

УДК 658.012.011.56

ФИЗИЧЕСКАЯ КОРРЕКТНОСТЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЗНАНИЙ И АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ СЛОЖНОСТЬ ОПИСАНИЯ РОБАСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ. Ч. 1.

**Ульянов Сергей Викторович¹, Решетников Геннадий Павлович²,
Мишин Андрей Анатольевич³**

¹ Доктор физико-математических наук, профессор;
PronetLabs;

ГОУ ВПО «Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,
Институт системного анализа и управления;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: ulyanovsv@mail.ru.

² Кандидат физико-математических наук, с.н.с., доцент института САУ;

ГОУ ВПО «Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,
Институт системного анализа и управления;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: Reshetnikov@JINR.ru.

³ Кандидат технических наук, доцент института САУ;

ГОУ ВПО «Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,
Институт системного анализа и управления;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: andrmish@yandex.ru.

Рассмотрены особенности и приведены оценки влияния множества неклассических логико-физических ограничений и информационных границ на эффективность разработки корректной математической модели, представляющей качественное описание динамического поведения нелинейного объекта управления. Описаны факторы, влияющие на полноту знаний (извлекаемых из физического эксперимента или математической модели) и на алгоритмическую сложность разрабатываемой модели объекта управления.

Ключевые слова: физические ограничения, информационные возможности, корректность моделей, нелинейные объекты управления, точность и робастность аппроксимации, информационный риск.

PHYSICAL CORRECTNESS OF KNOWLEDGE REPRESENTATION AND ALGORITHMIC COMPLEXITY DESCRIPTION OF ROBUST CONTROL OBJECT MODELS. PT. 1.

Ulyanov Sergey¹, Reshetnikov Gennadiy², Mishin Andrey³

¹ Doctor of Science in Physics and Mathematics, professor;
Dubna International University of Nature, Society, and Man,
Institute of system analysis and management;
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;
e-mail: ulyanovsv@mail.ru.

² Candidate of Science in Physics and Mathematics, associate professor of Institute of system analysis and management;
Dubna International University of Nature, Society, and Man,
Institute of system analysis and management;
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;
e-mail: Reshetnikov@JINR.ru.

³ *Candidate of Science in Engineering, associate professor of Institute of system analysis and management; Dubna International University of Nature, Society, and Man, Institute of system analysis and management; 141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19; e-mail: andrmish@yandex.ru.*

Main fundamental peculiarities and necessity of nonclassical logical, physical and information set constraints for correctness description of mathematical control object models that presented qualitative dynamic behavior of nonlinear control object are discussed. Factors that have the influence on the completeness of value knowledge (extracted from physical experiments or mathematical models) and on algorithmic complexity of developed model of control objects are described.

Keywords: physical constraints, information possibilities, model correctness, nonlinear control objects, accuracy and robust approximation, information risk.

Введение

Разработка логически непротиворечивых и адекватных (корректных) моделей объектов управления (ОУ) с целью объективного извлечения знаний для эффективной реализации интеллектуальных систем управления (ИСУ) новыми видами современной техники является одной из актуальных проблем для современного этапа развития теории и систем управления. Диапазон применения современных ИСУ включает в себя, например, от сложных макрообъектов управления типа космических летательных аппаратов (КЛА) до квантовомеханических моделей нанотехнологий (на микро- и наноуровнях) с необходимостью учета релятивистских и квантовых эффектов общей теории относительности и квантовой механики, соответственно [1-10].

Выбор корректной модели, в первую очередь ОУ минимальной алгоритмической сложности, является важной для практики задачей. Однако критерий минимальной алгоритмической сложности при выборе метода описания модели ОУ требует математического уточнения и физического обоснования.

Примером могут служить следующие реальные факты. Так при оценке возможных отклонений траекторий движения КЛА (как ОУ в задаче инерциальной навигации), вычисленных по классической теории, от траекторий движения планет Солнечной системы, экспериментально установленных радиолокационными методами, было выявлено следующее обстоятельство. Для гелиоцентрических расстояний планеты Марс отклонение экспериментальных данных составляет 150 км по отношению к расчетным данным, основанным на классических теориях движения планет, и для планеты Венера до 500 км¹, соответственно, а для моделей общей теории относительности с ошибкой измерения до 10 м (на протяжении времени наблюдений в 20 лет). Таким образом, модель движения планет с учетом релятивистских эффектов является корректной для навигации КЛА даже в пределах Солнечной системы, несмотря на широко распространенное интуитивное представление о пространственно-временном континууме в классической механике инерциальной навигации КЛА [5, 6].

Квантовые модели конденсата Бозе-Эйнштейна на основе нелинейной модели уравнения Шредингера (типа уравнения Питаевского-Гросса) для моделирования наноструктур или модели уравнения типа Гинзбурга-Ландау и мн. др. являются важным примером необходимости учета квантовых эффектов в математических моделях ОУ нанотехнологий и т.п. [1-3, 7-10].

Системный анализ разработки и проектирования ИСУ для многих моделей такого рода ОУ тесно связан с необходимостью *корректного* учета существующих физических ограничений. Ограничения на описание динамического поведения сложного физического ОУ (в частности, на предельную точность процессов измерений и управления; выбор модели пространства-времени и др.) накладываются известными физическими законами (из таких дисциплин как статистическая механика, теория относительности, термодинамика, теория информации и квантовая механика).

¹ Кислик М.Д., Колюка Ю.Ф., Котельников В.А. и др. Определение орбит Земли и Венеры, астрономической единицы и радиуса Венеры на основе радиолокационных наблюдений Венеры в 1962 – 1977 г. // ДАН СССР. – 1978. – Т. 241, № 5; *ibid* // ДАН СССР. – 1980. – Т. 255. – № 6.

Примером таких ограничений являются следующие: термодинамические ограничения на физическую реализацию математических моделей ОУ; различные типы обобщенных информационных соотношений неопределенности Гейзенберга; квантовые ограничения на пропускную способность передачи информации с учетом термодинамических флуктуаций; квантовые оценки предельных возможностей точности измерений параметров ОУ и процессов управления в нанотехнологиях и мн. др. Данные ограничения должны быть учтены в алгоритме проектирования объективных баз знаний (БЗ) в ИСУ [4].

На физическом уровне описания моделей ОУ повышение требований к точности управления в нанотехнологиях с учетом квантовых эффектов (например, исполнительных устройств – квантовых электромеханических систем [1]) приводит к логическому переходу в квантовую область процессов измерений и управления на атомно-молекулярном уровне [2, 3].

В свою очередь, происходит неизбежный пересмотр физических основ самой теории управления [4-10]. Аналогичный результат получен при разработке основ квантовой теории информации и квантовых вычислений, приведших к пересмотру аксиоматики моделей физических вычислений и логическому обобщению тезиса Тьюринга–Черча [11-14]. Многие из перечисленных проблем физической теории и систем управления рассматривались ранее в [4, 8, 15-17]. Были рассмотрены конкретные примеры и получены важные выводы о необходимости учета физической природы самого ОУ в структуре и предельных возможностей процессов управления.

Роль корректной интерпретации физической и математической моделей эксперимента², взаимосвязь с необходимым уровнем полноты извлекаемых при измерении знаний, алгоритмической сложности математических моделей ОУ и влияние перечисленных факторов на робастность формируемой БЗ в ИСУ (функционирующих в динамически изменяющихся непредвиденных ситуациях управления) в теории управления практически не исследовались.

Принципиальное значение при формировании объективных знаний имеет глобальная оценка функциональной реализуемости аппроксимации моделей при наличии логико-информационных границ и физических (термодинамических, квантово-релятивистских) ограничений на описание реальных нелинейных ОУ. На основе достоверности извлекаемого количества информации определяется информационная оценка приращения риска (статистической корректности) формируемого описания модели ОУ и границ её применимости.

Работа состоит из двух частей.

В Части 1 данной работы рассмотрена роль и особенности физических ограничений и информационных границ, которые рассматриваются с позиции специфики новой проблемы теорий искусственного интеллекта и процессов интеллектуального управления: возможности формирования объективных баз знаний (БЗ) в процессе проектирования робастных ИСУ путем извлечения знаний и ценной информации из динамического поведения модели самого физического ОУ и интеллектуального регулятора. Корректное описание модели ОУ и среды его функционирования существенно влияет на качество формируемой БЗ и, таким образом, на эффективность применения разрабатываемых структур ИСУ.

Примеры формирования объективных БЗ на основе оптимизатора БЗ с использованием технологий мягких вычислений в различных условиях функционирования ОУ приведены в [18-20] данного тематического номера.

В Части 2 описаны, в частности, неклассические логические и квантовые эффекты, влияющие на описание модели ОУ и оптимальное управление динамическими системами. Дана информационная оценка (нижних и верхних) границ риска, возникающего из-за необходимости учета ограниченных возможностей информированности исследователя о свойствах ОУ и влияющего на качество разработки математической модели исследуемой системы. Приведены термодинамические условия на интерпретацию физической реализуемости (инвариантных к возмущениям) динамических систем управления, на точность аппроксимации модели ОУ и полноту формирования робастных БЗ в ИСУ с глубинным представлением знаний.

Поясним некоторые из перечисленных фактов примером.

² Пытьев Ю. П. Математические методы интерпретации эксперимента. – М: Высшая школа, 1989.

1. Информационные оценки приращения риска и корректности описания статистических моделей ОУ

Рассмотрим типовую ситуацию идентификации слабо формализованной модели структуры ОУ в виде случайных параметров $x = (x_1, \dots, x_n)$ в присутствии (мешающего или маскирующего) параметра θ . Допустим, что экспериментально (в статистическом смысле) для вектора измеряемых случайных величин $x = (x_1, \dots, x_n)$ и неизвестного параметра θ определена функция плотности распределения вероятностей параметров модели в виде $\tilde{p}(x, \theta)$ (аппроксимирующая в общем случае неизвестную истинную функцию $p(x, \theta)$). Информационное расхождение (дивергенция) между функциями распределения вероятностей определяется мерой Кульбака–Лейблера в виде $I(p : \tilde{p}) = \iint p(x, \theta) \ln \frac{p(x, \theta)}{\tilde{p}(x, \theta)} dx d\theta$. По заданным функциям потерь $W(\tilde{W})$ и распределения вероятностей $p(x, \theta) [\tilde{p}(x, \theta)]$ вычисляется усредненный риск в виде:

$$r(W^2)(\tilde{r}(\tilde{W}^2)) = \iint W^2 p(x, \theta) dx d\theta \left(\iint \tilde{W}^2 \tilde{p}(x, \theta) dx d\theta \right).$$

Тогда информационная оценка приращения риска (снижения точности определения параметров модели ОУ из-за редукции аппроксимации истинной функции плотности распределения вероятностей, как меры корректности модели) определяется следующим выражением³:

$$-\sqrt{r(W^2)2I(\tilde{p} : p)} \leq (\delta = \tilde{r} - r) \leq \sqrt{\tilde{r}(W^2)2I(p : \tilde{p})}.$$

Таким образом, (верхняя и нижняя) оценка корректности модели в виде приращения риска $(\delta = \tilde{r} - r)$ из-за редукции данных измерения при мешающих параметрах в процессах измерения носит *нелинейный* характер зависимости от информационной дивергенции – расхождения (меры информированности исследователя) оценок качества модели ОУ.

Приведенный результат означает, что исходного количества информации и интуитивного представления в виде информированности исследователя может оказаться недостаточным для формирования корректной модели ОУ, а сформированная модель содержит структурные элементы неопределенности. Следовательно, интуитивный инженерный подход к разработке приближенных (расчетных) моделей ОУ, носящий зачастую вид линейной зависимости от количества извлекаемой информации о параметрах структуры ОУ, может привести к существенному расхождению в точности и с необходимым качеством формирования корректного описания ОУ. Данный вывод усиливается при исследовании моделей квантовых и релятивистских ОУ.

Такие модели для корректной интерпретации требуют привлечения нестандартных (квантовой и релятивистской) логик, обладают многими «парадоксами» логического вывода и суждений⁴ и связаны с решением т.н. проблемы Вундгейлера корректного описания моделей (см., в Части 2 подробный анализ особенностей проблемы Вундгейлера). Приведенные примеры показывают, что помимо физических ограничений, на корректность описания и достоверность извлеченных знаний из модели ОУ

³ Вывод был получен в рамках модели информационной теории управления, разработанной группой акад. Б.Н. Петрова, в серии работ за период 1970-1980гг. (см., Петров Б.Н., Уланов Г.М., Ульянов С.В., Хазен Э.М. Информационно-семантические проблемы управления и организации. – М.: Наука, 1977; см. в частности, Уланов Г.М., Ульянов С.В., Хазен Э.М. Информационные оценки для риска в задачах обработки больших массивов информации // ДАН СССР. – 1973. – Т.210. – № 2. – С. 291-293. Работа была одобрена на семинаре «Статистический вывод и алгоритмическая сложность конечных объектов» в МГУ в 1972 г. и представлена в редакцию Б.Н. Петровым с рекомендацией А.Н. Колмогорова). Пользуясь возможностью, один из авторов (СУ) приносит глубокую благодарность своим учителям Б.Н. Петрову и А.Н. Колмогорову за поддержку работы и долголетнее сотрудничество в области фундаментальных основ теории информации и управления.

⁴ На необходимость использования таких видов нестандартных нечетких логик при исследовании вопроса корректности и физической реализуемости математических моделей ОУ было указано в работе Ульянова С.В. Модели квантово-релятивистских нечетких логик в интеллектуальных системах // Труды 2^{ой} Всесоюзной конференции по искусственному интеллекту. – М.: ВЦ АН СССР, 1990. – Т.2. – С. 170-173.

