\partial x_0^{k_0}\cdots\partial x_n^{k_n}}+\cdots f_i(x_0,\ldots,x_n)=0,\quad (i,r=1,2,\ldots,N). \tag{28}$$

Поверхность

$$\varphi(x_0,x_1,\ldots,x_n)=0 \tag{29}$$

будет характеристической поверхностью или характеристическим уравнением (28), если в каждой точке этой поверхности

$$\left\|\sum_{k_0+k_1+\ldots+k_n=n_r} A_i^{(k_0,k_1,\ldots,k_n)}(x_0,\ldots,x_n)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)^{k_0}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)^{k_n}\right\|=0. \tag{30}$$

Отметим, что если характеристики системы дифференциальных уравнений системы дифференциальных уравнений действительны, то такая система уравнений называется *гиперболической*. Поэтому уравнения современной физики, в которой описываются распространяющиеся в пространстве и времени процессы, носят гиперболический характер, если скорость распространения этих процессов не является бесконечной. Понятие характеристических поверхностей для систем (28) тесно связано с проблемой единственности решения задачи Коши. Пусть задана поверхность в виде:

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n,x_0=t)=0, \tag{31}$$

скорость перемещения поверхности (31) может быть определена из уравнения[1]:

$$\upsilon=-\frac{\partial\varphi/\partial t}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\partial\varphi/\partial x_i)^2}}. \tag{32}$$

Выражение (32) справедливо для скорости распространения фронта любой поверхности.

Пример 6. Рассмотрим характеристическую поверхность

$$\varphi=\varphi(x_1,x_2,x_3,x_0)=c_1, \tag{33}$$

заданную в 4-мерном пространственно-временном континууме. Поскольку характеристическая поверхность является поверхностью разрыва старших производных рассматриваемого дифференциального уравнения и, следовательно, поверхности фронта волны, очень большое значение приобретает вопрос о скорости распространения этой поверхности в пространственно-временном континууме. Пусть в (33) $c_1=0$, т.е. имеем $\varphi(x_1,x_2,x_3,t)=0$. Из (32) следует, что скорость распространения фронта волны будет определяться в следующем виде:

[1] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. – М.: Гостехиздат, 1945. – Т. 2.

$$\upsilon = -\frac{\partial\varphi / \partial t}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2}}\,. \qquad (34)$$

Пример применения (34) рассмотрен ниже.

Уравнение Гамильтона Якоби

Прежде всего, отметим некоторые физические особенности описания моделей механики. Так в механике сплошных сред различают лагранжевый и эйлеровый подходы описания сред[2]. При лагранжевом подходе к описанию среды следят за движением каждой частицы среды. Причем координаты частицы в каждый момент времени зависят от ее начальных координат (т.е. момент $t = 0$) и данного момента времени. При эйлеровом описании движения среды наблюдают за тем, что происходит в данном элементе объема 3-мерного пространства. В этом случае наблюдают за различными частицами, попадающими в данный элемент объема в разные моменты времени. При лагранжевом описании скорость каждой частицы среды является функцией ее начальных координат и времени. При эйлеровом описании скорость движения каждой частицы среды является функцией времени и координат той точки среды, в которой она в данный момент находится. То же самое относится ко всем другим механическим функциям, описывающим движение среды.

Обсудим теперь физическую модель, которую описывает уравнение Гамильтона Якоби. Рассмотрим поле невзаимодействующих частиц, движущихся в 3-мерном евклидовом пространстве. Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ скорости двух бесконечно близких частиц отличаются друг от друга бесконечно мало как по величине, так и по направлению. Если описанное состояние имеет место в начальный момент времени, то, исходя из уравнений как классической, так и релятивистской механики, оно сохранится.

Другими словами, первоначально непрерывное распределение координат и скоростей движущихся частиц останется непрерывным в течение всего времени их движения в потоке. Это обстоятельство дает возможность рассматривать поток движущихся невзаимодействующих частиц (поток экземпляров) как течение некоторой экземплярной жидкости (гидродинамическая модель).

Предположим, что внешнее силовое поле, действующее на каждую частицу, имеет потенциал S, так что существует соотношение:

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial x_j} \quad \left(j = 1,2,3\right); \quad p_0 = \frac{\partial S}{\partial x_0} = \frac{i\mathcal{E}}{c}. \qquad (34)$$

Рассмотрим несколько подходов к выводу уравнения Гамильтона-Якоби типа

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, q_i, t\right) = 0, \qquad (35)$$

где $H\left(p_i, q_i, t\right)$ – Гамильтониан динамической системы.

В методе Гамильтона-Якоби пользуемся эйлеровым описанием потока экземпляров невзаимодействующих частиц. Поэтому импульс частицы в этом методе оказывается функцией координат точки пространства, в которой в данный момент частица находится. Следовательно, в фиксированной точке пространства импульс $p_j = \partial S / \partial x_j$ относится не к одной частице, а к различным частицам, которые в данный момент времени оказываются в фиксированной точке.

