

## ГЕОМЕТРИЯ СБОРКИ НЕДЕФОРМИРУЕМЫХ ДЕТАЛЕЙ

Кашуба Леонид Анатольевич

*Кандидат технических наук, доцент Института системного анализа и управления;  
ГОУ ВПО «Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,  
Институт системного анализа и управления;  
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;  
e-mail: leonid-ak@mail.ru.*

*В работе рассматривается детерминированная модель сопряжения двух реальных поверхностей и двух цилиндрических деталей с реальными поверхностями, сопрягающихся по реальной поверхности торцов. Разработанные модели обобщены на неограниченное количество сопрягаемых деталей с реальными сопрягаемыми поверхностями. Предложенная детерминированная модель может быть использована для оценки геометрических погрешностей сборки и параметров геометрии масс собранного изделия.*

**Ключевые слова:** сопряжение реальных поверхностей, неподвижная и подвижная системы координат сопрягаемых поверхностей, точки контакта, расположение точек контакта относительно неподвижной системы координат, погрешность сопряжения недеформируемых поверхностей, пространственные размерные цепи недеформируемых изделий с реальными поверхностями.

## GEOMETRY ASSEMBLY UNDEFORMED DETAILS

Kashuba Leonid

*Candidate of Science in Engineering, associate professor of Institute of system analysis and management;  
Dubna International University of Nature, Society and Man,  
Institute of system analysis and management;  
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;  
e-mail: leonid-ak@mail.ru.*

*In work is considered deterministic model of the pair of real surfaces of cylindrical details with the real surfaces, conjugating on the real surface of the ends. The developed models are summarized on an unlimited number of mating parts with real coupled surfaces. The proposed deterministic model can be used to estimate the geometric errors of the assembly and of the parameters of the geometry of the mass of the assembled product.*

**Keywords:** pair of real surfaces, fixed and mobile system of coordinates of mating surfaces, the point of contact, the location of the contact points relative to a fixed coordinate system, the error pairing incapable surfaces, spatial dimensional chains incapable of products coupled with real surfaces.

### Введение

Познакомившись с работой [1], связанной с геометрией детали, можно перейти к описанию геометрии сборки деталей по сопрягаемым поверхностям. Формы сопрягаемых поверхностей разделяют на плоские, цилиндрические, конические, сферические, винтовые и *профильные*<sup>1</sup>.

В данной работе рассматривается сопряжение двух наиболее широко используемых и простых из сопрягаемых поверхностей, имеющих *номинальную плоскую форму*.

Конечно, даже такие простые номинальные формы поверхностей имеют отклонения формы. Отметим, что при соблюдении правил привязки номинальной системы координат номинальных поверх-

---

<sup>1</sup> *Профильное соединение* – соединение, у которого сопрягаемые поверхности составных частей изделия имеют форму определенного профиля (кулачков, зубчатых колёс и т. п.).

ностей к системе координат системы измерения через элемент, эквидистантный номинальному, *система координат реального элемента может быть отождествлена с системой координат эквидистантного элемента, прилегающего к реальному элементу.*

После определения геометрии сопряжения сопрягаемых поверхностей детали можно представить геометрию собранного из двух деталей изделия – сборочной единицы, привязав к каждой сопрягаемой поверхности остальные поверхности детали, а затем, продолжив присоединение к полученной сборочной единице других деталей по сопрягаемым поверхностям, получить полное и точное описание геометрии сборочной единицы любой сложности.

## Детерминированная модель сопряжения реальных элементов

Рассмотрим детерминированную<sup>2</sup> модель сопряжения реальных поверхностей двух деталей, имеющих номинально плоскую форму.