существенное влияние оказывают также и информационные границы на применимость разработанной модели.

В теории систем управления одним из эффективных подходов снижения риска принятия решения (от неполноты описания модели ОУ) является разработка структур ИСУ. Данные структуры реализуют принцип компенсации неопределенности описания модели ОУ за счет повышения интеллектуальности традиционных систем управления. В частности, компенсация информационной неопределенности осуществляется за счет повышения интеллектуальности нижнего исполнительского уровня в виде соответствующих структур интеллектуальных регуляторов и соответственно спроектированных самоорганизующихся робастных БЗ [21].

Рассмотрим некоторые важные особенности разработки и проектирования ИСУ, а также возможные формы обучения специалистов в области интеллектуальных систем и системного анализа.

2. Особенности разработки ИСУ

Отметим некоторые из упомянутых особенностей разработки ИСУ, использующих процесс извлечения, обработки и формирования объективных знаний из динамического поведения ОУ.

А. Общим для упомянутых ОУ (описываемых в различных физических шкалах) является функционирование во внешней и внутренней средах с высокими уровнями неопределенности исходной информации, целей управления и описания источников возмущения. Перечисленные факторы и их сочетания рассматриваются как источники *непредвиденных* ситуаций управления. В системной интеллектуальной инженерии (Intelligent System of Engineering Systems) данные ОУ являются актуальной составной частью современной теории и практики ИСУ, основу проектирования которых составляют технологии мягких и квантовых вычислений [21]. При этом квантовые и информационно-термодинамические ограничения на точность процессов измерений приводят к необходимости рассмотрения границ достижимости максимально возможного (допустимого) количества извлекаемых знаний⁵ о системе [22] и на количество ценной информации, необходимые для формирования оптимального управления квантовой системой. Данный эффект следует из соотношения некоммутативности измеряемых одновременно наблюдаемых величин в квантовой механике и соответствующего логического распределения (trade-off) между точностью, квантовой дополненностью и количеством извлекаемой (из измерения) информации Фишера и Шеннона [21-24]. Приведенный пример отражает необходимость введения в процесс разработки моделей ОУ прямой физической аналогии «квантовый ОУ – квантовые вычисления». Такая аналогия была предложена Маниным и Фейнманом для преодоления трудностей логических парадоксов и «проклятия размерности» при моделировании динамического поведения квантовых систем. На этой основе применение квантовой системы управления [2, 3, 15-17, 25-31] является логическим обобщением исследования наноструктур⁶.

Б. Алгоритмическая оценка уровня корректности моделей и процессов извлечения объективных знаний, и сложности процессов проектирования на их основе БЗ является неотъемлемой частью технологии проектирования гарантированного качества правил логического вывода. При проектировании систем управления в этом случае приходится учитывать не только известные ограничения, но и новые физические явления и эффекты. Так процесс формирования требуемых параметров наноструктур типа квантовых кораллов или точечных (игольчатых) структур осуществляется квантовым управлением самоорганизации [32-34] за счет корреляционных взаимодействий и переноса информации на микро (нано) уровнях [35-37]. Поэтому для практической реализации квантового подхода в процессе проектирования эффективных алгоритмов принятия решений и систем управления в условиях ограничений на количество доступной информации также требуется повышение соответствующего уровня интеллектуальности [9, 10, 12], позволяющее включить в формируемые законы управления новые квантовые эффекты и явления.

В. При разработке ИСУ для нанотехнологий используются новые принципы информационных технологий интеллектуальных вычислений и систем искусственного интеллекта с учетом квантовых

⁵ См., например, Jacobs K. Simple formula for pooling knowledge about a quantum system // Physical Review. – 2005. – Vol. A72. – № 4. – P. 044101.

⁶ Brif C., Chakrabarti R, Rabitz H. Control of quantum phenomena: past, present and future // New Journal of Physics. – 2010. – Vol. 12. – № 7. – P. 075008.

и релятивистских эффектов и ограничений [6, 21, 38]. В частности, технология классических мягких вычислений на основе генетического алгоритма (ГА) и адаптивных алгоритмов обучения нашла эффективное применение в задачах оптимального управления квантовыми ОУ [3, 9, 10, 33, 38-45]. Например, такой подход особенно эффективен при решении задач квантового управления квантовыми мобильными роботами [21, 38, 45] на основе робастных ИСУ с использованием прорывных инновационных технологий интеллектуальных вычислений (подробности см. на Web-странице сайта <http://www.qcoptimizer.com/>) и квантовых стратегий принятия решений [46] в условиях риска и непредвиденных (нештатных) ситуаций управления [21]. Основу такого подхода составляет информационный синергетический эффект самоорганизации знаний за счет применения квантовой корреляции, скрытой в классических состояниях ОУ.

Примечание 1: Смежные исследования. Попытка исследования принципов формирования знаний и логического вывода в интеллектуальных системах с учетом пространственно-временных логических отношений (без интерпретации физических особенностей моделей пространственно-временных континуумов, например, теории относительности, и квантовых эффектов) на основе классической (нечеткой) логики были исследованы в середине 80-х прошлого столетия⁷. Роль и оценка влияния физических эффектов (в теории искусственного интеллекта, информатики, теории сложности алгоритмов, теории моделей процессов и систем управления и др.) были даны в независимых (более ранних) исследованиях⁸. В частности, к ним относятся теория игр, семантика и когнитивные процессы познания, лингвистические процессоры обработки естественного языка, интерпретации физических теорий и моделей измерений, обработки и распознавания изображений, теории вычислений и алгоритмов, робототехника и мехатроника [46-66] и мн. др. области.

Работы [9, 10, 12, 21, 67] посвящены актуальному вопросу исследования эффективного применения мягких и квантовых вычислений в проектировании робастных ИСУ в непредвиденных ситуациях управления. Описаны подробно особенности учета физических ограничений для корректного математического описания моделей ОУ, влияющих на качество формирования баз знаний в ИСУ и роль квантовых вычислений при проектировании робастных систем управления. Приведена классификация и дано описание основных квантовых алгоритмов. Рассмотрены особенности квантовой нечеткой логики, вызывающие ряд трудностей при практическом описании применения мягких и квантовых вычислений. На конкретных примерах поясняется роль и специфика учета квантовых эффектов в логике моделирования интеллектуальных процессов управления. Даны описания квантовых эффектов и приведены сведения из теории квантовых вычислений, используемые в информационной технологии проектирования робастных БЗ.

Использование квантовых стратегий в процессах обработки классической информации дает возможность извлечения дополнительных информационных ресурсов, скрытых в классических ОУ, для расширения их эффективного применения в процессах принятия оптимальных решений [67-69]. Данные результаты позволили более полно и глубоко понять решение следующей трудной и принципиально важной для теории и систем управления проблемы [6, 7]: *определение роли и влияния квантовых и релятивистских эффектов на повышение уровня робастности проектируемых интеллектуальных процессов управления в непредвиденных и критических ситуациях управления.*

Положительный эффект повышения уровня робастности достигается, за счет метода извлечения дополнительной квантовой информации, скрытой (и только частично доступной) в корреляционных классических состояниях законов управления и спроектированных только на основе классических методов технологии мягких вычислений [21, 68].

В Части 2 настоящей работы обсуждается разработка данного метода для применения в решении проблемы формирования робастных БЗ на основе квантовых стратегий принятия решений в игровых ситуациях и неопределенности ситуаций управления.

⁷ См., например, Кандрашина Е.Ю., Литвинцева Л.В., Поспелов Д.А. Представление знаний о времени и пространстве в интеллектуальных системах. – М.: Физматгиз, 1988. Авторы благодарят Л.В. Литвинцеву за многолетнее обсуждение проблемы формирования объективных знаний в интеллектуальных системах из поведения динамических систем на основе методов качественной физики.

⁸ См., например, Ульянов С.В. Физические и информационные модели управления нелинейными релятивистскими и квантовыми системами // Тезисы докладов IX Всесоюзного совещания по проблемам управления. – М.: Цахкадзор, ИПУ. – 1983. – С. 94; и работы [4-6].

3. Цель работы и постановка задачи

Данная работа выполнена в рамках разработки прорывных технологий для инновационных образовательных и исследовательских программ Института Системного Анализа и Управления [ИСАУ] Международного университета природы, общества и человека «Дубна» с целью подготовки магистров и специалистов в области разработки наукоёмких квантовых интеллектуальных ИТ (под общим руководством академика РАН, д.т.н., профессора Е.Н. Черемисиной) и Центра Управления Знаниями ИСАУ (руководитель профессор В.Н. Добрынин).

Решается следующая задача: предоставить магистрам, аспирантам и специалистам-разработчикам широкого профиля (в области системного анализа, прикладной информатики, систем управления и нанотехнологий) доступное и информативное описание физических эффектов и функциональных критериев, влияющих на корректность разработки и физическую реализуемость математических моделей ОУ и на проектирование робастных ИСУ, используемых в нанотехнологиях разработки интеллектуальных материалов, спинтронике, атомтронике, одноэлектронике, квантовом компьютере и т.п.

Выявленные характерные особенности указанных эффектов учитываются при моделировании динамического поведения исследуемого ОУ и используются в алгоритме управления процессом извлечения, обработки и формирования объективных знаний без использования экспертных оценок. Технологии интеллектуальных вычислений являются платформой реализации данного процесса и разработки инструментария квантового алгоритма управления самоорганизацией знаний ИСУ.

Исследования [9, 10, 21, 67, 68] показали эффективность применения разработанной технологии интеллектуальных квантовых и мягких вычислений в решении задачи проектирования робастных ИСУ в указанных условиях непредвиденных ситуаций управления.

Примечание 2. Данная статья включает в себя также важный (и необходимый для практики) методологический аспект. Работа написана по результатам опубликованных (на английском, итальянском и японском языках), переработанных и дополненных многолетних университетских лекций одного из авторов (С.У.) (textbooks, утвержденных Министерством образования и науки Италии и рекомендованных комиссией ЮНЕСКО для университетов 25 стран ЕС) [апробированных в университетах США (CA University, San Diego), Японии (University of Electro-Communications, Tokyo и Nagoya University, Japan) и Италии (Universita di Milano, Crema)] для университетов РФ (коммерческие публикации лекций доступны частично на Web-странице сайта: <http://www.qcoptimizer.com/>). Учтены многочисленные вопросы и ответы студентов на экзаменационные вопросы, результаты самостоятельной работы и результатов НИР студентов и рекомендации дискуссий на международных семинарах и конференциях. Следуя многочисленным просьбам, авторы обобщили также накопленный в работах [6, 7, 9, 10, 21] опыт с целью подробного описания (и доступного для специалистов в области теории и систем управления) физических и математических основ интеллектуальных квантовых мягких вычислений, используемых для проектирования робастных ИСУ в непредвиденных ситуациях управления.

Примечание 3. Необходимость данного описания объясняется во многом трудностями восприятия квантовых и релятивистских эффектов, результатов квантовой теории информации и возникающих при физической интерпретации логических «парадоксов», противоречащих выводам классической логики. Так, например, трудное для интерпретации экспериментально установленного явления дефекта массы (две сталкивающиеся частицы малой массы и ограниченной энергии в неподвижной системе отсчета (системе покоя) выделяют энергию, на порядки превосходящую сумму энергий подсистем – явление взрыва атомной бомбы) как релятивистского эффекта или разъяснение самоорганизации запутанных состояний (две подсистемы, находящиеся в хаотическом состоянии с максимальными энтропиями, образуют чистое состояние с нулевой энтропией) как квантового эффекта теории информации требуют привлечения новых понятий, таких как синергетический эффект. Например, новый информационный синергетический эффект самоорганизации знаний [68] заключается в приобретении системой требуемого свойства робастности за счет информационного (а не прямого физического) взаимодействия не робастных БЗ, т.е. появления нового качества в объединенной системе, отсутствующего во взаимодействующих подсистемах, составляющих единую систему. При этом, подчеркнем еще раз, подсистемы не содержат нового качества (робастности), содержащегося в составной системе и сформированного из качеств данных подсистем (не робастности). Данный эффект реализуется процессом переноса скрытой квантовой информации и является следствием формирова-

ния виртуальных каналов передачи квантовой информации между классическими состояниями сигналов управления. Неклассические физические свойства нелокальности суперпозиции с квантовой корреляцией между подсистемами как математического объекта приводят к парадоксу нарушения элементарного арифметического правила⁹ в виде $2 \neq 1+1$. Информационный анализ неопределенности в состоянии составной квантовой системы позволяет четко разъяснить наличие необычных (неклассических) свойств: игнорирование в ней части информации о состоянии подсистемы приводит к увеличению квантовой неопределенности. В результате, в «части» (подсистеме) количества квантовой неопределенности больше, чем в «полной» (составной) квантовой системе. Такой эффект отсутствует в классических системах в силу свойств меры информационной энтропии Шеннона.