Пример 7. Известно, что действие S определяется через интеграл от Лагранжиана (интеграл действия) $L\left(q, \dot{q}, t\right)$ для исследуемой (для упрощения одномерной) динамической системы в следующем виде:

[2] Френкель Я.И. Курс теоретической механики на основе векторного и тензорного анализа. – М.-Л.: ГТТИ, 1940.

$$S = \int_{t_0}^{t} L(q, \dot{q}, t)\, dt . \tag{36}$$

Известно, что Лагранжиан определяется как $L = T - U = p\dot{q} - H$, $p = \partial L / \partial \dot{q}$, и для заданной траектории $q(t)$ получим:

$$S(q,t) = \int_{t_o}^{t} p(t) q(t) dt - \int_{t_o}^{t} H\left(p(t), q(t), t\right) dt = \int_{q_0}^{q} p dq - \int_{t_o}^{t} H dt , \tag{37}$$

где $q_0 = q(t_0)$ и $\dot{q}dt = dq$. Рассмотрим пару интегралов в (37). Из (37) следует, что действие определяется криволинейным интегралом в $(t-q)$-плоскости. В общем случае, криволинейный интеграл действия S вдоль некоторого пути кривой от (t_0, q_0) до (t, q) можно записать в виде:

$$S(q,t) = \int_{q_0}^{q} \frac{\partial S}{\partial q} dq + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial S}{\partial t} dt . \tag{38}$$

Сравнивая соответствующие члены в (37) и (38), получим $p = \dfrac{\partial S}{\partial q}$ и имеем:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(p, q, t) = -H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right), \tag{39}$$

где (39) совпадает с (35), т.е. является (нерелятивистским) уравнением Гамильтона-Якоби[3].

Рассмотрим теперь более общий случай вывода уравнения Гамильтона-Якоби на основе соотношений (34).

Пример 8. Рассмотрим 4-х вектор энергии-импульса с компонентами (p_1, p_2, p_3, p_0) и известное[4] из релятивистской механики соотношение

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_0^2 + m^2c^2 = 0 . \tag{40}$$

Подставим в (40) соотношения из (34) и получим:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_0}\right)^2 + m^2c^2 = 0 . \tag{41}$$

Выражение (41) является релятивистским уравнением Гамильтона-Якоби.

Рассмотрим теперь переход от релятивистского к классическому (нерелятивистскому) случаю.

Пример 9. В этом случае $p_i = (\partial S / \partial x_i) \ll 1$, а поэтому при $(\upsilon / c) \ll 1$ импульс $\partial S / \partial x_i$ может быть записан в виде $m\upsilon_i$; следовательно, в рассматриваемом приближении:

$$m^2c^2 \geq \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2\right]. \tag{42}$$

Итак, имеем

$$\sqrt{m^2c^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2} \cong mc + \frac{1}{2mc}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2\right]. \tag{43}$$

Учитывая выражение (43), можно перейти к приближенному уравнению Гамильтона-Якоби при $(\upsilon / c) \ll 1$ следующим образом:

---

[3] Small A., Lam K.S. Simple derivations of the Hamilton-Jacobi equation and the eikonal equation without the set of canonical transformations // Am. J. Phys. – 2011. – Vol.79. – № 6. – Pp. 678-681.

[4] Гольденблат И.И., Ульянов С.В. Введение в теорию относительности и ее применение в новых технологиях. – М. Физматгиз, 1979.

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2\right]+mc^2=0\,. \tag{44}$$

Что касается члена mc^2, то его можно не учитывать, так как добавление к уравнению Гамильтона-Якоби аддитивной постоянной не влияет на вытекающие из него уравнения движения. Если произвести замену $S=S^*-mc^2t$, то последнее уравнение точно преобразуется для S^* в классическое уравнение Гамильтона-Якоби. Заметим, что такое преобразование вполне законно, так как в классическом случае не только S^*, но и время t являются скалярами. В рассматриваемом случае, т.е. применительно к уравнению (41), преобразование $S=S^*-mc^2t$, конечно, было бы недопустимо.

Пример 10. Физическая интерпретация уравнения Гамильтона-Якоби. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(p,q,t\right)=0. \tag{45}$$

Здесь $H-$плотность энергии, отнесенная к единице объема, расположенного в окрестности данной точки пространства. В случае свободной частицы или движения частицы в консервативном поле энергия H каждой частицы должна сохраняться. Однако рассматривая плотность энергии H в окрестности данной точки, будем каждый раз иметь дело с новыми частицами, поступающими в данный элемент объема. Поэтому H может меняться со временем даже в консервативном случае.

Таким образом, член $\partial S/\partial t$ учитывает это изменение и, следовательно, уравнение Гамильтона-Якоби выражает закон сохранения энергии в потоке «экземплярной жидкости» в эйлеровом представлении. В релятивистской механике в случае свободных частиц или консервативного поля возможна аналогичная интерпретация.

