

УДК 519.63

**МРІ-РЕАЛИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ,
ОПИСЫВАЮЩИХ МОДЕЛЬ ДЛИННЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДОВ****Башашин Максим Викторович¹, Земляная Елена Валериевна²,
Шукринов Юрий Маджнунович³, Рахмонов Илхом Рауфович⁴**¹Студент;

ГБОУ ВО МО «Университет «Дубна»,

Институт системного анализа и управления;

Россия, 141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, д. 19;

e-mail: bashashinmv@jinr.ru.

²Ведущий научный сотрудник;

Объединенный институт ядерных исследований;

Россия, 141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, д. 6;

e-mail: elena@jinr.ru.

³Ведущий научный сотрудник;

Объединенный институт ядерных исследований;

Россия, 141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, д. 6;

e-mail: shukrinov@theor.jinr.ru.

⁴Научный сотрудник;

Объединенный институт ядерных исследований;

Россия, 141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, д. 6;

e-mail: rahmonov@theor.jinr.ru.

Важным элементом численного исследования фазовой динамики системы длинных джозефсоновских переходов является расчет вольт-амперных характеристик. Такой расчет сводится к численному решению системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которое осуществляется с использованием стандартных трехточечных конечно-разностных схем для дискретной аппроксимации по пространственной координате вдоль длины перехода и с применением для решения полученной задачи Коши метода Рунге-Кутты. Разработанный параллельный алгоритм реализован на основе технологии MPI. Методические вычисления, проведенные на многопроцессорном кластере ЦИВК в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ, показали, что параллельная реализация обеспечивает ускорение до 7 раз по сравнению с однопроцессорным режимом

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 15-29-01217.

Ключевые слова: Джозефсоновские переходы, MPI, решение системы уравнений.

**MPI-IMPLEMENTATION OF NUMERICAL SOLUTION OF THE SYSTEM OF
EQUATIONS DESCRIBING THE LONG JOSEPHSON JUNCTIONS MODEL****Bashashin Maxim¹, Zemlyanaya Elena², Shukrinov Yury³, Rahmonov Ilhom⁴**¹Student;

Dubna State University,

Institute of the system analysis and management;

Russia, 141980, Moscow reg., Dubna, 19 University st.;

e-mail: bashashinmv@jinr.ru.

²Leading Researcher;

Joint institute for nuclear researches;

Russia, 141980, Moscow reg., Dubna, 6 Joliot-Curie st.;

e-mail: elena@jinr.ru.

³*Leading Researcher;*
Joint institute for nuclear researches;
Russia, 141980, Moscow reg., Dubna, 6 Joliot-Curie st.;
e-mail: shukrinv@theor.jinr.ru.

⁴*Position: Researcher;*
Joint institute for nuclear researches;
Russia, 141980, Moscow reg., Dubna, 6 Joliot-Curie st.;
e-mail: rahmonov@theor.jinr.ru.

A current-voltage characteristic is one of important elements of a numerical investigation of the phase dynamics of long Josephson junctions (LJJ). The calculation is based on numerical solution of the system of nonlinear partial differential equation by means of the standard three-point finite-difference approximation in the spatial coordinate along the length of the LJJ and utilizing of the Runge-Kutta method for solution of the resulting Cauchy problem. A parallel algorithm is developed and implemented on a basis of the MPI technology. Methodical calculations have been carried out on the multiprocessor cluster CICC of Laboratory of Information Technologies. The numerical results confirm that the parallel implementation provides acceleration up to 7 times in comparison to the single-processor mode.

Keywords: Josephson junctions, MPI, the solution of equations.