Примечание 4. Классическая Булева логика не может объяснить формирование нового качества в составной системе, не содержащегося в подсистемах. Отметим, что объяснение средствами квантовой логики достигается за счет отказа от аксиомы дистрибутивности классической логики или от закона исключения третьего (в квантовой нечеткой логике). При этом традиционно используется основной тезис фон Неймана: «Квантовым уравнениям, описывающим движение квантовой частицы, может быть сопоставлена адекватная логическая система...». Расширенный (уточненный) вариант этого тезиса можно сформулировать следующим образом: физическое явление, имеющее пространственно-временную динамику, может быть описано как в рамках динамических уравнений движения, так и адекватно в виде логико-динамической системы (на логическом уровне причинно-следственных связей). В дальнейших исследованиях было установлено, что эта квантовая логическая система отличается от классической логики. Так в трехзначной квантовой логике используется третье значение истинности (неопределенный). Поскольку оба дизъюнкта истинной дизъюнкции могут быть ложными, здесь возникает асимметрия между дизъюнкцией и конъюнкцией, т.е. законы дистрибутивности в общем случае не выполняются. Такие эффекты нашли применение при решении сложных задач [21], например, принятия решений на аукционе ценных бумаг, деловых играх и породили квантовую экономику. Авторский опыт (С.У. за период 1972-2011гг.) чтения лекций по теории относительности, квантовой механики, термодинамике, мягким и квантовым вычислениям (в области интеллектуальной робототехники и высоких ИТ проектирования ИСУ для нанотехнологий и квантового управления) [4-6, 9, 10, 12, 21] показал также следующее¹⁰. Трудности изучения и применения квантовых вычислений специалистами в области теории и систем управления носят часто психологический и инерционный когнитивный характер ассоциативного (порой негативного) восприятия идей и принципов квантовой механики или теории относительности¹¹, основанного на механических аналогиях восприятия и интерпретации явлений из классической физики. Отказ от привычных аналогий носит порой драматичный характер [5]. Данные факты объясняются многообразием моделей самой квантовой механики [70] и отсутствием в отечественной и зарубежной литературе проблемно-ориентированных методологических учебных пособий (см., например, дискуссию в [71, 72]) с конкретными наглядными инженерными приложениями¹², иллюстрирующими их практическую эффективность, например, для решения задач теории и проектирования систем управления [6, 8, 14-16, 25, 29-31].

В данной статье сделана попытка восполнить указанный в Примечании 2 пробел и показать практическое применение указанных подходов в макро-, микро- и нанотехнологиях.

4. Корректность и полнота описания моделей ОУ с учетом форм аппроксимации и физических ограничений

В теории и процессах проектирования систем управления в настоящее время большое внимание уделяется выявлению роли и эффективному применению робастных ИСУ в интенсивном развитии и качественном совершенствовании современных высоких ИТ интеллектуального управления физиче-

⁹ Shih Y. The physics of $2 \neq 1+1$ // LANL E-print arXiv: quant-ph / 0706.2097v2. 2007. 44p. (доступно <http://xxx.lanl.gov>) ; Voss D. One plus one is not two // Science. – 1996. – Vol. 274. – № 5287. – P. 527.

¹⁰ Предварительные результаты и выводы работы [7] были представлены в [5, 6] и в работе Ульянов С.В. Релятивистские и квантовые модели физических объектов и интеллектуальных процессов управления // Итоги Науки и Техники (Н и Т). Сер. Техническая кибернетика. – М.: ВИНТИ АН СССР, 1986. – Т. 35.

¹¹ См., например, Гольденблат И.И., Ульянов С.В. Релятивистская кинематика и элементы квантовой механики (Учебное пособие для слушателей высших военных учебных заведений). – М.: МО СССР, 1977.

¹² McKagan S. B., Perkins K. K., Wieman C. E. Deeper look at student learning of quantum mechanics: The case of tunneling // Physical Review Special Topics – Physics Education Research. – 2008. – Vol. 4 – № 2. – P. 020103.

ским экспериментом и проектированием физических ОУ. Исследования и практика показали следующее: разработка, развитие и реализация эффективных высоких наукоемких ИТ (создаваемых в различных областях науки и техники) неразрывно связаны с необходимостью развития и повышения уровня интеллектуальности используемых процессов и систем управления, объективно учитывающие в законах управления контекстуально-зависимые физические эффекты, ограничения и информационные границы, реально существующие в конкретных моделях ОУ.

Примечание 5. В качестве примера в данной статье рассматривается проблема поиска эффективного решения задач интеллектуального управления сложными физическими ОУ, алгоритмически неразрешимых классическими видами исчислений.

При этом теория и практика систем управления сталкивается с новыми проблемами, такими как учет квантовых, релятивистских и термодинамических ограничений, ранее не рассматриваемых в классическом варианте теории управления [4, 6]. Учет физических особенностей ОУ позволяет в ряде случаев повысить качество описания и корректность соответствующих моделей [7].

Приведем несколько примеров (слабо освещенных или недостаточно известных среди специалистов в области теории и систем управления), наглядно поясняющих данное утверждение и позволяющих пояснить отличие разрабатываемого подхода от известных результатов¹³.

Примечание 6. Отметим, что данные примеры являются базовыми для программы «Теория и математические методы системного анализа и управления техническими системами» и курса лекций «Интеллектуальное робастное управление в макро-, микро- и нанотехнологиях» в ИСАУ.

В системном анализе хорошо известен факт, что в общем виде модель является приближением (с неизвестной, в общем случае, ошибкой аппроксимации) физического (реального) конечного ОУ. Менее известно, как оценить точность применяемого способа аппроксимации, и ещё меньше – как доказать корректность (например, по нескольким заданным и часто плохо определенным критериям) и полноту разработанной модели (в смысле информативности представления описания свойств заданного физического ОУ для достижения цели управления).

Ошибка аппроксимации может иметь различной природы характер: 1) ошибки численного интегрирования дифференциального уравнения, описывающего движение нелинейного ОУ; 2) геометрического характера в виде некорректного выбора модели пространства-времени, например, Евклидова пространства вместо пространства Римана, Лобачевского или Финслера; 3) физического характера в виде выбора модели описания ОУ на макроуровне вместо рассмотрения модели ОУ на микроуровне; 4) логического характера в виде выбора модели интерпретации результатов физического (или мысленного) эксперимента в рамках Булевой логики, вместо применения методов квантовой или релятивистских логик, например, для интерпретации нелокальных свойств явления телепортации или парадокса ЭПР и др. В системном анализе поиск решения таких задач относится к алгоритмически неразрешимой массовой проблеме¹⁴.

Рассмотрим некоторые из перечисленных ошибок аппроксимации, влияющих на корректность модели ОУ, представляющих самостоятельный интерес.

4.1. Точность и робастная аппроксимация моделей нелинейных ОУ

Вопросы робастной аппроксимации моделей нелинейных ОУ, нечувствительной к ошибке (неточности аппроксимации), обсуждаются в теории и системах управления, по существу, начиная с самого начала становления теории автоматического регулирования – ТАР. Этот факт связан с необходимостью анализа и синтеза нелинейных моделей исполнительных устройств типа сервомеханизмов, электромеханических и других систем (см. выше сноску 3).

Требования оценки корректности и точности линеаризации нелинейных моделей, с одной стороны, и необходимость определения границ точности аппроксимации непрерывных моделей дискрет-

¹³ См., например, Пайерлс Р. Построение физических моделей // УФН. – 1983. – Т. 140. – № 2. – С. 315-332.

¹⁴ Петров Б.Н., Уланов Г.М., Ульянов С.В., Сложность конечных объектов и информационная теория управления // Итоги Н и Т. Сер. Техн. Кибернетика. – М.: ВИНТИ АН СССР. – 1979. – Т. 11. – С. 77-147.

ными аналогами (типа моделей численного интегрирования дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты), с другой стороны, поставили вопрос о выборе, полноте и корректности модели ОУ¹⁵.

В настоящее время разработано множество моделей производных функций (типа в конечных разностях; стохастические производные в смысле Ито, Стратоновича, Скорохода и т.п.; производные Ли, Гато, Фреше, производные по направлению на многообразиях типа Римана; производные с погрешностями измерений в классической и квантовой механике; нечеткие производные; дробные (fractional или noninteger) производные и др.).

Выбор модели производной определяется смысловым содержанием исследуемой задачи и формирует качество получаемого численного решения. Рассмотрим несколько поучительных примеров такого рода оценок аппроксимации производных дифференцируемых функций (слабо освещенных в университетских курсах численного интегрирования дифференциальных уравнений), необходимость в которых возникает в инженерных приложениях теории и систем управления при моделировании динамического поведения ОУ или проектировании оптимальных САУ, например, на основе градиентных методов.

4.1.1. Модели производных дифференцируемой функции и точность аппроксимации конечными разностями

Допустим, что задана дифференцируемая функция $f(x)$ на отрезке (a, b) . Производная $f'(t)$ функции в фиксированной точке $t \in (a, b)$ в математическом анализе определяется, как известно, в следующем виде: $f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$. Величина h , $0 < h \leq 1$, называется шагом (интервала, сетки и т.п.) аппроксимации и может принимать постоянное или переменное значения. Дробное отношение $g(t, h) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$, аппроксимирует производную $f'(t)$ на множестве (mesh или grid) $\mathbb{T} = \{t, t \pm h, t \pm 2h, \dots\} \cap (a, b)$ и называется *прямой разностью первого порядка*.

По аналогии *прямой разностью второго порядка* называется величина

$$\frac{g(t+h, h) - g(t, h)}{h} = \frac{f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)}{h^2}, \quad 0 < h \leq 1,$$

которая аппроксимирует вторую производную $f''(t)$ функции $f(t)$ на множестве $\mathbb{T} = \{t, t \pm h, t \pm 2h, \dots\} \cap (a, b)$. Прямая (forward), обратная (backward) и центрированная (central) конечные разности определяются как

$$D_+ f(t_k) = \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{t_{k+1} - t_k}, \quad k = 0, 1, \dots, m; \quad D_- f(t_k) = \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}, \quad k = 1, \dots, m+1;$$

$$\delta f(t_k) = \frac{f(t_{k+1}) - f(t_{k-1}))}{t_{k+1} - t_{k-1}}, \quad k = 1, \dots, m, \quad (1)$$

соответственно. Величина $h_k = t_{k+1} - t_k$, $t_{k+1} > t_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$, $m \geq k \geq 0$, называется k -th размером шага (интервала, таблицы, сетки и т.п.) аппроксимации. Если $h_k = h > 0$, то множество \mathbb{T} называется с постоянным шагом аппроксимации; в противном случае множество \mathbb{T} называется с переменным шагом аппроксимации. Отметим, что для общего случая вычисления второй производной функции с переменным шагом аппроксимации может быть использована комбинация следующего вида:

¹⁵ См., например, Pearson P.K. Selecting nonlinear model structures for computer control // J. of Process Control. – 2003. – Vol. 13. – №1. – Pp. 1-26.

$$D_2 = \frac{D_+f(t_k) - D_-f(t_k)}{(h_{k-1} + h_k)/2}, t_k \in \mathbb{T}. \quad (2)$$

Для заданного вида шага интегрирования выполняется условие следующего вида: $D_+f(t_k) = -D_-f(t_k)$, $k = 0, 1, \dots, m$, а центрированная разность для постоянного шага аппроксимации может рассматриваться как среднеарифметическое прямой и обратной разностей.

Сравним модели производной из (1). Так, например,

$$D_+u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \text{ и } \delta u(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$

для производной du/dx в точке x различаются приближенными выражениями, и в первой схеме производная заменена менее точным выражением, чем во втором случае.

Действительно, заменим $u(x+h)$ и $u(x-h)$ их теилоровскими разложениями:

$$u(x+h) = u(x) + u'(x)h + u''(x)\frac{h^2}{2} + u'''(x)\frac{h^3}{6} + O(h^4),$$

$$u(x-h) = u(x) - u'(x)h + u''(x)\frac{h^2}{2} - u'''(x)\frac{h^3}{6} + O(h^4)$$

Пользуясь этими разложениями, получим:

$$D_+u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) + u''(x)\frac{h}{2} + O(h^2),$$

$$\delta u(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'(x) + u'''(x)\frac{h^2}{6} + O(h^4),$$

т.е., в первом случае имеем аппроксимацию производной лишь с первым порядком точности, а во втором – со вторым порядком. Обоснование корректного выбора модели аппроксимации производной конечной разностью связано с вопросом взаимосвязи между точностью аппроксимации, устойчивостью и сходимостью, а также влиянием выбора нормы для соответствующих функций.

Известно, что из аппроксимации и устойчивости следует сходимость, а сами понятия сходимости, аппроксимации и устойчивости имеют смысл, если тем или иным способом введены нормы, которым принадлежат соответственно решения разностной схемы для приближенного вычисления решения¹⁶.

Рассмотрим вычисление в среде Matlab[®] трех тригонометрических функций: $y_1 = \sin(2\pi t)$, $y_2 = -0,5 \sin(4\pi t)$, и $y_3 = -0,8 \sin(\pi t)$ методом аппроксимации длин дуги трапециями на множестве $\mathbb{T}_1 = \{t_k = k \times h\}_{k=0}^{11}$, $h = 1/11$ с постоянным шагом аппроксимации и на множестве $\mathbb{T}_2 = \{t_0 = 0, t_{k+1} = t_k + h_k, k = 0, 1, \dots, 10\}$ с переменным шагом аппроксимации h_k , который вычисляется по стандартной процедуре проектирования результата вычисления длины дуги (в среде Matlab[®]) на t -ось.

На рис. 1 показаны результаты аппроксимации вычисления и сравнения точности стандартной аппроксимации с аналитическим видом указанных трех функций.

Как видно из приведенных результатов, аппроксимация является корректной по точности вычисления и не различается шагом аппроксимации.