Сопряжение реальных поверхностей двух недеформируемых деталей происходит по ограниченному количеству точек. Определенность пространственного расположения системы координат реальной сопрягаемой поверхности одной детали относительно системы координат реальной поверхности другой детали обеспечивается тремя точками контакта. На этих трех точках можно построить систему координат соприкосновения, относительно которой могут быть определены системы координат любых реальных поверхностей сопрягаемых элементов. Каждая реальная поверхность имеет свою систему координат, к которой привязаны узлы сетки  $uv$ , представляющие реальную поверхность в параметрической форме набором узлов и кубических граничных кривых.

Пусть системы координат каждой из реальных поверхностей параллельны (рис. 1).

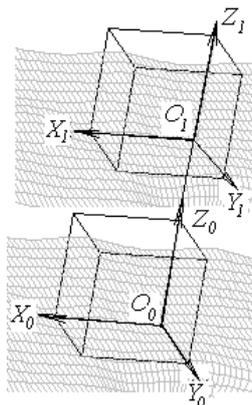


Рис. 1. Схема расположения сопрягаемых поверхностей до сопряжения

Систему координат одной из поверхностей  $O_0 X_0 Y_0 Z_0$  будем считать *неподвижной*, а другую  $O_1 X_1 Y_1 Z_1$  – *подвижной*. Начала координат расположены на одной оси и отстоят на некотором расстоянии друг от друга. Подвижную систему координат вместе с привязанными к ней точками реальной поверхности будем параллельно перемещать относительно неподвижной от  $O_1$  к  $O_0$  вдоль оси  $Z_0$ .

Точки подвижной реальной поверхности в этом случае проецируются на точки неподвижной реальной поверхности

Если теперь сближать эти поверхности (например, приближать подвижную с индексами 1 к неподвижной с индексами 0), то можно определить точку первого контакта. Она будет там, где расстояние между точками (например, узловыми) минимально. Перенесем одну из сопрягаемых реальных поверхностей (подвижную), не меняя ориентации в пространстве ее системы координат, в точку контакта (соприкосновения). Между всеми остальными узловыми точками расстояния (зазоры) будут разной величины.

В системе координат  $O_0, X_0, Y_0, Z_0$  (рис. 2, а) представлена точка первого контакта реальных поверхностей.

<sup>2</sup> Детерминированный – (от латин. Determine – определяю) обусловленный необходимой причинной связью.

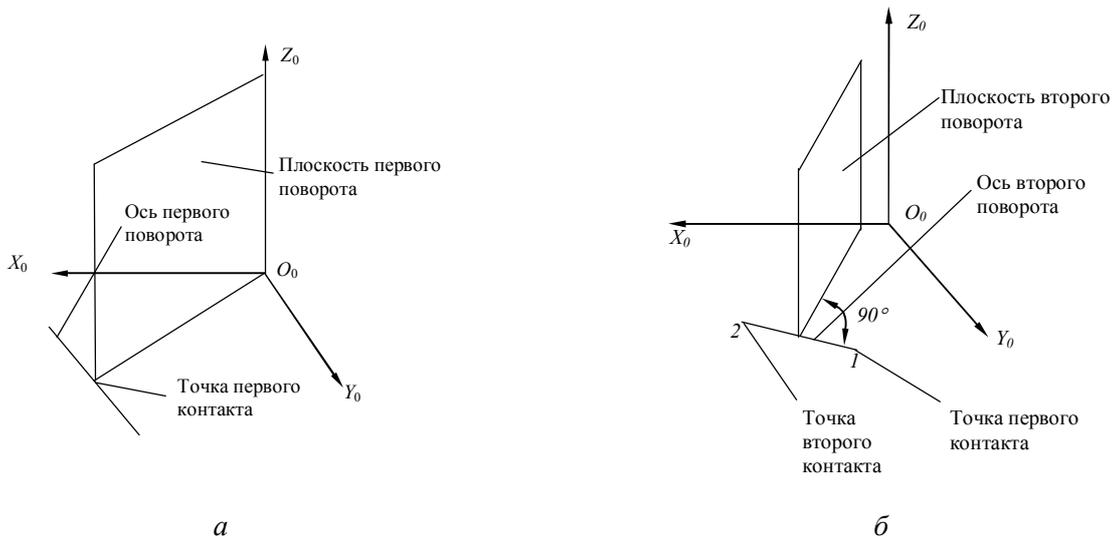


Рис. 2. Точки контакта поверхностей и направления осей поворота: а – первого контакта; б – второго контакта

Определение второй точки контакта можно сделать после поворота подвижной поверхности вокруг некоторой оси, проходящей через точку первого контакта. Для этого необходимо определить *правило поворота*.