Пример 11. «Парадоксы» релятивистского уравнения Гамильтона-Якоби. Рассмотрим некоторые особенности физически корректной интерпретации вычисления скорости распространения поверхности действия $S=S\left(x_1,x_2,x_3,t\right)=const$ в (33) где действие S удовлетворяет релятивистскому уравнению Гамильтона-Якоби (41) в виде:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2+m^2c^2=0. \tag{46}$$

В данном случае имеем характеристическую поверхность φ вида (33) $\varphi=\varphi\left(x_1,x_2,x_3,x_0\right)=c_1,\ x_0=ict$, заданную в 4-мерном пространственно-временном континууме. Поскольку характеристическая поверхность является поверхностью разрыва старших производных рассматриваемого фронта волны, очень большое значение приобретает вопрос о скорости распространения этой поверхности в пространственно-временном континууме. Из (34) следует, что если задана некоторая поверхность $\varphi\left(x_1,x_2,x_3,t\right)=0$, то скорость распространения фронта волны будет определяться в 4-мерном пространственно-временном континууме в виде:

$$\upsilon=-\frac{\partial\varphi/\partial t}{G},\qquad G=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2}\,.$$

Применяя данное выражение к (46), получим следующий результат:

$$\upsilon^2=\frac{\left(\partial S/\partial t\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{3}\left(\partial S/\partial x_i\right)^2}. \tag{47}$$

Из (46) и (47) следует:

$$\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2=\frac{\left(\partial S/\partial t\right)^2}{\left(\partial S/\partial t\right)^2-m^2c^4}\,, \tag{48}$$

причем, как следует из (46), всегда имеет место неравенство:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 > m^2c^4. \tag{49}$$

Таким образом, поверхность действия $S = const$ распространяется со сверхсветовой скоростью, несмотря то, что само действие S является решением релятивистки инвариантного уравнения (46).

Однако никакого противоречия с теорией относительности здесь нет. Поясним это утверждение примерами.

Пример 12. Физический смысл функции действия S. Как известно[5], существуют физические поля, не связанные с переносом ни энергии, ни импульса, а следовательно, и информации. В качестве примера такого поля можно указать на действие $S(x_1, x_2, x_3, x_0)$. Дело в том, что перемещение поверхности $S = const$ не связано с перемещением какой-либо частицы в континууме движущихся экземпляров, движение которого в целом описывает функция S. Более точно, производные функции по координатам $(\partial S / \partial x_1) = p_i$ дают значение компонент вектора энергии-импульса частицы, находящейся в данный момент времени t в данной точке пространства. В другой момент времени компоненты вектора $(\partial S / \partial x_1) = p_i$ в той же точке пространства относятся уже к другой частице.

Таким образом, уравнение Гамильтона-Якоби дает описание потока невзаимодействующих тождественных частиц в эйлеровом, а не в лагранжевом представлении (в смысле классической гидродинамики).

Примечание 1. Подчеркнем еще раз, что в ньютоновой (до релятивистской) механике для частицы, движущейся в консервативном поле, имеем $H = const$, но из уравнения Гамильтона-Якоби (45) следует $\frac{\partial S}{\partial t} = -H$. Однако никакого противоречия здесь нет. Первое уравнение $H = const$ относится к одной и той же частице, за движением которой производится наблюдение; второе уравнение Гамильтона-Якоби относится к точке пространства, через которую в различные моменты времени проходят различные частицы. В связи с этим отметим, что уравнение Гамильтона-Якоби описывает поток невзаимодействующих тождественных частиц, которые в момент времени $t = 0$ заполняют непрерывным образом 6-мерное пространство координат и импульсов и, следовательно, имеют различное начальное значение энергии.

Изложенное дает полное объяснение, почему поверхность действия $S = const$ распространяется в релятивистской механике со скоростью, превышающей скорость света.

Аналогичный эффект имеет место в кинематике теории относительности для волновых процессов определенного типа, для которых существуют сверхсветовые скорости. Проиллюстрируем данное утверждение примером, имеющим важное для интерпретации законов квантовой релятивистской теории информации и процессов извлечения скрытой квантовой информации в классических состояниях.

Пример 13. Рассмотрим две инерциальные системы отсчета s^A и s^B. Допустим, что система отсчета s^B движется относительно s^A с постоянной скоростью υ в положительном направлении оси x^A. Обе системы связаны преобразованием Лоренца:

$$x^B = \frac{x^A - \upsilon t^A}{\sqrt{1-\beta^2}};\ \ t^B = \frac{t^A - \frac{\upsilon}{c^2}x^A}{\sqrt{1-\beta^2}};\ \ x^A = \frac{x^B + \upsilon t^B}{\sqrt{1-\beta^2}};\ \ t^A = \frac{t^B + \frac{\upsilon}{c^2}x^B}{\sqrt{1-\beta^2}};\ \ \beta = \frac{\upsilon}{c}\ .$$

Допустим теперь, что в системе отсчета s^A (одновременно по часам системы s^A) в момент $t^A = 0$ срабатывают источники света, расположенные вдоль оси x^A на равных друг от друга расстоя-

[5] Гольденблат И.И., Ульянов С.В. Релятивистская кинематика: Методические рекомендации. – М.: МО СССР, 1977.