Возникает вопрос: *корректно ли применение аппроксимаций вида (1) к вычислению производных функции и как оценить точность аппроксимации как меру корректности применяемой модели?*

¹⁶ Годунов С.К., Рябенкий В.С. Разностные схемы: Введение в теорию. – М.: Наука, 1977.

Допустим, что определены функции $y = f(t)$ и $y = g(t)$ на множестве \mathbb{T} . Функция $g(t)$ рассматривается как аппроксимация функции $f(t)$ и, если $|f(t) - g(t)| = O(h^p)$, $t \in \mathbb{T}$, где $h = \max_{0 \leq k \leq m} h_k$, то аппроксимация в момент t осуществляется с точностью порядка p по отношению к размеру шага h . С точки зрения корректности аппроксимации функция $g(t)$ состоятельна, если и только если (iff) $p > 0$.

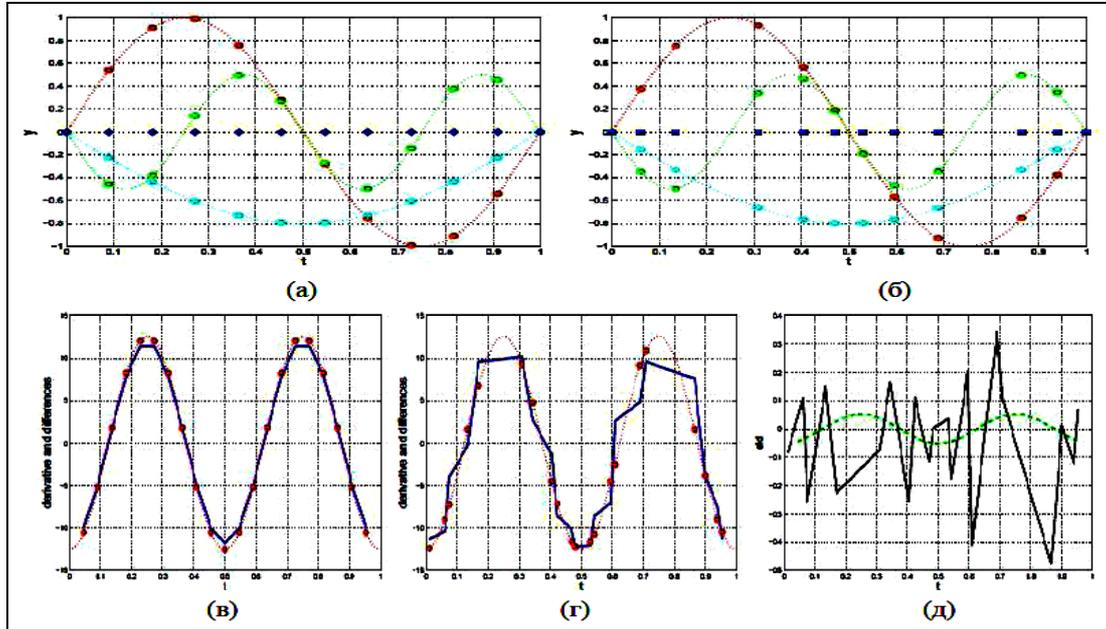


Рис. 1. Сравнение результатов аппроксимации вычисления функций y_1, y_2 и y_3

(а) – постоянный шаг интегрирования; (б) – переменный шаг интегрирования; (в) – центрированная разность с равномерным шагом; (г) – неравномерный шаг; (д) – локальная нормированная разность (зеленый цвет для равномерного и черный для неравномерного шагов, соответственно)

Рассмотрим определенные на множестве \mathbb{T} функции

$$f = \{f_0, f_1, \dots, f_{m+1}\}, g = \{g_0, g_1, \dots, g_{m+1}\},$$

функция g рассматривается как аппроксимация f .

Определение 1: Локальная нормированная разность (sld – scaled local difference) между двумя функциями в точке t_k определяется как

$$sld(f, g)_k = \frac{f_k - g_k}{a}, \quad k = 0, 1, \dots, m+1, \quad a = \max_{0 \leq k \leq m+1} |f_k| > 0.$$

Определение 2: Глобальный нормированный индикатор (sgei – scaled global indicator) определяется как $sgei(f, g) = \max_{0 \leq k \leq m+1} |sld(f, g)_k|$.

Отметим, что вышеприведенные определения отличаются от стандартных определений локальной и глобальной относительных ошибок, в которых знаки редко учитываются. Так, значение $sld(f, g)_k$ отражает информацию не только о величине нормированной относительной ошибки, но и направление изменения ошибки, т.е. когда g_k больше или меньше f_k . Данный индикатор важен при исследовании задачи аппроксимации осцилляций.

Функция $sgei(f, g)$ показывает нормированную максимальную оценку ошибки и эффективно используется в структуре аппроксимации.

Рассмотрим пример вычисления первой разности δf для функции $y' = -4\pi \cos(4\pi t), 0 \leq t \leq 1$.

На рис. 1 (в, г, д) показаны результаты вычисления первой производной y' согласно аналитическому выражению и центрированной разности с равномерным шагом (рис. 1, в); для неравномерного шага результат сравнения представлен на рис. 1, г; значение локальной нормированной разности (зеленый цвет для равномерного и черный для неравномерного шагов, соответственно) показано на рис. 1, д. При этом значение глобального нормированного индикатора равно $sgei \approx 0,0535$ для равномерного шага и $sgei \approx 0,4759$ для неравномерного шага, что в 9 раз выше по отношению к равномерному случаю.

Таким образом, модель дифференцирования обладает высокой чувствительностью, а её корректность зависит от выбора типа шага интегрирования.

Рассмотрим теперь случай вычисления второй производной $y'' = (4\pi)^2 \sin(4\pi t), 0 \leq t \leq 1$ для случая $D_+(D_+f)$.

На рис. 2, а показаны результаты сравнения вычислений с аналитическим результатом, аналогично с рис. 1. Для данного случая имеем значение глобального нормированного индикатора равно $sgei \approx 0,5559$ для равномерного шага и $sgei \approx 2,5487$ для неравномерного шага.

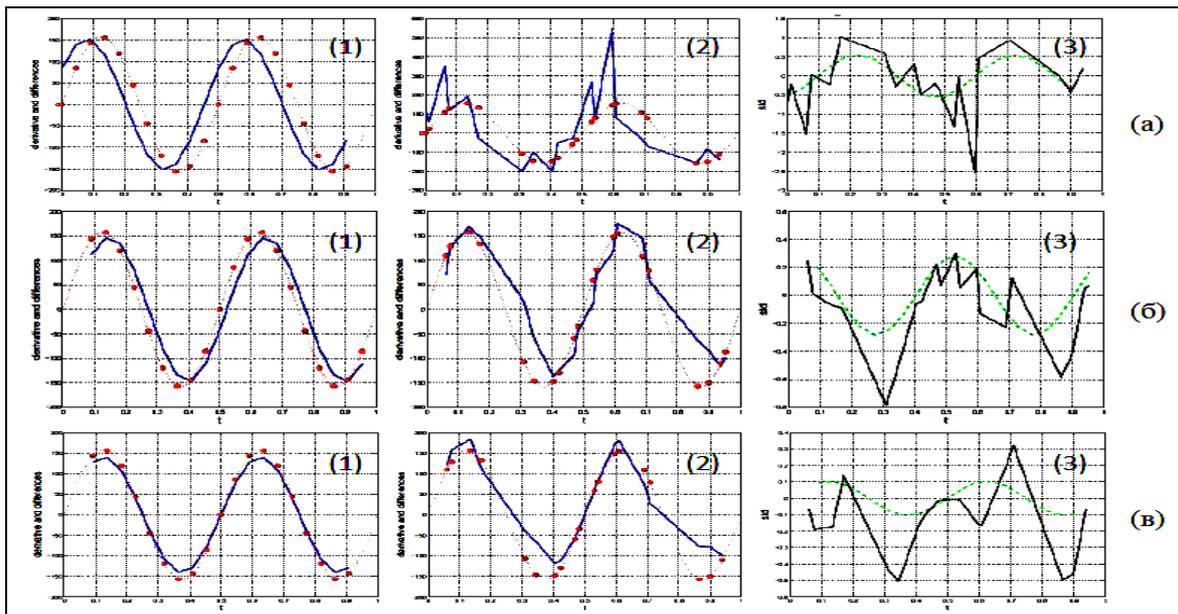


Рис. 2. Результаты сравнения дифференцирования

(а) – результаты сравнения вычислений $D_+(D_+f)$ с аналитическим результатом; (б) – результаты сравнения вычислений $\delta(D_+f)$ с аналитическим результатом; (в) – результаты сравнения вычислений $\delta(\delta f)$ с аналитическим результатом; 1 – вычисление производной с равномерным шагом; 2 – вычисление производной с неравномерным шагом; 3 – значения локальной нормированной разности (sld)

Рассмотрим случай применения операции $\delta(D_+f)$. На рис. 2, б показаны результаты сравнения вычислений с аналитическим результатом, аналогично с рис. 2, а. Для данного случая имеем значение

глобального нормированного индикатора $sgei \approx 0,2817$ для равномерного шага и $sgei \approx 0,7829$ для неравномерного шага.

Рассмотрим теперь случай применения операции $\delta(\delta f)$. На рис. 2, в показаны результаты сравнения вычислений с аналитическим результатом, аналогично с рис. 2, а,б. Для данного случая имеем значение глобального нормированного индикатора $sgei \approx 0,1031$ для равномерного шага и $sgei \approx 0,5080$ для неравномерного шага. Из результатов, представленных на рис. 2, видно, что модели вычисления второй производной также обладают высокой чувствительностью, корректность которых существенно зависит от выбора типа шага интегрирования.

Однако применение выражения (2) приводит к корректным результатам дифференцирования.

Данный факт объясняется наличием неравенства $P(Qf(t_k)) \neq Q(Pf(t_k))$ для неравномерного шага интегрирования, где P и Q – два различных оператора из D_+, D_- или δ .

Так, например, $D_+(D_-f) \neq D_-(D_+f)$ и $\delta(D_+f) \neq D_+(\delta f)$ и т.д. Поскольку для инженерных приложений особенно важна проблема точности численного интегрирования нелинейных уравнений, то рассмотрим один важный пример оценки корректности аппроксимации дифференциальных уравнений разностными моделями.

Допустим, что механический осциллятор единичной массы без внешней силы и отсутствия сил трения имеет вид

$$\delta''(t) + kx(t) = 0, t > t_0, k > 0 \quad (3)$$

и начальными условиями $x(t_0) = 1, x'(t_0) = -1$.

Решение такого уравнения хорошо известно и имеет вид

$$x(t) = -\frac{1}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{kt} + \cos \sqrt{kt}, t \geq t_0. \quad (4)$$

Аппроксимируем вторую производную в (3) выражением $D_-(D_+x)$, т.е. получим

$$D_-(D_+w) + \hat{e}w(t) = 0, t \in \mathbb{T}, \quad (5)$$

где \mathbb{T} – множество шагов интегрирования на интервале $[t_0, b]$.

Оценим точность аппроксимации решения $x(t)$ решением $w(t)$. Допустим, что \mathbb{T}_1 определяет упорядоченное множество неравномерных шагов интегрирования на интервале $[t_0, b]$ с убывающими шагами $h_k = rh_{k-1}, k = 1, 2, \dots, m, r = \frac{50}{59}$ и $m = 200$; \mathbb{T}_2 означает множество с равномерным шагом интегрирования на том же интервале $[t_0, b]$ и $h = (b - t_0)/10$.

На рис. 3, а показаны результаты численного интегрирования уравнения (4) с равномерным шагом интегрирования (сплошная линия зеленого цвета), с неравномерным шагом интегрирования (пунктирная линия синего цвета) и точное аналитическое решение (4) уравнения (3) (сплошная линия красного цвета).

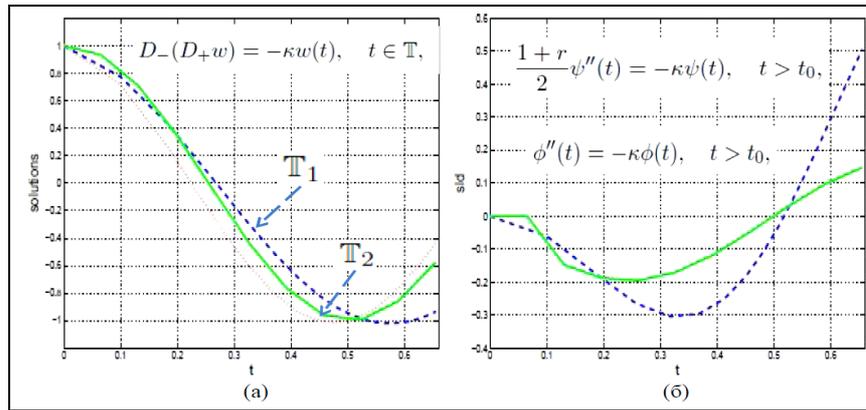


Рис. 3. Сравнение результатов вычислений (пояснения в тексте)

(а) – результаты вычислений и сравнение с аналитическим решением; (б) – значения локальной нормированной разности (sld).

Из рис. 3 видно, что для равномерного шага интегрирования точность аппроксимации аналитического решения лучше по сравнению с неравномерным шагом интегрирования. Значения глобальных индикаторов ошибки также различны: для \mathbb{T}_1 значение $sgei \approx 0,5055$ и для \mathbb{T}_2 имеем $sgei \approx 0,1945$.