Введение

Интерес к математическому моделированию физических процессов в стеках длинных джозефсоновских переходов (ДДП) обусловлен, помимо необходимости получения фундаментальных знаний о свойствах слоистых джозефсоновских структур, открывающейся перспективой практических приложений в сверхпроводящей электронике. В частности, недавно было обнаружено достаточно мощное когерентное электромагнитное излучение в терагерцовой области частот из данной системы [1]. Экспериментальные и теоретические исследования терагерцового излучения из стека внутренних джозефсоновских переходов в слоистых сверхпроводниках интенсивно проводятся в настоящее время в Японии, США и Германии.

Расчет физических характеристик ДДП сводится к численному решению систем уравнений синус-Гордона в широком диапазоне параметров, что требует существенных затрат компьютерного времени. В этой связи важную роль приобретает развитие методов компьютерного моделирования, включая разработку параллельных алгоритмов для повышения эффективности численного исследования.

В настоящей работе рассматривается обобщенная модель, учитывающая индуктивную и емкостную связь между ДДП. Система связанных ДДП предполагается состоящей из $N + 1$ сверхпроводящих слоев с промежуточными диэлектрическими слоями (рис. 1).

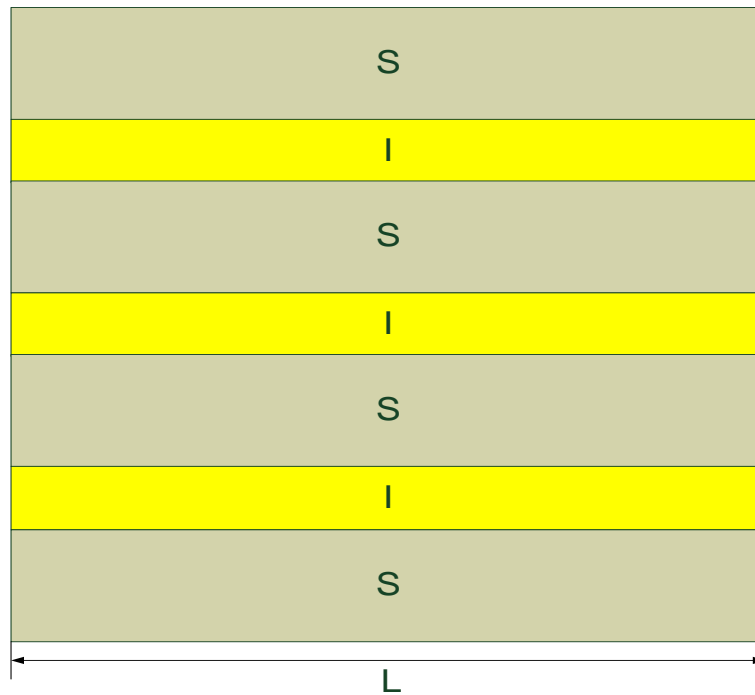


Рис. 1. Структура стека джозефсоновских переходов длины L .
 S – сверхпроводящие слои, I – диэлектрические слои

1. Постановка задачи

Система уравнений, определяющая фазовую динамику системы ДДП с учетом емкостной и индуктивной связи между контактами, имеет следующий вид [2]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} = D_c V_l + s_c V_{l+1} + s_c V_{l-1} \\ \frac{\partial V_l}{\partial t} = \sum_{n=1}^N (\mathcal{L}_{l,n}^{-1} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2}) - \sin \varphi_l - \beta \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} + I' \end{cases} \quad (1)$$

где \mathcal{L} – матрица индуктивной связи:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & S & 0 & \dots & & & S \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & S & 1 & S & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S & & & \dots & 0 & S & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь $\varphi_l(x, t)$ и $V_l(x, t)$ – соответственно разность фаз и напряжение в l -м ДП стека ($l = 1, \dots, N$), $\beta = \sigma V_0 / (d_l j_c)$ – параметр диссипации, S – параметр индуктивной связи, который принимает значения в интервале $0 < |S| < 0.5$. D_c – эффективная электрическая толщина ДП, нормированная на толщину диэлектрического слоя. s_c – параметр емкостной связи, I – внешний ток. Все величины в системе (1) переведены в безразмерные [2].