ниях. Этого можно достигнуть, если каждый источник света соединить с часами, снабженными устройством, замыкающим контакт в момент, когда стрелки часов показывают время $t^A = 0$.

Таким образом, каждый источник света срабатывает независимо друг от друга. С точки зрения системы отсчета s^B включение источников света уже не будет одновременным. Так, источник света, имеющий в системе отсчета s^A координату x^A, включится (по часам системы s^B) в момент t^B, определяемый в виде $t^B = \dfrac{\frac{\upsilon}{c^2}x^A}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Таким образом, с точки зрения системы отсчета s^B включения источников света (информации) представляются в виде некоторого волнового процесса, распространяющегося в отрицательном направлении x^B.

Определим скорость распространения этого волнового процесса. Разность времен включения источников света Δt^B (по часам системы s^B) будет равна $\Delta t^B = \dfrac{\frac{\upsilon}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta x^A$, где Δx^A – расстояние между двумя указанными источниками света в системе отсчета s^A. Но так как $\Delta x^B = \dfrac{\Delta x^A}{\sqrt{1-\beta^2}}$, то отсюда следует, что отношение $\left|\dfrac{\Delta x^B}{\Delta t^B}\right| = \dfrac{c^2}{\upsilon} > c$, поскольку $\upsilon < c$.

Итак, рассматриваемая волна распространяется (для наблюдателя в системе отсчета s^B) со сверхсветовой скоростью. Однако, никакого противоречия с теорией относительности здесь нет, так как от одного источника света к другому нет передачи энергии, импульса и информации.

Примечание 2. Согласно результатам и определениям в [3], будем в дальнейшем физические поля, рассматриваемые как объекты управления, называть *объектами первого рода*, если распространение фронта волны такого поля связано с переносом энергии-импульса, а, следовательно, и информации. Аналогично этому определению, если в физической теории встречаются поля, которые непосредственно не связаны с переносом энергии-импульса, а, следовательно, и с переносом информации, то такие поля будем называть *объектами второго рода*.

Характеристики уравнения Гамильтона Якобии их физический смысл

Допустим, что рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет первый порядок и ему можно придать вид:

$$p + H\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, t, p_1, p_2, \ldots, p_n\right) = 0, \tag{50}$$

т.е. уравнение разрешено относительно $p = \dfrac{\partial S}{\partial t}$. В этом можно доказать, что уравнения характеристик имеет вид[6]:

$$\begin{gathered} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right); \\ \frac{dS}{dt} = \sum p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \end{gathered} \tag{51}$$

Уравнения Гамильтона-Якоби (50), совместно с соответствующими функциями $H\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, t, p_1, p_2, \ldots, p_n\right)$ от $2n+1$ переменных, называются канонической системой диффе-

[6] Маслов В. Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1987. – С. 54.

ренциальных уравнений и являются уравнением *характеристик* для действия S. Решения системы Гамильтона (51) называются *бихарактеристиками*.

Уравнению (46) можно придать вид (35):

$$\frac{\partial S}{\partial t}=c\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2+m^2c^2}. \qquad (52)$$

Таким образом, функция Гамильтона H имеет в этом случае имеет вид:

$$H=c\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2+m^2c^2}. \qquad (53)$$

Воспользовавшись уравнением характеристик (51) для общей системы, получим[7] следующие уравнения:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\upsilon_i}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right)=0,\ \ (i=1,2,3). \qquad (54)$$

Рассмотрим частные примеры (54).

Пример 14. В качестве простейшего примера вывода (54) рассмотрим одномерное движение частицы. Уравнение Гамильтона-Якоби в этом случае имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+c\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+m^2c^2}=0;\ \ H=c\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+m^2c^2}. \qquad (55)$$

Таким образом, можно написать уравнения характеристик, т.е. уравнения движения:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial(\partial S/\partial x)}=\frac{c(\partial S/\partial x)}{\sqrt{(\partial S/\partial x)^2+m^2c^2}};\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)=-\frac{\partial H}{\partial x}=0. \qquad (56)$$

Из уравнения (56) видно, что (dx/dt) не является импульсом, поскольку при выводе уравнения Гамильтона-Якоби было принято, что импульс равняется $p=\partial S/\partial x$. Можно, однако, решить первое уравнение в (56) относительно $\partial S/\partial x$ и полученный результат подставить во второе уравнение в (56). В результате получим:

$$\frac{\partial S}{\partial x}=\frac{m\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}},\quad \upsilon=\frac{dx}{dt}. \qquad (57)$$

Из (57) видно, что $\partial S/\partial x$ действительно равняется импульсу p. Подставив полученное значение для $\partial S/\partial x$ в (56), получим в результате:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right)=0, \qquad (58)$$

т.е. уравнение движения (54). Аналогично выводятся уравнения (54) для 3-мерного случая.