Возникает вопрос: почему на множестве \mathbb{T}_1 результат аппроксимации приводит к некорректности модели интегрирования?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, рассмотрим соотношение шагов интегрирования в виде

$$\frac{h_k + h_{k-1}}{2h_{k-1}} = \frac{r+1}{2} \neq 1.$$

Поэтому уравнение (4) в явном виде аппроксимирует решение уравнения (3) в следующем виде:

$$\frac{1+r}{2} \psi''(t) + k\psi(t) = 0, t > t_0.$$

Численное решение такого уравнения не может быть корректным по отношению к решению уравнения (3). Однако, непосредственное интегрирование с помощью оператора (2) дает удовлетворительный результат. Приведенные примеры появления условий некорректности модели при решении дифференциальных уравнений играют важную роль при исследовании задач управления (см. сноску 15), инженерных расчетах сооружений на динамические нагрузки¹⁷ и многих других прикладных задачах [4].

Вышеприведенные примеры иллюстрируют алгоритмические особенности появления некорректности модели объекта. Рассмотрим теперь одну важную физическую особенность процессов измерения и ее влияние на построение моделей исследуемых объектов.

4.1.2. Погрешность измерений и модель ОУ

Допустим, что ошибка измерений выходной обобщенной координаты ОУ x в силу разрешающей способности системы измерений не может быть меньше величины L , т.е. $\Delta x \geq L$. Определим производную от функции $y(x)$, у которой на аргумент наложены указанные ограничения.

Отметим, что такая постановка связана непосредственно с задачами построения моделей квантовых ОУ и квантовой механики^{18,19}.

¹⁷ Гольденблат И.И., Ульянов С.В. Модели сейсмостойкости сооружений. – М.: Наука, 1979. – С. 214-219.

¹⁸ Gonzalez-Diaz P.F. Small-distance derivatives // Lett. Nuovo Cimento. – 1984. – Vol. 41. – № 15. – Pp. 481-484.

¹⁹ Jannussis A., Symeonidis M., Karayiannis G. New derivative models for small dimensions // Hadronic J. Suppl. – 1985. – Vol. 1. – № 2. – Pp. 239-262.

На рис. 4 приведено одно из возможных геометрических определений такой производной.

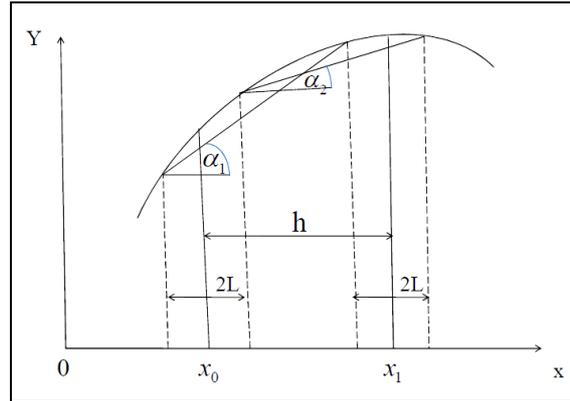


Рис. 4. Геометрическая модель производной с погрешностью аргумента

В этом случае имеем $(\Delta y)_1 = y(x_0 - L + h) - y(x_0 - L)$; $(\Delta y)_2 = y(x_0 + L + h) - y(x_0 + L)$.

Поскольку $tg\alpha_1 = \frac{(\Delta y)_1}{h}$; $tg\alpha_2 = \frac{(\Delta y)_2}{h}$, то одно из возможных определений полной производной имеет следующий вид: $y'^0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} (tg\alpha_1 + tg\alpha_2)$.

Например, для функции $y = \ln x$ производная $y'^0 = (\ln y)^{0'} = \left[x \left(1 - \frac{L^2}{x^2} \right) \right]^{-1}$ и при малых x может существенно отличаться от обычной производной.

Аналогично, для других аналитических функций:

$$(x^m)^{0'} = 2mx^{m-1} \left(1 - \frac{L^2}{x^2} \right)^{m-1} \left[\left(1 + \frac{L}{x} \right)^m + \left(1 - \frac{L}{x} \right)^m \right]^{-1}; \quad [\exp(ax)]^{0'} = a[\exp(ax)](\operatorname{ctg}(aL))^{-1}$$

и т.д. Приведенная модель учитывает процессы измерений параметров ОУ и может быть обобщена на случай, когда аргументы являются нечеткими переменными.

Здесь ограничимся случаем, когда система описывается Лагранжианом $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{x} - \frac{1}{2} kx^2$. Тогда имеем уравнение движения вида

$$\left(1 + \frac{L^2}{x^2} \right) \ddot{x} + \omega^2 \left(1 - \frac{L^2}{x^2} \right) x = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m},$$

т.е. вместо стандартного для теории автоматического регулирования (ТАР) линейного колебательно-го звена модель описывается существенно нелинейной системой. При $x = L$ имеем $\ddot{x} = 0$, т.е. в этом случае получаем равномерное движение, и при определенных соотношениях $\left(1 - \frac{L^2}{x^2} \right) \leq 0$ становится динамически неустойчиво.

В результате учет физической природы ОУ, её согласование с разработкой структуры системы управления и проектирование соответствующих законов управления привели к необходимости классификации моделей ОУ на *физические*, *математические* и *робастные расчетные* модели.

Данный вопрос рассмотрен в Части 2.

4.2. Влияние физических ограничений на выбор моделей управления нелинейными ОУ

Существует множество проблем и задач оптимизации ОУ различной физической природы. Например, давно известна проблема определения геометрического вида траектории оптимального движения (за кратчайшее время) шарика в свободном от трения желобе, соединяющего две точки P_0 и P_1 на плоскости в постоянном однородном гравитационном поле, и называется проблемой *брахистохрона* (1696г., Johann Bernoulli). В переводе с греческого термин «*брахистохрон*» означает «самый быстрый во времени» (*brachistos* – «самый короткий» и *chronos* – «время»).

Примечание 7. В традиционных университетских курсах аналитической механики данная задача приводится как пример применения вариационного исчисления. Менее известно, что при решении задачи о *тавтохроме* Abel в 1823г. впервые использовал понятия нецелочисленного интегро-дифференциального исчисления (fractional calculus) [71] (зادолго до появления самого fractional calculus). Задача о *тавтохроме* является обобщением задачи о брахистохроме, в которой определяется траектория с минимальным временем достижения конечной точки, геометрия которой не зависит от начального положения частицы. При этом решением также является циклоида. Задача о брахистохроме (и ее разновидности) по существу была первой задачей *оптимального управления движением ОУ* по программируемой траектории²⁰.

В данном разделе в качестве примера выбран *брахистохрон*. Выбор данного ОУ в виде наглядного примера (Benchmark) с методологической точки зрения обоснован возможностью показать роль и оценить влияние последовательного введения дополнительных физических ограничений на эволюцию динамического поведения объекта управления.

Физические и геометрические ограничения рассматриваются с позиции: 1) термодинамики (введения силы трения при движении частицы); 2) изменения геометрии поверхности движения в 3-мерном пространстве; 3) обобщения на релятивистский случай для 4-мерного пространственно-временного континуума; и 4) обобщение на квантовый случай 3-мерного пространственно-временного континуума (см. Часть 2).

4.2.1. Термодинамические ограничения и геометрические модели трехмерного пространства–времени

Отметим особенности динамических эффектов решения задачи о классическом брахистохроме.

А. Физическая и математическая модель классического брахистохрона. Решением классической задачи о брахистохроме является сегмент циклоиды (см. рис. 5).

Этот факт на первый взгляд противоречил аксиоме евклидовой геометрии о кратчайшем расстоянии между двумя точками на плоскости. Решение задачи получено на основе вариационного исчисления для времени перемещения частицы в виде:

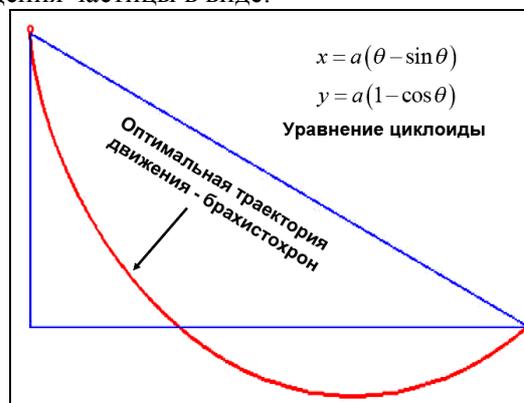


Рис. 5. Решение классической задачи о брахистохроме

²⁰ См., например, Willems J. C. 1696: The birth of optimal control // Proc. of the 35th Conf. on Decision and Control. – Kobe, Japan. – 1996. – P. 1586-1587.

$$T[x(t)] = \int_{P_0}^{P_1} dt = \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{v},$$

где параметр s определяет положение точки частицы в желобе. Определим параметр s как $ds^2 = |dx|^2$ метрику плоского пространства (длина желоба от стартовой до промежуточной точки x положения частицы) и $v \equiv \frac{ds}{dt}$. Из закона сохранения энергии значение скорости v в точке x опре-

деляется в следующем виде: $v(x) = \sqrt{\frac{2(E - V(x))}{m}} = \sqrt{\frac{2(E - mgy)}{m}}$, где V – потенциальная энер-

гия. Для общего случая метрика пространства Римана имеет вид $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ и уравнения брахистохрона имеет вид

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = \left(\frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g^{\mu\nu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \log \sqrt{E - V(x)},$$

где $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ – символ Кристоффеля. Решением задачи является *геодезическая* траектория движения брахистохрона. Однако роль трения частицы при движении была не ясна.

Рассмотрим данную проблему более подробно.

Б. Влияние силы трения на движение брахистохрона. Поскольку рассматриваемая модель брахистохрона не включала сил трения, то практически невозможно установить физическую реализуемость движения по траекторию циклоиды в реальных условиях. Следует отметить, что силы трения носят немеханический характер и описывают с точки зрения термодинамики рассеяние тепловой энергии, что приводит к потере полезной работы в виде возрастания производства энтропии.

Рассмотрим физическую модель, представленную на рис. 6.

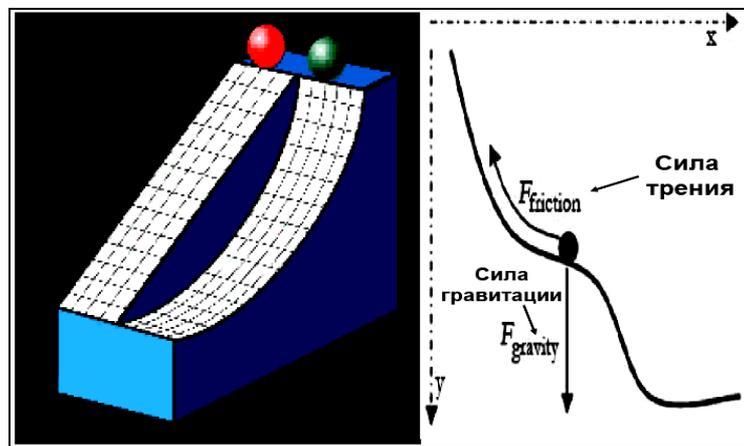


Рис. 6. Модель брахистохрона с учетом сил трения

Частица массы m движется по наклонной плоскости и по криволинейной траектории брахистохрона, имеющие одинаковые силы трения (коэффициенты трения μ материала на поверхности одинаковы) и одинаковые начальные условия. Уравнения движения имеют вид

$$m \frac{dv}{dt} = \underbrace{mg \frac{dy}{ds}}_{\text{Сила гравитации}} - \underbrace{\mu mg \frac{dx}{ds}}_{\text{Сила трения}}.$$

Время движения частицы определяется в виде:

$$t = \int \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(y-\mu x)}} dx.$$

Используя уравнение Эйлера-Лагранжа, выражение для минимального времени определяется с помощью параметрических уравнений

$$x = a[(\theta - \sin \theta) + \mu(1 - \cos \theta)], \quad y = a[(1 - \cos \theta) + \mu(\theta + \sin \theta)],$$

где a – постоянная. Данные параметрические уравнения являются обобщением соответствующих уравнений циклоиды брахистохрона (см. рис.1) при $\mu = 0$. Тогда

$$t = \int \sqrt{\frac{a[1 - \cos \theta + 2\mu \sin \theta + \mu^2 \cos \theta + \mu^2]}{g[1 - \cos \theta + 2\mu \sin \theta + \mu^2 \cos \theta - \mu^2]}} d\theta, \quad a = \frac{y_0}{[(1 - \cos \theta_0) + \mu(\theta_0 + \sin \theta_0)]}.$$

Результаты моделирования представлены на рис. 7.