Пусть таким правилом будет поворот подвижной системы координат в сторону начала координат неподвижной поверхности вокруг оси, проходящей через первую точку контакта и перпендикулярной направлению от точки контакта до начала координат первой плоскости (рис. 2, а). Поворот вокруг этой оси будет продолжаться до тех пор, пока не произойдет соприкосновения во второй точке контакта (рис. 2, б). Угол поворота соответствует минимальному углу между одноименными точками реальных поверхностей относительно оси поворота. После поворота система координат подвижной поверхности займет новое положение относительно первой.

Нахождение третьей точки контакта можно осуществить поворотом системы координат второй поверхности относительно оси, проходящей через две точки контакта (рис. 2, б). Для этого необходимо, прежде всего, определить положение точек второй реальной поверхности в системе координат первой после первого поворота, затем угол между одноименными точками относительно новой оси поворота и, наконец, по минимальному углу – точку третьего контакта. После этого система координат второй поверхности займет новое положение относительно первой. Три точки контакта образуют плоскость соприкосновения сопрягаемых поверхностей. Они могут быть расположены в системе координат первой поверхности произвольным образом (рис. 3, а).

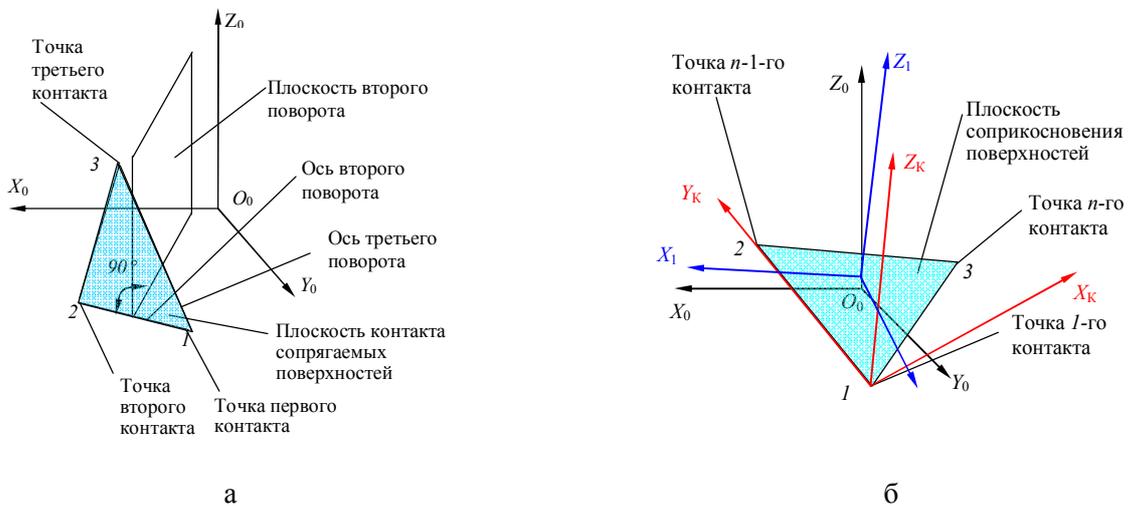


Рис. 3. Расположение трех точек контакта сопрягаемых поверхностей: а – в первый раз; б – в последний

Как видно из рисунка, треугольник контакта не охватывает начало системы координат неподвижной поверхности. Следующим шагом будет ещё один поворот системы координат второй поверхности относительно оси, проходящей через две точки контакта 1 и 3 в сторону неподвижной системы координат. Будет найдена четвёртая точка контакта. Если треугольник точек контакта 1, 3 и 4 не охватывает начало неподвижной системы координат, то проводится следующий поворот вокруг оси, проходящей через точки 1 и 4 и так далее до тех пор, пока начало системы координат неподвижной поверхности не окажется внутри точек контакта (рис. 3, б).