Граничные условия:

$$V_l(0, t) = V_l(L, t) = \frac{\partial \varphi_l(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_l(L, t)}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

2. Численный метод

Для численного решения системы (1–3) вводится равномерная дискретная сетка по пространственной координате x с шагом Δx и по координате времени t с шагом Δt . Для аппроксимации производных по пространственной координате используются стандартные трехточечные конечно-разностные формулы. Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно значений разностей фаз φ_l и напряжений V_l в узлах дискретной сетки по x решается численно с использованием метода Рунге-Кутты (РК) четвертого порядка. Вычисления проводились при $\Delta x = 0.05$. Шаг по t был выбран $\Delta t = \Delta x/5$ на основе проведенных методических расчетов, чтобы обеспечить выполнение условия Куранта и устойчивость вычислительной схемы.

Одной из главных физических характеристик системы ДДП является вольт-амперная характеристика (ВАХ), отражающая динамику изменения усредненного по контактам и времени значения напряжения при изменении внешнего тока. Для вычисления ВАХ на каждом шаге по времени вычисляется интеграл

$$\bar{V}_l(t) = (1/L) \int_0^L V_l(x, t) dx \quad (4)$$

с использованием формулы Симпсона. Далее вычисляется интеграл

$$\langle V_l \rangle = 1/(T_{max} - T_{min}) \int_{T_{min}}^{T_{max}} \bar{V}_l(t) dt \quad (5)$$

на основе метода прямоугольников и, наконец, напряжение усредняется по числу контактов

$$\langle V \rangle = \sum_{l=1}^N \langle V_l \rangle. \quad (6)$$

Расчеты начинаются при $I = I_{min} = 0.01$ с нулевыми начальными условиями. Значение тока увеличивается до $I_{max} = 1.1$ с шагом 0.005 и затем уменьшается до нуля. При необходимости в выделенных интервалах расчет проводится с более мелким шагом по току. В процессе расчета к току добавляется шум порядка $\delta I = \pm 10^{-8}$. Для каждого значения I расчет проводится до $T_{max} = 200$. Далее полученные значения напряжения и разности фаз используются в качестве начальных условий при расчете для следующего значения I .