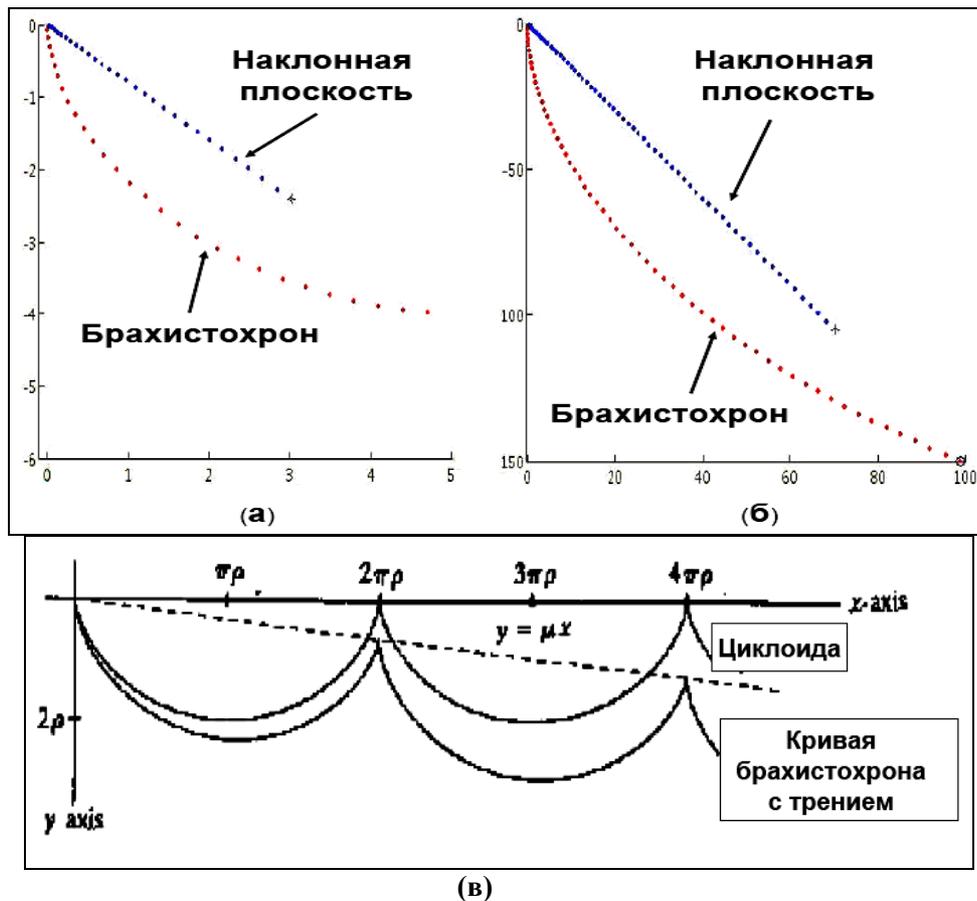


Рис. 7. Результаты моделирования движения брахистохрона

Примечание 8. На рис. 7, а параметры $x_0 = 5$ м, $y_0 = 4$ м и $\mu = 0,25$, и время $t_{\text{Брах}} = 1,45$ сек $< t_{\text{Прям}} = 1,744$ сек. По оси y шарик на наклонной плоскости достиг только 2,36 м вместо требуемого 4 м; на рис. 7, б параметры $x_0 = 100$ м, $y_0 = 150$ м и $\mu = 0,45$ и, и время достижения $t_{\text{Брах}} = 7,228$ сек $< t_{\text{Прям}} = 7,948$ сек; по оси y шарик на наклонной плоскости достиг только 99,67 м вместо требуемых 150 м.

Из приведенных результатов следует, что при наличии слабых сил трения свойство брахистохрона сохраняется [74]. Однако платой является скорость производства энтропии [4] в виде

$$\frac{dS}{ds} = \mu mg \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 \geq 0,$$

и при увеличении предельного значения параметра (коэффициента трения) μ это свойство может не выполняться полностью.

Общее свойство и влияние сил трения [74] на поведение брахистохрона показано на рис. 7, в.

Рассмотрим влияние вида геометрического пространства на решение задачи о брахистохроне.

В. Влияние вида метрик геометрии 3-мерного неевклидова пространства на движение классического брахистохрона Для определения решения задачи о брахистохроне на искривленной поверхности необходимо описать координаты частицы на поверхности и иметь выражение для вычисления длины кривых на поверхности.

В1. Метрики криволинейных координатных ортогональных поверхностей. В дифференциальной геометрии поверхность рассматривается как двумерный объект, и достаточно двух координат для описания поверхности $X(u, v)$ в параметризованном виде (координатная карта). Параметризация является дифференцируемым отображением $X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, где U – открытое множество в \mathbb{R}^2 . Допустим, что $X: U \rightarrow S$ – параметризация некоторой поверхности S . Тогда S описывается функцией $x(u, v) = (x_1(u_1, v_1), x_2(u_2, v_2), x_3(u_3, v_3))$. Если $u = u_0$ фиксировано и v переменная величина, то $x(u_0, v)$ кривая на S вдоль v . Аналогично, если $v = v_0$ фиксировано и u переменная величина, то $x(u, v_0)$ другая кривая на S вдоль u . Данные кривые называются (u, v) – параметрическими кривыми или координатными кривыми (см. на рис. 8 приведены примеры отображения и поверхности с седловой точкой).

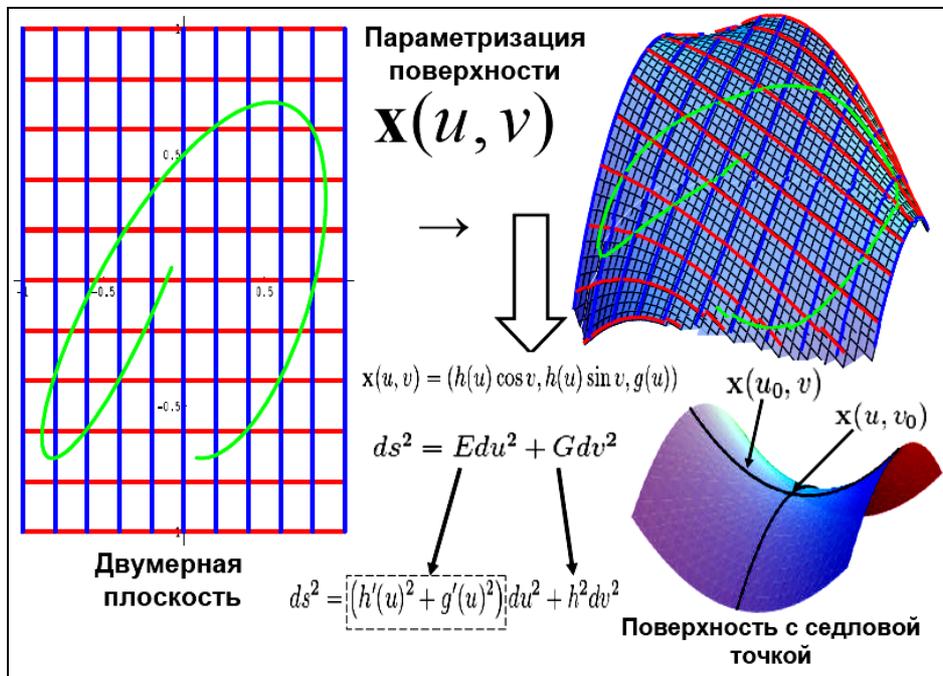


Рис. 8. Отображения и поверхности с седловой точкой

Частные производные $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)$, $x_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)$ являются тангенциальными векторами в точке пересечения (u_0, v_0) . Поэтому координаты на поверхности S должны удовлетворять двум свойствам; (а) x_u и x_v линейно независимы и (б) X – инъективное отображение ($X(U)$ не имеет самопересечений).

Допустим, что $X: U \rightarrow S$ является координатной картой, содержащей кривую $\alpha(t)$.

Тогда $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$, длина $s(t)$ определяется в локальных координатах в виде

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(r)\| dr = \int_a^t \sqrt{\alpha'(r) \cdot \alpha'(r)} dr = \int_a^t \sqrt{\left(x_u \frac{du}{dr} + x_v \frac{dv}{dr}\right) \cdot \left(x_u \frac{du}{dr} + x_v \frac{dv}{dr}\right)} dr.$$

Положим, что $E(u, v) = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u$, $F(u, v) = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$, $G(u, v) = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$. Тогда имеем метрику пространства в виде дифференциальной формы: $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ (ds элемент длины S). Коэффициенты E, F и G называются компонентами функции метрики S или метрическими коэффициентами. В частном случае, если x, z – плоскость параметризуется в виде координатной карты $\mathbf{x}(u, v) = (u, 0, v)$, то имеем $E = G = 1$ и $F = 0$. Элемент длины определяется в виде $ds^2 = du^2 + dv^2$ и используется при решении задачи о классическом брахистохроне. При вращении вокруг оси z поверхности могут быть описаны в параметрическом виде как $\mathbf{x}(u, v) = (h(u) \cos v, h(u) \sin v, g(u))$, $0 < v < 2\pi$, $u \in \mathbb{R}$. Тогда $E = h'(u)^2 + g'(u)^2$, $F = 0$ и $G = h^2$, а элемент длины имеет вид

$$ds^2 = (h'(u)^2 + g'(u)^2)du^2 + h^2 dv^2.$$

Рисунок 9 иллюстрирует приведенные определения для различных частных метрик ds^2 .

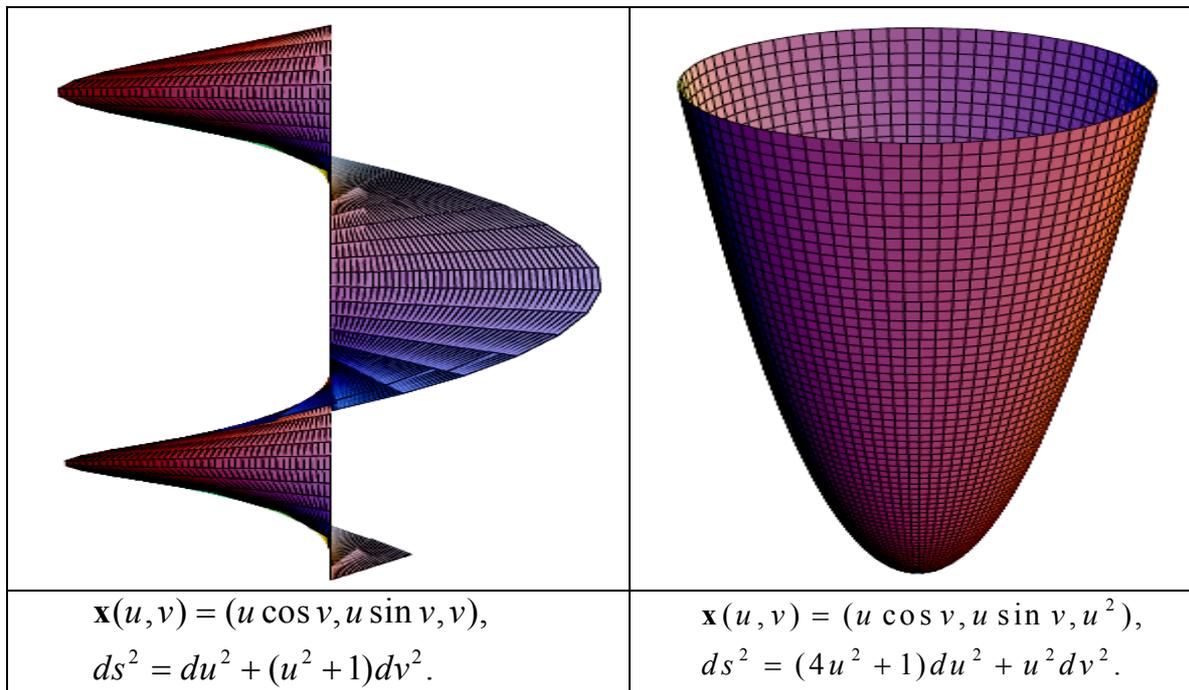


Рис. 9. Определения для различных частных метрик ds^2

На поверхности S угол θ между тангенциальными векторами координатных кривых определяется в виде $\theta = \arccos \left(\frac{\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v}{\sqrt{(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v)}} \right) = \arccos \frac{F}{\sqrt{EG}}$.

Поэтому \mathbf{x}_u и \mathbf{x}_v ортогональны, если $F = 0$. Отметим, что представленные выше координатные карты вертикальных поверхностей и поверхности вращения ортогональны. Более того, если координатная карта $\mathbf{X}: U \rightarrow S$ ортогональна, то метрика пространства имеет вид:

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2.$$

В2. Классический брахистохрон в постоянном однородном гравитационном поле на криволинейной поверхности. Рассмотрим случай, когда частица массы m и с потенциальной энергией V находится на поверхности S в точке A . Выберем две различные точки A и B так, что $V(A) > V(B)$ и предположим, что скорость частицы меньше скорости света. Тогда выполняется классический закон

сохранения механической энергии $\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + V = V(A)$, где ds определяет длину на S . Тогда полное время T движения частицы определяется как

$$T = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_A^B \sqrt{\frac{1}{V(A) - V(B)}} ds.$$

В случае ортогональной координатной карты элемент длины $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$ и

$$T = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_A^B \sqrt{\frac{1}{V(A) - V(B)}} \sqrt{Edu^2 + Gdv^2}.$$

Тогда общее решение проблемы брахистохрона имеет следующий вид [75]:

При $\frac{\partial E}{\partial u} = \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial u} = 0, x(u(v), v)$	$u(v) = \pm \int_A^v \sqrt{\frac{C^2 G(w)(V(A) - V(w))}{E(w)[E(w) - C^2(V(A) - V(w))]}} dw$
При $\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial v} = 0, x(u, v(u))$	$v(u) = \pm \int_A^v \sqrt{\frac{C^2 E(w)(V(A) - V(w))}{G(w)[G(w) - C^2(V(A) - V(w))]}} dw$

Рассмотрим частные случаи приведенного общего решения.

В3. Классический брахистохрон. При падении частицы в вертикальной плоскости $x(u, v) = (u, 0, v)$, $E = G = 1$ и $F = 0$, имеем $u(v) = \pm \int_a^v \sqrt{\frac{C^2(a-v)}{1 - C^2(a-v)}} dw$, где $V(v) = v$ и a – начальное положение v -координаты частицы.