Таким образом, уравнения движения для свободной частицы (54) являются одновременно уравнениями характеристик для уравнений Гамильтона- Якоби. Следует отметить, что рассмотренный выше метод вывода уравнений движения на основе характеристик уравнений Гамильтона-Якоби справедлив и в классической (нерелятивистской) области.

Пример 15. Нерелятивистское (классическое) уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2\right]+U=0. \qquad (59)$$

[7] Петров Б.Н., Гольденблат И.И., Уланов Г.М., Ульянов С.В. Проблемы управления релятивистскими и квантовыми динамическими системами. – М.: Наука, 1982.

В данном случае

$$H\left(x_1,x_2,x_3,\frac{\partial S}{\partial x_1},\frac{\partial S}{\partial x_2},\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)=\frac{1}{2m}\left[\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2\right]+U\,. \tag{60}$$

Уравнение для характеристик будет иметь вид:

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial\left(\partial S/\partial x_i\right)}=\frac{1}{m}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right);\quad \frac{d\left(\partial S/\partial x_i\right)}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}=-\frac{\partial U}{\partial x_i},$$

откуда следует

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2}=-\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad i=1,2,3. \tag{61}$$

Таким образом, получили уравнение движения в форме Ньютона.

Итак, если задано уравнение Гамильтона-Якоби для некоторой динамической системы, то соответствующее уравнение для характеристик последнего совпадает с уравнениями движения этой системы. Существует и обратный вывод[8,9], согласно которому из уравнений движения динамической системы можно непосредственно вывести соответствующее уравнение Гамильтона-Якоби. Такой подход имеет важное значение при построении стохастического уравнения Гамильтона-Якоби по уравнению движения в виде стохастического дифференциального уравнения Ито или Стратоновича.

Рассмотрим кратко основные положения такого подхода к выводу уравнения Гамильтона-Якоби.

Пример 16. Запишем уравнение движения в форме Ньютона в следующем эквивалентном виде:

$$m\frac{d\upsilon}{dt}+\nabla U\left(x,t\right)=0, \tag{62}$$

где $U\left(x,t\right)-$потенциальное поле, градиент ∇U которого пропорционален силовому полю. Согласно векторному анализу, полная производная векторной функции имеет следующий вид:

$$\frac{d\upsilon\left(x,t\right)}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\upsilon\left(x,t\right)+\upsilon\left(x,t\right)\nabla\upsilon\left(x,t\right). \tag{63}$$

Таким образом, полная производная состоит из двух переменных слагаемых: первое слагаемое характеризует изменение функции $\upsilon\left(x,t\right)$ в данном месте пространства; второе слагаемое характеризует изменение функции $\upsilon\left(x,t\right)$, происходящее благодаря тому, что рассматриваемая частица переносится в пространстве из одной точки в другую. Второе слагаемое $\upsilon\left(x,t\right)\nabla\upsilon\left(x,t\right)$ называют поэтому конвективным членом, так как оно возникает в связи с переносом (конвекцией) частицы жидкости. Дальнейшее обобщение такого подхода заключается в построении моделей параллельного переноса в римановом пространстве и рассмотрено в [2].

Из векторного анализа известно также следующее соотношение:

$$\nabla\left(a\cdot b\right)=\left(a\nabla\right)b+\left(b\nabla\right)a+a\times\left[\nabla\times b\right]+b\times\left[\nabla\times a\right]. \tag{64}$$

Тогда из (63) и (64) следует:

$$\frac{d}{dt}\upsilon\left(x,t\right)=\frac{\partial}{\partial t}\upsilon\left(x,t\right)+\frac{1}{2}\nabla\left(\upsilon^2\left(x,t\right)-\upsilon\left(x,t\right)\right)\times\left[\nabla\times\upsilon\left(x,t\right)\right]. \tag{65}$$

Подставляя уравнение (65) в исходное уравнение движения (62), получим:

$$m\frac{\partial}{\partial t}\upsilon\left(x,t\right)+\frac{m}{2}\nabla\left[\upsilon^2\left(x,t\right)\right]-m\upsilon\left(x,t\right)\times\left[\nabla\times\upsilon\left(x,t\right)\right]+\nabla U\left(x,t\right)=0\,. \tag{66}$$

---

[8] Yan C. C. Simplified derivation of the Hamilton-Jacobi equation // Am. J. Phys. – 1984. – Vol. 52. – Pp. 555-556.

[9] Granik A. On elementary derivation of the Hamilton-Jacobi equation from the second law of Newton // arXiv:physics/0309059. – 2003.