Расположение системы координат подвижной реальной поверхности относительно первой (неподвижной) будет определяться вектором  $R_{10}$  и матрицей направляющих косинусов  $A_{10}$  (рис. 4). Оно же будет *погрешностью сопряжения реальных недеформируемых поверхностей*.

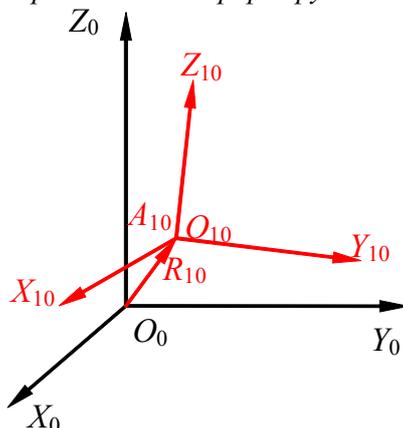


Рис. 4. Погрешность сопряжения реальных недеформируемых поверхностей

Для исключения неоднозначности решения при завершении поворотов подвижного элемента необходимо установление **правила прекращения поиска координат точки последнего контакта**.

По схеме, изложенной в этом разделе, могут быть осуществлены сопряжения поверхностей, имеющие другие формы.

### Детерминированная модель формирования геометрических параметров сборочной единицы

Перейдем к описанию геометрии сборки сборочной единицы, состоящей из двух одинаковых цилиндрических валов одинаковой длины и диаметра.

Изображение номинальной геометрии такой сборочной единицы на плоскости проекций в 2D и в пространстве в 3D представлено на рис. 5 а и б.

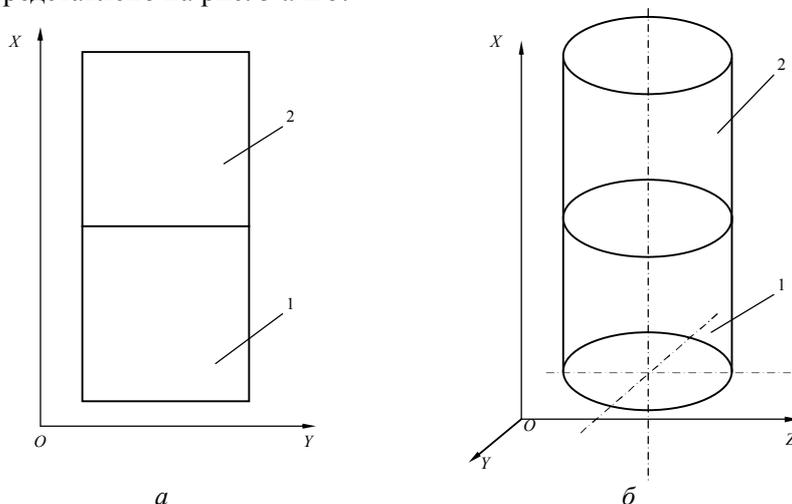


Рис. 5. Номинальная геометрия сборочной единицы: а – на плоском чертеже; б – в пространстве; 1, 2 – детали

А как будет выглядеть рисунок, если поверхности, ограничивающие объем деталей будут реальными?

Ограничимся на первом этапе только описанием геометрии изделия, когда цилиндрические поверхности двух деталей сборочной единицы представлены *прилегающими эквидистантными поверхностями*, а торцовые поверхности – реальными поверхностями. Как и на рис. 9 [1], системы координат реальных поверхностей каждой реальной торцевой поверхности можно представить в системе координат системы измерений (см. рис. 6, а).