Рисунок 10 показывает семейство решений классического брахистохрона при разных значениях C , конечной точке и выборе знака.

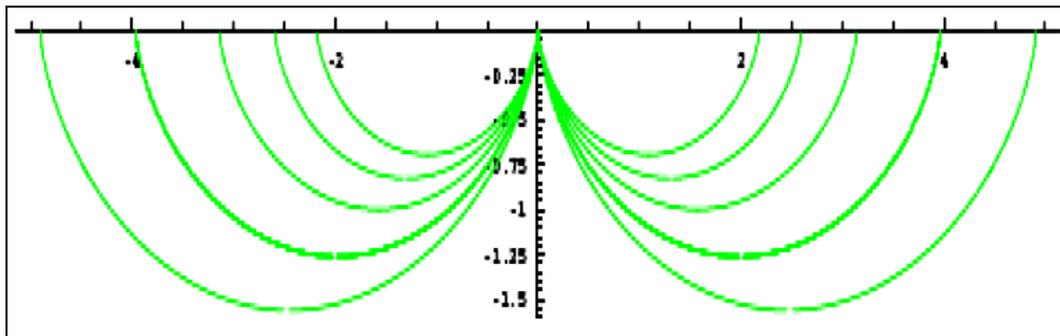


Рис. 10. Семейство решений классического брахистохрона

Физически значение C определяется значением конечной точки и выбором знака, показывающего направление движения (влево или вправо).

В4. Классический брахистохрон в криволинейном пространстве. Рассмотрим случай брахистохрона на вращающейся криволинейной поверхности в однородном гравитационном поле, а ось вращения направлена параллельно направлению поля. Допустим, что ось z является осью вращения, а метрика поверхности пространства имеет вид $ds^2 = (h'(u)^2 + g'(u))du^2 + h^2 dv^2$ и потенциальная энергия задается в виде $V = g(u)$. На поверхности S вращения, определенной в параметрическом виде $x(u, v) = (h(u) \cos v, h(u) \sin v, g(u))$, решение задачи о брахистохроне в однородном гравита-

ционном поле задается в виде траектории $x(u, v(u))$, где

$$v(u) = \pm \int_{u_0}^u \sqrt{\frac{C^2 (h'(w)^2 + g'(w)^2) (g(u_0) - g(w))}{h(w)^2 [h(w)^2 - C^2 (g(u_0) - g(w))]} dw}$$

и $A = x(u_0, v_0)$ – начальное положение частицы.

В5. Частные случаи. Дадим три важных частных случая общего решения.

Например, для конуса с правосторонней циркуляцией

$$x(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u), \quad u \geq 0, 0 < v < 2\pi,$$

решение имеет вид [75] $x \left(u, \pm \int_{u_0}^u \sqrt{\frac{2C^2 (u_0 - u)}{u^2 (u^2 - C^2 (u_0 - u))}} dw \right)$.

На рис. 10, а показано решение для частицы, стартующей из начальной точки $A = x(1, 0)$ на поверхности S . В этом случае физически знак (\pm) определяет сторону падения частицы.

(2) Рассмотрим поверхность вращения в виде гиперboloида с координатной картой $x(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u), u \in \mathbb{R}, 0 < v < 2\pi$.

Решение в этом случае имеет вид [76]

$$x \left(u, \pm \int_A^u \sqrt{\frac{C^2 (\sinh u_0 - \sinh u) ((\cosh u)^2 + (\sinh u)^2)}{(\cosh u)^2 ((\cosh u)^2 - C^2 (\sinh u_0 - \sinh u))}} dw \right)$$

На рис. 10, б показано решение задачи о брахистохроне на поверхности гиперboloида, вращающегося в однородном гравитационном поле.

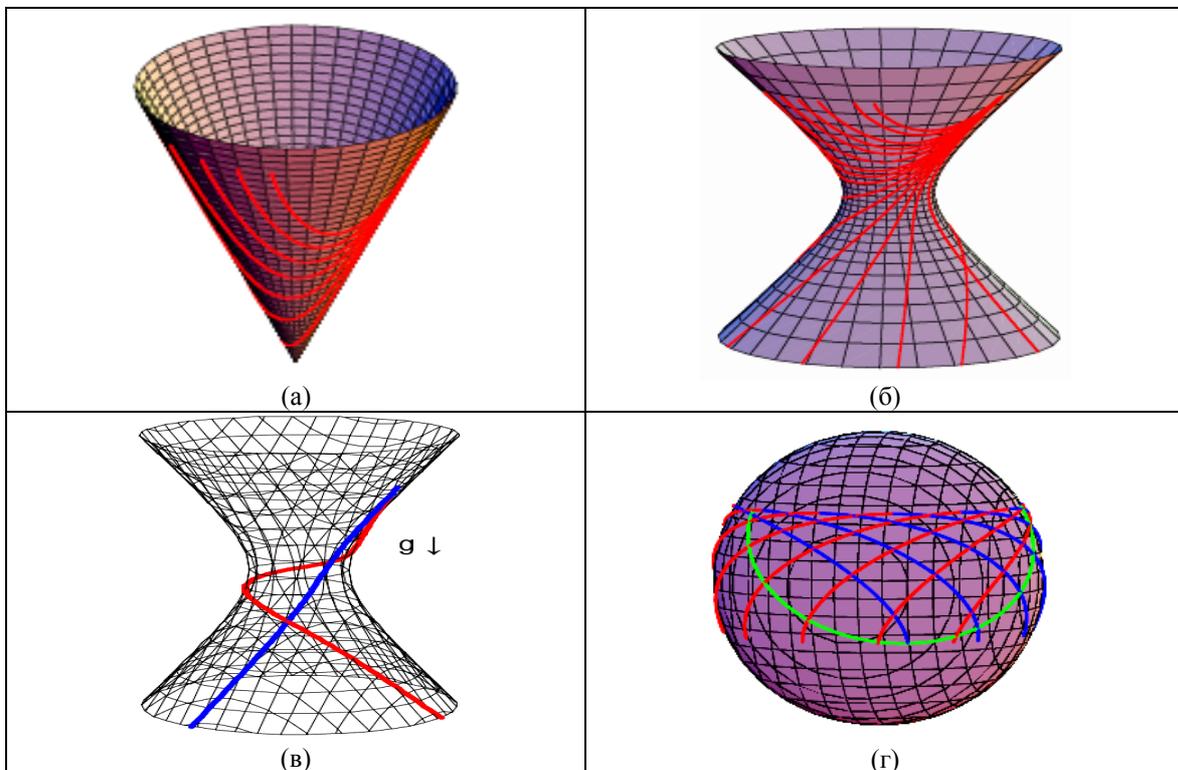


Рис. 10. Решения задачи о брахистохроне на вращающейся криволинейной поверхности в однородном гравитационном поле

В отличие от случая с вращающимся конусом, решения на вращающемся гиперboloиде могут не иметь минимального значения.

При критическом значении $C = 0,687$ и выше (см. рис. 10, в) имеем точку бифуркации, при которой частица падает вниз по вращающимся и взаимно пересекающимся спиральям вокруг гиперboloида.

Рассмотрим случай сферы единичного радиуса с параметрической формой

$$x(u, v) = (\sqrt{1-u^2} \cos v, \sqrt{1-u^2} \sin v, u), \quad -1 < u < 1, \quad 0 < v < 2\pi.$$

Решение задачи о брахистохроне имеет в этом случае вид $x(u, v(u))$, где [74]

$$v(u) = \pm \int_{u_0}^u \sqrt{\frac{C^2 (w^2 (1-w^2)^{-1} + 1) (u_0 - w)}{(1-w^2)((1-w^2) - C^2 (u_0 - w))}} dw.$$

Рисунок 10, г показывает решение задачи о брахистохроне на поверхности сферы.

Таким образом, в ряде случаев метрика геометрии криволинейного пространства может существенно влиять на решение задачи о брахистохроне.

4.2.2. Влияние ограничений в четырехмерном пространственно-временном континууме

Проблему решения задачи о брахистохроне рассмотрим с позиции принципа Ферми в геометрической оптике, согласно которому луч света из точки A в точку B распространяется с минимальным временем так, что полное время определяется в виде $T = \frac{1}{c} \int_A^B n(u, v) ds$, где $n(u, v)$ – коэффициент

отражения в среде на поверхности S с обобщенными координатами (u, v) и c – скорость света. Если

$n(u, v) = \sqrt{\frac{1}{V(A) - V(u, v)}}$ и $c = 1$ м/сек, то имеем классическую задачу о брахистохроне. Фронт

световой волны описывается уровнями поверхности функции $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Задав луч α с тангенциальным единичным вектором Γ и распространяющийся в среде с коэффициентом отражения $n(u, v)$, поверхность функции L определяется решением уравнения эйконала $\nabla L = n\Gamma$.

В общем случае L полностью определяется источником света и коэффициентом $n(u, v)$. Например, если источник света находится в плоскости и $n(u, v) = \text{constant}$, то в декартовых координатах $L = ax + by + cz$, где a, b и c выбираются так, что распространение фронта волны происходит параллельно данной плоскости. Аналогично имеем для искривленного пространства (см. рис. 11, а).

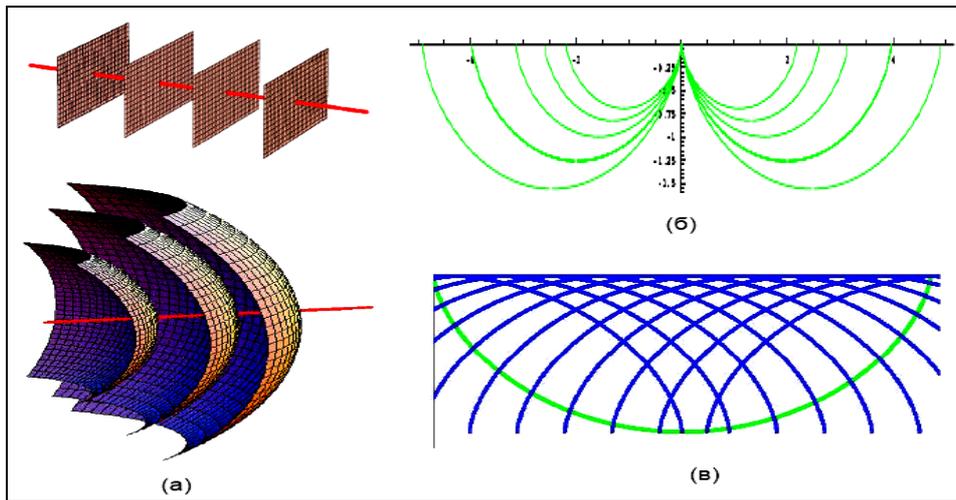


Рис. 11. Распространение фронта волны траектории брахистохрона

Использование уравнения эйконала позволяет решить задачу о брахистохроне без использования уравнения Эйлера-Лагранжа. Допустим, что $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$ является метрикой поверхности S и $n(u, v)$ – коэффициент преломления. Допустим также выполнение условия $\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial v} = 0$. То-

гда $L = Cv + f(u)$, и имеем $f(u) = \pm \int \sqrt{\frac{E \left(G - \frac{C^2}{n^2} \right)}{\frac{G}{n^2}}}$.

В результате лучи света распространяются по поверхности S в виде $x = (u, v(u))$, где

$$v(u) = \pm \int_{u_0}^u \sqrt{\frac{E \frac{C^2}{n^2}}{G \left(G - \frac{C^2}{n^2} \right)}} dw.$$

Если $n = \frac{1}{\sqrt{u_0 - u}}$ и $x(u, v) = (\sqrt{1-u^2} \cos v, \sqrt{1-u^2} \sin v, u)$, $-1 < u < 1, 0 < v < 2\pi$, то получим

решение задачи о брахистохроне на поверхности сферы, показанное на рис. 10, г.

Из рис. 10, г и 11, в видно, что фронт волны распространяется перпендикулярно траектории брахистохрона движения частицы.

А. Релятивистский брахистохрон. Приведенные результаты решения задачи о брахистохроне позволяют рассмотреть новые решения в ситуациях, для которых классический закон о сохранении механической энергии не выполняется. Например, если скорость частицы близка скорости света, то уравнение сохранения для энергии в механике Ньютона преобразуется с учетом релятивистской составляющей к следующему виду: $\gamma c^2 - c^2 + V = V_0$, где c – скорость света в вакууме; V – гравитационный потенциал и $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2}}$. Тогда имеем:

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{c^2 (V_0 - V + c^2) - c^6}{(V_0 - V + c^2)^2} \text{ и } \frac{1}{n^2} = \frac{(V_0 - V)(V_0 - V + 2c^2)}{(V_0 - V + c^2)^2}.$$

Применяя полученный выше результат, в зависимости от вида метрики геометрической поверхности можно получить интересные результаты для случая релятивистского брахистохрона. Так, в случае релятивистской частицы, падающей в вертикальной плоскости $x(u, v) = (u, 0, v)$ в однородном гравитационном поле, имеем $\frac{1}{n^2} = \frac{(v_0 - v)(v_0 - v + 2c^2)}{(v_0 - v + c^2)^2}$, где v_0 – начальное положение частицы. При $v_0 = 0$ решение $x(u(v), v)$ имеет вид ($k \equiv C$) [76]

$$u(v) = \pm \int_0^v \sqrt{\frac{k^2 \frac{1}{n^2}}{1 - k^2 \frac{1}{n^2}}} dw = \pm \int_0^v \sqrt{\frac{k^2 (2c^2 - w)w}{c^4 + 2c^2(k^2 - 1)w - (k^2 - 1)w^2}} dw.$$

Рисунок 12, а показывает решение для релятивистского и классического случаев брахистохрона при $c = 10$ м/сек. Решение для релятивистского брахистохрона обозначено на рис. 12, а сплошной, а для классического – пунктирной линиями.