Ранее было сделано предположение, что векторное поле скоростей порождается скалярной функцией с помощью соотношения типа (34) в виде:

$$\upsilon(x,t) = \frac{1}{m}\nabla S(x,t). \tag{67}$$

Подставляя (67) в (66), получаем равенство:

$$\nabla\left\{\frac{\partial}{\partial t}S(x,t) + \frac{1}{2m}\left[\nabla S(x,t)\right]^2 + U(x,t)\right\} = 0. \tag{68}$$

При выводе (68) использовалось тождество $\nabla\left[\nabla S(x,t)\right] = 0$.

В выражении (68) в фигурных скобках величина является скаляром, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t}S(x,t) + \frac{1}{2m}\left[\nabla S(x,t)\right]^2 + U(x,t) = 0, \tag{69}$$

что совпадает с (59).

Таким образом, выражение (69) есть уравнение Гамильтона-Якоби для системы, описываемой уравнением движения (62).

Отметим здесь также случай, когда частица движется в потенциальном поле при наличии диссипативной силы. В этом случае уравнение движения имеет вид: $m\frac{d\upsilon}{dt} + \nabla U + \alpha\upsilon = 0$. Применяя изложенную методику к данному уравнению, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}S(x,t) + \frac{1}{2m}\left[\nabla S(x,t)\right]^2 + \frac{\alpha}{m}S(x,t) + U(x,t) = 0. \tag{70}$$

Уравнение (70) является уравнением Гамильтона-Якоби с диссипацией[10].

Более общий подход определения неголономного уравнения Гамильтона-Якоби с учетом диссипативных сил рассмотрен во многих работах[11,12].

Пример 17. Уравнение Гамильтона-Якоби для частицы в вертикальном цилиндре с равномерным гравитационным полем и силой трения. Обсудим теперь более общий случай релятивистского уравнения движения частицы в электромагнитном поле. Рассмотрим движение частицы массы m в цилиндре радиуса r в присутствии гравитационного поля g и предположим, что на частицу действует сила трения (диссипация). Тогда Гамильтониан $H(x,\theta,p_x,p_\theta) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + mgx$ и силы трения задаются как $F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = k_1\frac{\partial}{\partial x}$, $F\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = k_2\frac{\partial}{\partial \theta}$, где k_1, k_2 – постоянные.

Соответствующие уравнения движения имеют вид:

$$m\dot{x} = p_x,\ \ mr^2\dot{\theta} = p_\theta,\ \ \dot{p}_x = -mg - k_1 p_x,\ \ \dot{p}_\theta = -k_2 p_\theta.$$

Уравнение Гамильтона-Якоби с функцией действия $S(x,\theta) = S^{(1)}(x) + S^{(2)}(\theta)$ примет вид:

$$k_1\frac{dS^{(1)}}{dx} + mg + \frac{1}{m}\frac{dS^{(1)}}{dx}\frac{d^2S^{(1)}}{dx^2} = 0,\quad k_2\frac{dS^{(2)}}{d\theta} + \frac{1}{mr^2}\frac{dS^{(2)}}{d\theta}\frac{d^2S^{(2)}}{d\theta^2} = 0.$$

Решение данного уравнения имеет вид:

---

[10] Denman H.H., Buch L. H. Solution of the Hamilton-Jacobi equation for certain dissipative classical mechanical systems // J. Math. Phys. – 1973. – Vol. 14. – Pp. 326-329.

[11] Ohsawa T. Bloch A. Nonholomonic Hamilton-Jacobi equation and integrability // J. Geometric Mechanics. – 2009. – Vol. 1. – № 4. – Pp. 1-21.

[12] Balseiro P., Marrero J.C., D.M. de Diego, Padron E. A unified framework for mechanics: Hamilton-Jacobi equation and applications // arXiv:1001.0482v1 [math-ph]. – 2010.

$$S^{(1)}(x)=\frac{-gm-gmW\left[-\dfrac{e^{-1+\frac{k_1^2x}{g}-\frac{k_1^2C_2}{gm}}}{gm}\right]}{k_1},\quad \text{если } k_1>0$$

или

$$S^{(1)}(x)=\pm\sqrt{2}\sqrt{-gm^2x+C_2}\text{, если } k_1=0\,;\quad S^{(2)}(\theta)=0 \text{ или } S^{(2)}(\theta)=-\frac{k_2mr^2}{2}\theta^2+C_1\,,$$

где W – W-функция Ламберта (обратная функция от $f(\nu)=\nu e^{\nu}$) и C_1, C_2 – постоянные величины. На рис. 4 представлено сравнение траекторий движения частиц без и в присутствии сил трения.