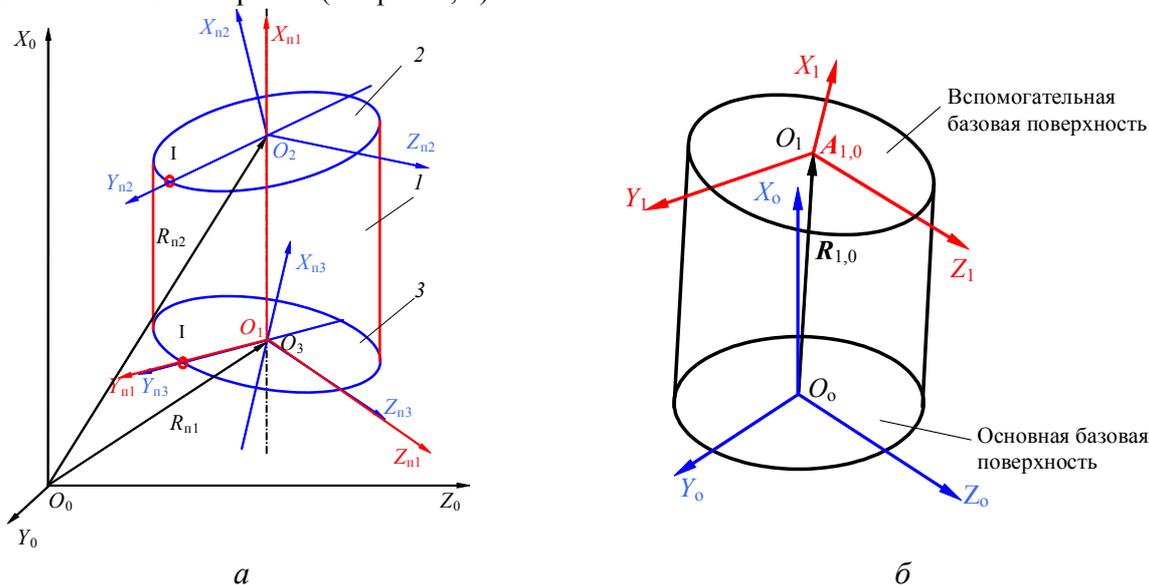


Рис. 6. Представление систем координат реальных поверхностей: а – в системе координат системы измерений; б – в системе координат основной базовой поверхности

Пусть 3-й торец (рис. 6, а) является основной базовой поверхностью. Систему координат каждой последующей торцевой поверхности (вспомогательной базы) задают в системе координат основной базовой поверхности (основной базы) вектором  $R_{10}$  и матрицей направляющих косинусов  $A_{10}$  (рис. 6, б). Индекс при  $R$  и  $A$  означает, что каждая последующая система координат (1) задана в предыдущей (0).

В собранной сборочной единице, состоящей из двух цилиндрических деталей, сопрягаемыми поверхностями являются верхний торец первой детали и нижний торец второй.

Проиндексируем торцевые поверхности деталей. Нижнему торцу первой детали присвоим индекс 0, верхнему – индекс 1, нижнему торцу второй детали присвоим индекс 2, а верхнему – индекс 3. Сопряжение деталей происходит по торцам 1 и 2.

В сопряжении первой и второй деталей положение системы координат нижнего торца второй детали 2 по отношению к положению системы координат верхнего торца первой детали 1 в соответствии с рис. 4 будет определяться вектором  $R_{21}$  и матрицей  $A_{21}$ .

Построение детерминированной модели сборки двух цилиндрических деталей по реальным сопрягаемым поверхностям связано с ее представлением системами координат основных и вспомогательных поверхностей деталей и системами координат сопрягаемых поверхностей в стыках объекта производства (рис. 7).