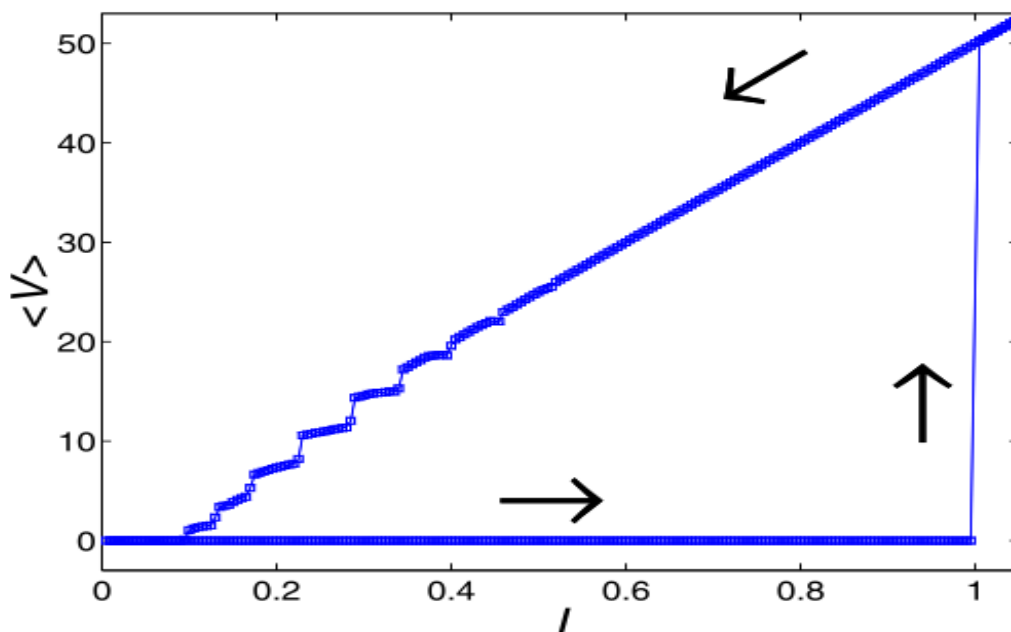


Рис. 2. ВАХ для случая $N = 5$, $L = 10$, $\beta = 0.1$, $S = -0.05$, $D_c = 1.1$, $s_c = 0.05$

В качестве примера на рис. 2 представлена типичная структура ВАХ. Показан случай $N = 5$, $L = 10$, $\beta = 0.1$, $S = -0.05$, $D_c = 1.1$, $s_c = 0.05$. Начальное нулевое напряжение при определенном значении тока I скачкообразно возрастает, далее происходит плавный рост при увеличении I до I_{max} .

При уменьшении I от I_{max} до нуля кривая $V(I)$ имеет иную форму и содержит так называемые ступеньки Шапиро [2].

Описанная здесь вычислительная схема и соответствующий компьютерный код успешно прошли апробацию путем сравнения полученных на его основе результатов с расчетами в рамках другого подхода, представленного в [4].

3. Параллельная реализация на основе технологии MPI

Разработанный параллельный алгоритм основан на распределении вычислений по узлам дискретной сетки по координате x вдоль длины контакта. Параллельная реализация выполнена с использованием технологии MPI. Каждому из задействованных в расчете параллельных MPI-процессов назначается своя порция узлов дискретной сетки по координате. Каждый процесс в назначенных ему узлах в параллельном режиме вычисляет рекурсивно коэффициенты Рунге-Кутты и затем решения V_l и φ_l системы уравнений. Такой расчет на каждом шаге по времени производится для каждого контакта с номером l . В ходе вычислений соседние процессы обмениваются необходимыми им для дальнейших расчетов значениями коэффициентов Рунге-Кутты и решений V_l, φ_l в граничных узлах назначенных этим процессам порций узлов дискретной сетки. При расчете ВАХ сначала каждым процессом вычисляются частичные суммы в соответствии с формулой Симпсона, далее производится сборка в 0й процесс, где и осуществляются окончательные вычисления ВАХ и запись в файлы. При необходимости аналогичным образом осуществляются расчеты других физических характеристик стека ДДП [3].

Таблица 1. Зависимость времени счета (в минутах) от числа P параллельных MPI-процессов при расчете с разными значениями N и L

N	L	$P = 1$	$P = 2$	$P = 4$	$P = 6$	$P = 8$	$P = 10$	$P = 12$	$P = 14$
10	5	33,37	17,93	10,11	9	7,03	6,18	6,19	8,4
10	10	67,08	34,86	18,31	13,37	11,06	9,65	9,67	11,74
5	10	26,2	13,4	7,6	5,9	5,06	4,4	4,3	5,3

Расчеты выполнены на многопроцессорном кластере ЦИВК Многофункционального центра обработки и хранения информации (ЛИТ ОИЯИ, Дубна). Расчеты выполнены при $\beta = 0.1, S = -0.05, D_c = 1.1, s_c = 0.05$. В Таблице 1 и на Рис. 3 представлены результаты расчетов для стека с 5 и 10 джозефсоновскими переходами и длиной контакта 5 и 10 при $\beta = 0,1$. При этом ток увеличивается от минимального значения $I_{min} = 0.01$ до $I_{max} = 1.1$, затем уменьшается до нуля. Шаг по координате $\Delta x = 0.05$. Временной домен составляет 100 с параметром дискретизации $\Delta t = \Delta x/5$. Шаг по току равен 0,005. Из таблицы видно, что наименьшее время счета достигается на 10 процессах и далее меняется незначительно. Отметим, что рассмотренная вычислительная схема требует значительных объемов межпроцессорного взаимодействия, что ограничивает эффективность распараллеливания. Тем не менее, параллельная реализация обеспечивает ускорение до 7 раз по сравнению с однопроцессорным режимом расчета.