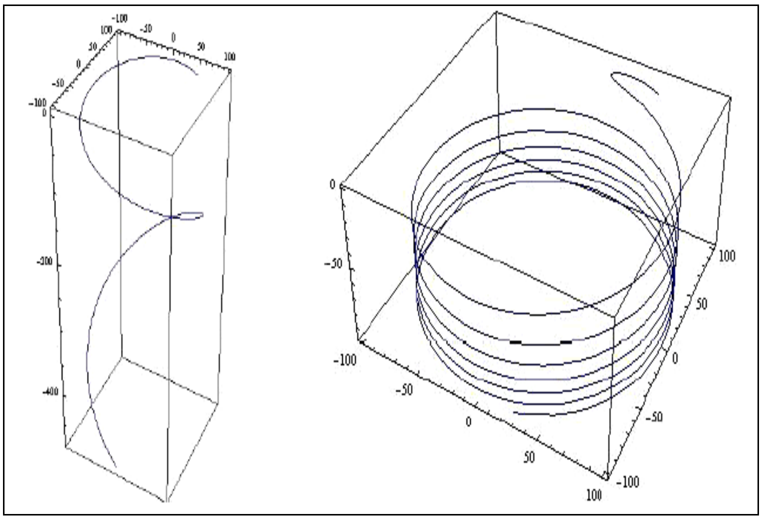


Рис. 4. Сравнение траекторий движения частицы без трения (слева) и с трением (справа)

Из рис. 4 видно качественное различие в движении частицы без и в присутствии сил трения.

Рассмотрим теперь более общие случаи движения частицы в электромагнитном поле.

Пример 18. Для релятивистского случая уравнение движения запишем с учетом внешнего электромагнитного поля в виде:

$$\frac{dp}{dt}+e\nabla\varphi^0+\frac{e}{c}\frac{\partial A}{\partial t}-\frac{e}{c}\vartheta\times(\nabla\times A)=0\,, \tag{71}$$

где $p=m\vartheta/\left(1-\upsilon^2/c^2\right)^{1/2}$, e – заряд частицы, $\left(\varphi^0, A\right)$ – 4-потенциал электромагнитного поля. В этом случае имеем:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt}&=\frac{\partial p}{\partial t}+(\vartheta\cdot\nabla)p=\frac{\partial p}{\partial t}+\left\{\nabla(\vartheta\cdot\nabla)-\left[(p\cdot\nabla)\vartheta+p\times[\nabla\times\vartheta]\right]\right\}-\vartheta[\nabla\times p]=\\&=\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\left[c\left(p^2+m^2c^2\right)^{1/2}\right]-\vartheta[\nabla\times p].\end{aligned} \tag{72}$$

При выводе (72) было использовано векторное тождество (64).

Используя соотношение $p=\nabla S-\frac{e}{c}A$ и подставляя это выражение для импульса в (71), получим уравнение:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+e\varphi^0+c\sqrt{\left[\nabla S-\frac{e}{c}A\right]^2+m^2c^2}=0\,, \tag{73}$$

которое является уравнением Гамильтона-Якоби, соответствующим уравнению движения (71).

Пример 19. Воспользовавшись (51), можно написать уравнения характеристик для выражения (73), т.е. уравнения движения заряженной частицы в заданном электромагнитном поле типа (71). В 3-мерном обозначениях они будут иметь вид:

$$\frac{dp}{dt} = eE + \frac{1}{c}\left[\vartheta \cdot H_0\right], \tag{74}$$

где $E = \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}\right) - \mathrm{grad}\varphi^0 -$ напряженность электромагнитного поля, $H_0 = \mathrm{rot}\, A -$ напряженность магнитного поля. Отметим, выражение, стоящее в правой части (74), носит название *силы Лоренца*.

Таким образом, вычисление характеристик уравнения Гамильтона-Якоби (73) дает не только возможность написать уравнения движения (74) для заряженной частицы, движущейся в заданном электромагнитном поле, но и вывести конкретное выражение для силы Лоренца:

$$F_L = eE + \frac{1}{c}\left[\vartheta \cdot H_0\right].$$

Следовательно, уже в рамках классической механики достигаем полного описания механической системы с помощью одной функции – действия $S\left(x_1, x_2, x_3, t\right)$.

Что касается уравнения Гамильтона-Якоби, то оно заключает в себе информацию не только о движении частицы, но и о действующих на эти частицы силах; в частности, о силах, носящих не механический характер, т.е. таких, как сила Лоренца.

Таким образом, в классической механике эквивалентное описание движения объекта имеет дуальный характер: уравнение Гамильтона-Якоби является волновым уравнением и описывает волновое свойство движения частицы; уравнение Ньютона описывает корпускулярное свойство движения частицы. Наглядным примером существования данного факта может служить образование волн на воде от брошенного в нее камня.

Из изложенного следует также, что уже в классической механики присутствует дуализм в описании движения частицы: *волновое* и *корпускулярное* представления, которые являются тождественными формами модели классической механики. Данный факт играет важную роль при разработке моделей квантовой механики[13,14,15,16] и рассмотрен в [3].

Обсудим еще одну форму представления уравнения Гамильтона Якоби, используемой при выводе уравнений квантовой механики из классической механики.