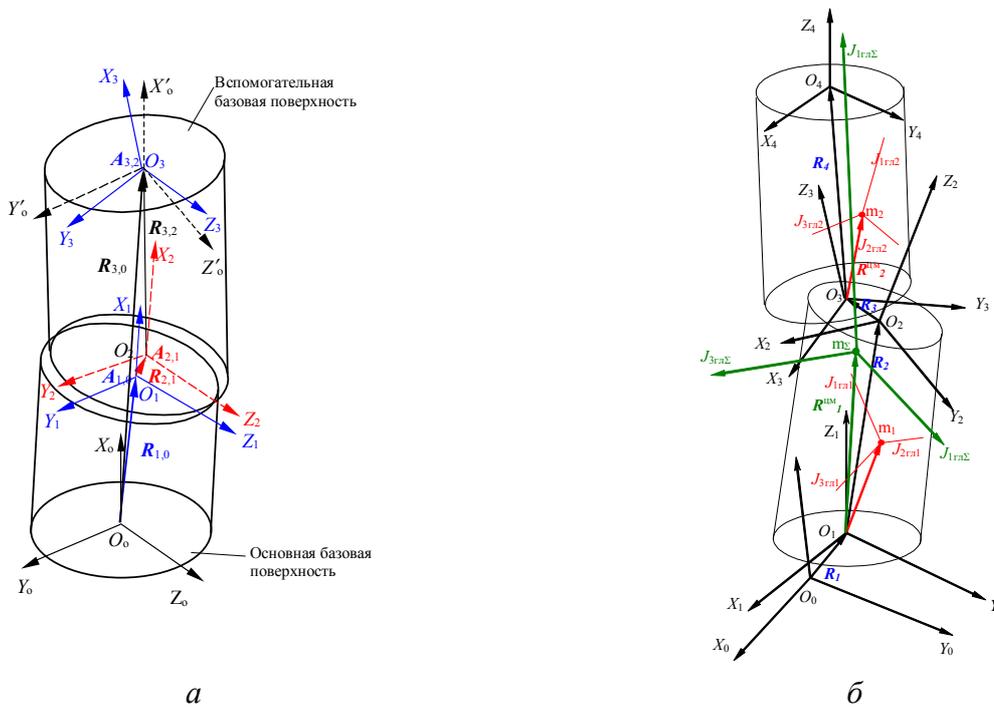


Рис. 7. Построение детерминированной модели сборки: а – геометрические параметры; б – параметры геометрии масс

На рис. 7, а представлен ожидаемый детерминированный результат сборки двух цилиндрических деталей с реальными поверхностями в системе координат реальной поверхности нижнего торца первой детали. Вычислив положение каждой системы координат каждой реальной поверхности недеформируемых деталей после сборки можно определить координаты всех точек реальных поверхностей деталей, участвующих в сборке, и определить все требования к геометрии собранного изделия как по погрешностям взаимного расположения реальных поверхностей деталей после сборки, так и по отклонениям формы собранного изделия. Геометрия сборки двух деталей строго и однозначно описывается аппаратом линейной алгебры.

На основе геометрической модели сборки построить модель геометрии масс собранного изделия с вычислением координат центра масс и направления главных центральных моментов инерции, которые необходимы для проведения расчётов при поступательном и вращательном характере движения механических систем.

Если в системах координат каждой сопрягаемой поверхности задать положение центра масс вектором  $R^{mm}_i$ , массу каждого элемента конструкции  $m_i$ , главные центральные моменты инерции  $J_{1гпi}$ ,  $J_{2гпi}$  и  $J_{3гпi}$ , направление главных центральных моментов матрицей  $A^{гпm}_i$ , то по известным соотношениям теоретической механики [2, 3] можно определить массу сборочной единицы  $m_{\Sigma}$ , положение центра масс  $R^{mm}_{\Sigma}$ , величину  $J_{1гп\Sigma}$ ,  $J_{2гп\Sigma}$  и  $J_{3гп\Sigma}$  и направление главных центральных моментов инерции сборочной единицы в выбранной системе координат  $O_0X_0Y_0Z_0$ .