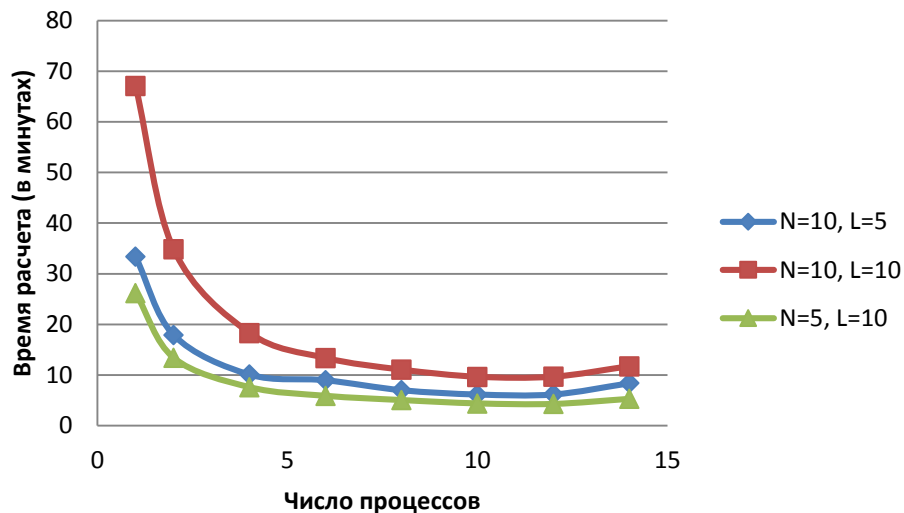


Рис. 3. Время расчета (в минутах) ВАХ в зависимости от числа параллельных MPI-процессов для разных значений N и L . Расчеты выполнены на многопроцессорном кластере ЦИВК Многофункционального центра обработки и хранения информации (ЛИТ ОИЯИ, Дубна).
 Расчеты выполнены при $\beta = 0.1$, $S = -0.05$, $D_c = 1.1$, $s_c = 0.05$

Заключение

В работе представлен параллельный алгоритм для численного исследования модели длинных джозефсоновских переходов с учетом емкостной и индуктивной связей, описываемой системой уравнений (1–3). Проведенные методические вычисления на многопроцессорном кластере ЦИВК Лаборатории информационных технологий подтверждают эффективность разработанного подхода и его реализации на основе технологии MPI. Показано, что расчет в параллельном режиме обеспечивает в типовых расчетах ускорение до 7 раз по сравнению с работой в однопроцессорном режиме. Для дальнейшего уменьшения времени счета необходима существенная модификация вычислительной схемы решения системы (1–3).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 15-29-01217.

Список литературы

1. Welp, U., Kadowaki, K. and Kleiner, R. Superconducting emitters of THz radiation. *Nature Photonics* 7 2013.702.
2. Рахмонов И.Р., Шукринов Ю.М., Ирие А. Параметрический резонанс в системе длинных джозефсоновских переходов // *Письма в ЖЭТФ* 99. – 2014. – Вып. 11. – Стр. 735-742.
3. Rahmonov I.R., Shukrinov Yu.M., Plecenik A., Zemlyanaya E.V., and Bashashin M.V. Numerical Study of System of Long Josephson Junctions with Inductive and Capacitive Couplings // *EPJ Web of Conf.*, 2015, in press.
4. Goldobin, E., Koelle, D., Kleiner, R., Buzdin, A.: Josephson junctions with second harmonic in the current-phase relation: Properties of junctions // *Physical Review B*. – Vol. 76. – 224523.