Модифицированное уравнение Гамильтона Якоби и волновое представление классической механики

Рассмотрим релятивистское уравнение Гамильтона-Якоби (46). Допустим, что уравнение (46) имеет зависящее от одного параметра Ω неявное решение:

$$\Omega\left(x_1, x_2, x_3, t\right) = \Omega_0 = \mathrm{const}, \tag{75}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_k} + \frac{\partial \Omega}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial x_k} = 0; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{76}$$

Отсюда следует:

[13] Dewdney C., Horton G., Lam M.M. et all. Wave-particle dualism and the interpretation of quantum mechanics // Foundations of Physics. – 1992. – Vol. 22. – № 10. – Pp. 1217-1265.

[14] Holland P. Hamiltonian theory of wave and particle in quantum mechanics II: Hamilton-Jacobi theory and particle back-reaction // Nuovo Cimento – 2001. – Vol. B 116. – Pp. 1143-1172.

[15] Sivashinsky G. I. Wave-particle duality and the Hamilton-Jacobi equation // arXiv: [quant-ph]. – 0912.5156v1. – 2009.

[16] Granik A. The Schrodinger equation: Derivation from classical mechanics resulting in the wave-particle duality and other principal corollaries // arXiv: [quant-ph]. – 0801.3311v1. – 2008.

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial t}}{\frac{\partial \Omega}{\partial S}}; \qquad \frac{\partial S}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x_k}}{\frac{\partial \Omega}{\partial S}}. \tag{77}$$

Подставив (77) в (46), получим:

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_3}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)^2 + m^2 c^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial S}\right)^2 = 0. \tag{78}$$

Уравнение (78) будем называть[17] *трансформированным* уравнением Гамильтона-Якоби, которое можно рассматривать как уравнение характеристик для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + m^2 c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial S^2} = 0. \tag{79}$$

Отметим, что аналогичное (79) гиперболическое волновое уравнение рассматривалось В. Масловым[18] в связи с исследованиями нестандартных характеристик в асимптотических задачах.

Полученное волновое уравнение (79) будем называть классическим (т.е. не квантовым) волновым уравнением. Так как уравнением его характеристик является модифицированное уравнение Гамильтона-Якоби, то, следовательно, его бихарактеристики являются уравнениями траекторий движения частиц. Получаем, таким образом, волновое представление классической релятивистской механики.

Пример 20. В механике классической (ньютоновой) уравнение Гамильтона-Якоби для одной частицы, находящейся в заданном потенциальном поле $U(x_1, x_2, x_3, t)$ имеет вид (69).

Путем преобразования (77) уравнение (69) представляется в модифицированном виде:

$$-\frac{\partial \Omega}{\partial S}\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_i}\right)^2 + U(x_1, x_2, x_3, t)\left(\frac{\partial \Omega}{\partial S}\right)^2 = 0. \tag{80}$$

Будем теперь рассматривать уравнение (80) как уравнение характеристического многообразия для линейного волнового уравнения, содержащего только старшие производные. Нетрудно убедиться, что это волновое уравнение будет иметь вид:

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial S} + \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} + U(x_1, x_2, x_3, t)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial S^2} = 0. \tag{81}$$

В уравнении (81) функция $\varphi(x_1, x_2, x_3, t, S)$ зависит от пяти координат. Следует, однако, иметь в виду, что последняя, пятая координата $S(x_1, x_2, x_3, t)$, не является независимой. Она является инвариантной функцией четырех координат (x_1, x_2, x_3, t). Поэтому при преобразованиях Галилея функция $S(x_1, x_2, x_3, t)$ не изменяется.

Следовательно, в данном случае имеем дело не с расширением объекта (в смысле проблемы Вундгейлера) а с его модифицированным представлением.

Уравнение (81) является волновым представлением классической (ньютоновой) механики, так как его характеристическим многообразием является модифицированное уравнение Гамильтона-Якоби, а его бихарактеристиками являются уравнения движения частиц.

Физический смысл функции $\varphi(x_1, x_2, x_3, t, S)$ обсуждается в [3].

---

[17] Гольденблат И.И., Ульянов С.В. Введение в теорию относительности и ее применение в новых технологиях. – М.: Физматгиз, 1979.

[18] Маслов В. Нестандартные характеристики в асимптотических задачах // Успехи Математических Наук (УМН). – 1982. – Т. 36. – № 6. – С. 3-35.

Заключение

В данной статье приведены необходимые сведения из волновой механики. Освещены особенности применения уравнения Гамильтона-Якоби и метода характеристик, которые используются для вывода уравнений квантовой релятивистской механики. Такой подход позволяет использовать методы классической теории управления в задачах управления квантовыми и релятивистскими ОУ с учетом квантовых и релятивистских эффектов [3].

Список литературы

1. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1979.
2. Петров Б.Н., Гольденблат И.И., Уланов Г.М., Ульянов С.В. Проблемы управления релятивистскими и квантовыми динамическими системами. – М. Наука, 1982.
3. Методы современной теории автоматического управления – Сер. Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – Т. 5.