На основе математической модели геометрических параметров сборочной единицы можно построить математическую модель ее геометрии масс (рис. 7, б).

Ну а как быть, если деталей больше, чем две и их форма не такая простая?

Детерминированную геометрическую модель сборки недеформируемых элементов конструкции по сопрягаемым поверхностям можно представить в виде пространственной цепи систем координат сопрягаемых поверхностей стыков элементов конструкции, где каждая последующая система координат задана в предыдущей. Подробное описание задания таких элементов геометрии в векторно-матричном представлении и универсальных геометрических параметрах (УГП) представлено в [4].

Составляющими звеньями пространственной цепи являются радиусы-векторы положения центров и матрицы направляющих косинусов систем координат сопрягаемых поверхностей и связанных с ними точек и других поверхностей деталей, расположение которых необходимо определить после сборки. Замыкающими звеньями этой цепи являются выходные геометрические параметры, являю-

щиеся следствием сборки. Эти параметры характеризуют относительное положение элементов (поверхностей и принадлежащих им характерных точек, линий) объекта производства. К их числу относятся, например, смещение центров контролируемых сечений от базовой оси, погрешность расположения одной из поверхностей одного из элементов конструкции по отношению к системе координат собранного изделия и т. п.

Рассмотрим формирование детерминированной геометрической модели сборки в следующей постановке.

Дано: в исходной системе выбрана система координат  $O_0 X_0 Y_0 Z_0$  (рис. 8), заданы  $k$  систем координат, каждая из которых задана в последующей.

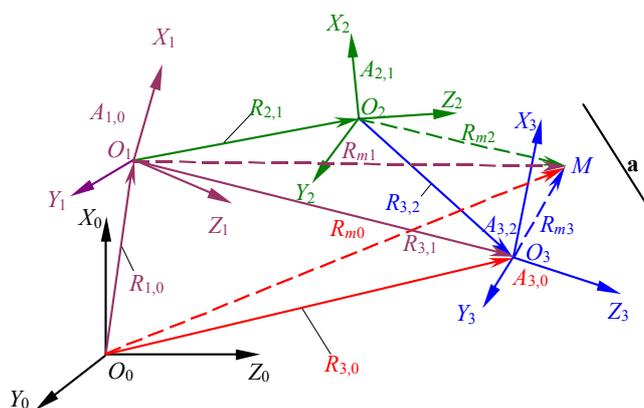


Рис. 8. К определению основных соотношений преобразования систем координат в модели сборки

Пусть каждая последующая система координат задана в предыдущей параметрами

$$R_{1,0}, A_{1,0}; R_{2,1}, A_{2,1}; \dots, R_{k,k-1}, A_{k,k-1}.$$

В последней системе координат задана точка  $M$  вектором  $R_{mk}$  и вектор  $a_k$ .

Требуется найти в выбранной системе координат  $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ :

- положение начала  $k$ -той системы координат;
- матрицу направляющих косинусов  $k$ -той системы координат;
- координаты точки  $M$ ;
- направляющие косинусы вектора  $a$ .

Воспользуемся методом математической индукции.

Положим  $k = 3$ . Искомые параметры определим последовательным переходом от 3-ей системы координат к выбранной  $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ .

Матрица направляющих косинусов 3-ей системы координат в выбранной системе координат  $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ :

$$A_{3,2} = A_{3,2},$$

$$A_{3,1} = A_{2,1} \cdot A_{3,2},$$

$$A_{3,0} = A_{1,0} \cdot A_{2,1} \cdot A_{3,2}.$$

Положение начала 3-ей системы координат в выбранной системе координат  $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ :

$$R_{3,2} = R_{3,2},$$

$$R_{3,1} = R_{2,1} + A_{2,1} \cdot R_{3,2},$$

$$R_{3,0} = R_{1,0} + A_{1,0} \cdot R_{2,1} + A_{1,0} \cdot A_{2,1} \cdot R_{3,2}.$$

Положение точки  $M$  в выбранной системе координат  $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ :

$$R_{m2} = R_{3,2} + A_{3,2} \cdot R_{m3},$$

$$R_{m1} = R_{2,1} + A_{2,1} \cdot R_{m2} = R_{2,1} + A_{2,1} \cdot R_{3,2} + A_{2,1} \cdot A_{3,2} \cdot R_{m3},$$

$$R_{m0} = R_{1,0} + A_{1,0} \cdot R_{m1} = R_{1,0} + A_{1,0} \cdot R_{2,1} + A_{1,0} \cdot A_{2,1} \cdot R_{3,2} + A_{1,0} \cdot A_{2,1} \cdot A_{3,2} \cdot R_{m3}.$$

Обобщая полученный результат на  $k$  звеньев, получим:

$$A_{k,0} = \prod_{i=1}^k A_{i,i-1},$$

$$R_{k,0} = \sum_{i=1}^k \left( \prod_{j=1}^{k-i} A_j \right) \cdot R_{k,i-1}.$$

Если в  $k$ -той системе координат задана точка  $M$  вектором  $R_{mk}$ , то ее координаты в выбранной системе координат будут:

$$R_{m0} = A_{k,0} \cdot R_{mk} + R_{k,0}.$$

Если в  $k$ -той системе координат задано направление единичного вектора  $a_k$ , то этому направлению в выбранной системе координат соответствует единичный вектор  $a_0$

$$a_0 = A_{k0} \cdot a_k.$$

В рассмотренной ранее модели сборки двух цилиндрических деталей предполагалось, что выбранной системой координат была система координат торцевой поверхности ОБП первого элемента конструкции. Такой выбор неудобен тем, что порядковый номер поверхности не совпадает с номером системы координат. Более общим случаем является перенос ОБП первого элемента в точку с координатами  $R_{1,0}$  и матрицей направляющих косинусов  $A_{1,0}$ .

Для разработанной детерминированной модели геометрии сборки может быть применено вероятностное моделирование, как и в [4], позволяющее моделировать как геометрию сборки, так и геометрию масс недеформируемых изделий любой сложности.

## Выводы

1. Разработаны детерминированные модели сопряжения реальных сопрягаемых поверхностей, имеющих номинальную форму плоскости и сборки деталей по реальным сопрягаемым поверхностям.
2. Получено адекватное детерминированное описание геометрии пространственных размерных цепей недеформируемых изделий с реальными поверхностями и геометрии масс собранных изделий.
3. Применяя к детерминированной модели сборки стохастическое моделирование можно адекватно определить как геометрию сборки, так и геометрию масс недеформируемых изделий любой сложности.

## Список литературы

1. Кашуба Л.А. Представление геометрии поверхностей изделий машиностроения // Системный анализ в науке и образовании: электрон. науч. журнал. – Дубна, 2011. – №1. – [Электронный ресурс]. URL: <http://www.sanse.ru/archive/19>. – 0421100111\0004.
2. Курс теоретической механики: Учебник для вузов / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др.; Под общ. ред. К.С. Колесникова – 2-е изд. Стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – С. 736.
3. Основной курс теоретической механики: Учебник для вузов /Н.Н. Бухгольц, Часть II. Динамика системы материальных точек. В переработке и с дополнениями С.М. Тарга – 5-е изд. Стереотип. – М.: Наука, 1969. – С. 332.
4. Кашуба Л.А. Алгоритм моделирования реальной геометрии детали // Системный анализ в науке и образовании: электрон. науч. журнал. – Дубна, 2011. – №3. – [Электронный ресурс]. URL: <http://www.sanse.ru/archive/21>. – 0421100111\0018.