Классическое решение в данной области скоростей хорошо аппроксимирует релятивистское решение.

Рисунок 12,б иллюстрирует случай, когда релятивистский брахистохрон существенно отличается от классического аналога.

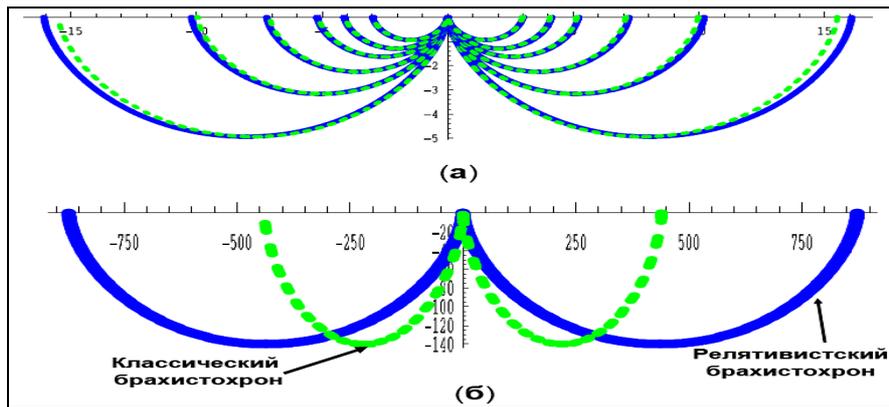


Рис. 12. Решение для релятивистского брахистохрона

Рассмотрим решение задачи о релятивистском брахистохроне для случая распространения лучей света в искривленном пространстве (с точки зрения геометрической оптики).

Допустим, что $\alpha(s)$ луч света с параметром длины траектории s , вдоль которой он распространяется. Пусть $T(s)$ описывает единичный тангенциальный вектор вдоль траектории $\alpha(s)$. Обозначим $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ как кривизну траектории $\alpha(s)$, где символ (') означает дифференцирование относительно s . Если $\kappa(s) \neq 0$, то $N(s) = T'(s)\kappa(s)^{-1}$ означает векторное поле единичных нормализованных векторов вдоль траектории $\alpha(s)$. Через $B(s) = T(s) \times N(s)$ обозначим векторное поле единичных сопряженных векторов. В теории дифференциальных поверхностей известна теорема *Frenet-Serret*, согласно которой $\alpha(s)$ является траекторией с ненулевой кривизной $\kappa(s) \neq 0$ и выполняются следующие соотношения:

$$T'(s) = \kappa(s)N(s), N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$

и $B'(s) = \tau(s)N(s)$, где $\tau(s)$ называется коэффициентом кручения траектории $\alpha(s)$.

Таким образом, множество $\{T(s), N(s), B(s)\}$ описывает ортонормированный базис, называемый подвижной системой отсчета. Если траектория на плоской поверхности, то имеем $\tau(s) \equiv 0$. Распространение различных траекторий лучей света описываются уравнением

$$\nabla n = n \kappa N + (T \cdot \nabla n) T.$$

Из данного уравнения следует, что ∇n принадлежит оскулирующей плоскости, натянутой на вектора $\{T(s), N(s)\}$.

Рисунок 13 показывает траекторию перемещения частицы по циклоиде брахистохрона в однородном гравитационном поле с единичными тангенциальным и нормализованным векторами в векторном поле и ∇n .

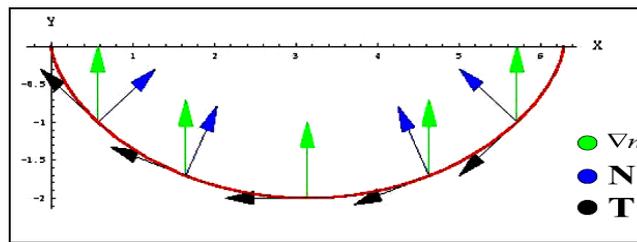


Рис. 13. Траектория перемещения частицы по циклоиде брахистохрона в однородном гравитационном поле

Так как ∇n является вектором с началом точки направления, то оскулирующая плоскость является плоскостью, содержащей исходную начальную и конечную точки траектории. Поэтому искомая траектория с критическим радиусом кривизны u_f и исходной точкой A порождают поверхность вращения, меридианы на которой являются искомыми решениями вида траекторий.

Рисунок 14 показывает один из возможных вариантов решения таких поверхностей вращения с исходной точкой $A(1,0,0)$ [73, 74].

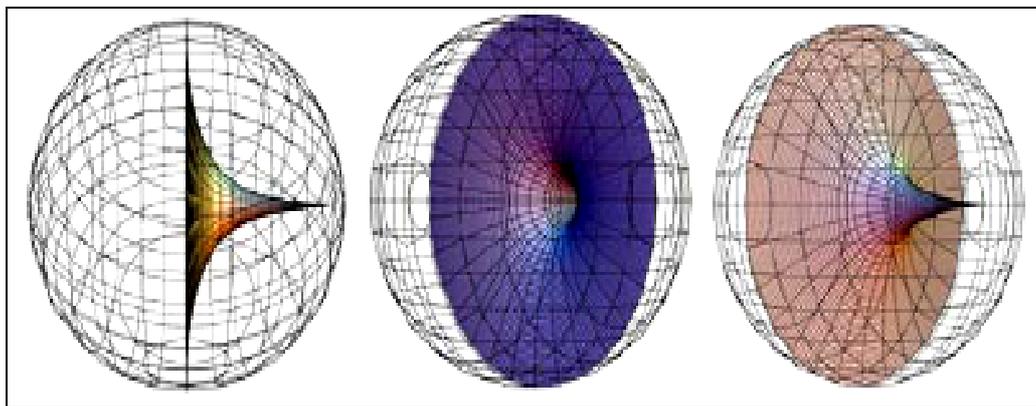


Рис. 14. Возможные варианты решения поверхностей вращения

Б. Релятивистский брахистохрон в постоянном электрическом поле [77, 78]. Рассмотрим частицу с массой m и зарядом q , падающей в постоянном электрическом поле E . Релятивистское

уравнение движения имеет вид [5, 6]
$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{mv(t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}} \right\} = Eq.$$

В двумерной координатной плоскости (x, z) (ось z направлена вниз) закон сохранения энергии требует в релятивистском случае [5] $mc^2 = mc^2\gamma - qEz$, $\gamma^{-2} = 1 - v^2/c^2$. Поэтому, скорость падения частицы определяется в виде $v(z) = c \sqrt{1 - \frac{1}{(1+\alpha z)^2}}$, где $\alpha = \frac{E}{mc^2}q$. В этом случае скорость v не зависит от координаты x . Для отрезка траектории ds , соединяющей две инфинитезимальных точки A и B , время перехода вдоль ds определяется в виде $dt = ds/dv(x)$, так что полное время перехода частицы из A в B имеет вид $t_B = \int_0^B dz \frac{1}{v(z)} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}$ (при $t_A = 0$). Траектория движения частицы в результате имеет вид

$$x(z) = \int_0^z dz \sqrt{\frac{k^2(1+\alpha z)^2 - k^2}{[(1-k^2)(1+\alpha z)^2 + k^2]}}$$

где постоянная c включена в постоянную интегрирования k .

Существует три области решения приведенного выражения для $x(z)$ в зависимости от параметра k : (i) $k^2 < 1$; (ii) $k^2 = 1$; и (iii) $k^2 > 1$. В случае (i) траектория релятивистского брахистохрона существенно отличается от классического варианта и неограниченно возрастает. В случае (ii) траектория имеет вид параболы и в случае (iii) – в пределе $\alpha \rightarrow 0$ стремится к циклоиде.

Оптимальное время в лабораторной системе отсчета наблюдателя

$$\tau = \int_0^{x_2} dx \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{v} + \varepsilon y(0) + \zeta (y(x_2) - y(0))$$

и имеет ограниченное значение при всех видах областей решений.

Рассмотрим одно важное практическое значение представленного результата.

В. Движение заряженной частицы вдоль релятивистского брахистохрона с учетом излучения мощности в заданном электрическом поле [79]. Мощность $P(t)$ излучаемой энергии заряженной частицы (например, в синхротроне) пропорциональна множителю $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-2}$, т.е., при $v \rightarrow c$ (скоростях движения, близких к скорости света) потери энергии на излучение могут быть весьма большими. В случае релятивистского брахистохрона соответствующая величина $P(t)$ имеет вид

$$P(t) = \frac{2}{3} \frac{q^2 \alpha^2}{4\pi} c \left(1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right) \left(1 + \frac{v^2(t)}{c^2}\right),$$

что справедливо для произвольной орбиты. В случае замкнутой орбиты имеем:

$$P(t) = \frac{2}{3} \frac{q^2 \alpha^2}{4\pi} c \left(1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right).$$

Таким образом, в рассмотренном случае потери энергии на излучение (при $v \rightarrow c$) стремятся к минимуму и решения задачи (без учета потерь на диссипативные процессы) оптимальны.

Рассмотрим и сравним аналогичные результаты для релятивистского *таухрона* [80].

В этом случае выражение для рассеяния энергии имеет вид:

$$P(t) = \frac{2}{3} \frac{q^2 \alpha^2}{4\pi c^3} \left(1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right)^{-3} \left[v^4 (\xi^2 + \lambda^2)^{-1} + c^4 (\eta^2 - \lambda^2) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3 \right],$$

где имеет место соотношение $\sqrt{(\eta^2 - \lambda^2)}s = \sqrt{(\xi^2 + \lambda^2)}$, $v = xi + yj = \dot{x}(i + sj)$.

Таким образом, результат существенно отличается от случая релятивистского брахистохрона.

Следовательно, более корректный учет физической особенности движения релятивистской системы также может приводить непосредственно к оптимальным решениям.

Выводы

Описаны особенности учета физических ограничений и информационных границ для корректного математического описания моделей ОУ, влияющих на качество формирования баз знаний в интеллектуальных системах управления и роль интеллектуальных вычислений при проектировании робастных систем управления. На конкретных примерах поясняется роль и специфика учета физических эффектов в логике моделирования интеллектуальных процессов управления.

Список литературы

1. Blencowe M. Quantum electromechanical systems // *Physics Reports*. – 2004. – Vol. 395. – №. 2. – Pp. 159-222.
2. Shapiro M., Brumer P. Quantum control of bound and continuum state dynamics // *Physics Reports*. – 2006. – Vol. 425. – №. 2. – Pp. 195-264.
3. Borzi A., Stadler G., Hohenester U. Optimal quantum control in nanostructures: Theory and application to a generic three-level system // *Physical Review*. – 2002. – Vol. A66. – № 5.
4. Петров Б.Н., Уланов Г.М., Ульянов С.В. Теория моделей процессов управления: Информационные и термодинамические аспекты. – М.: Наука. – 1978.
5. Гольденблат И.И., Ульянов С.В. Введение в теорию относительности и ее приложения в новой технике. – М.: Физматгиз. – 1979.
6. Петров Б.Н., Уланов Г.М., Ульянов С.В. Проблемы управления релятивистскими и квантовыми динамическими системами: Информационные и термодинамические аспекты. – М.: Наука. – 1982.
7. Ульянов С.В. Физические модели интеллектуальных процессов управления: Квантовые, релятивистские и информационно-термодинамические аспекты. Автореф. диссерт. на соиск. учен. степ. д.ф.-м.н. – М.: ИФТП АН СССР. – 1992.
8. Фрадков А.Л. О применении кибернетических методов в физике // *УФН*. – 2005. – Т. 175. – № 2. – С. 113-138.
9. Ulyanov S.V., Litvintseva L.V., Ulyanov I.S. et al. Quantum information and quantum computational intelligence: Quantum feedback control models – Physical limits, information bounds, and information-disturbance trade-off. *Note del Polo Ricerca*. Milano: Universita degli Studi di Milano Publ (<http://www.qcoptimizer.com/>). – 2006. – Vol. 81.
10. Ulyanov S.V., Litvintseva L.V., Ulyanov I.S. et al. Quantum information and quantum computational intelligence: Quantum optimal control and filtering – Stability, robustness, and self-organization models in nanotechnologies. – *Note del Polo Ricerca*. Milano: Universita degli Studi di Milano Publ (<http://www.qcoptimizer.com/>). – 2007. – Vol. 82.
11. Nielsen M.A., Chuang I.L. *Quantum computation and quantum information*. – Cambridge: University Press. – 2000.
12. Ulyanov S.V., Litvintseva L.V., Ulyanov S.S. Quantum information and quantum computational intelligence: Quantum probability, physics of quantum information and information geometry, quantum com-

- putational logic and quantum complexity – Note del Polo Ricerca. Milano: Universita degli Studi di Milano Publ (<http://www.qcoptimizer.com/>). – 2005. – Vol. 83.
13. Benenti G., Casati G., Strini G. Principles of quantum computation and information. – Singapore: World Scientific. – 2004. – Vol. I. – 2007. – Vol. II.
 14. Janzing D. Computer science approach to quantum control. – Habilitation: Univ. Karlsruhe (TH) Publ. Germany. – 2006.
 15. Красовский А.А. Проблемы физической теории управления. // А и Т. – 1990. – № 11.
 16. Бутковский А.Г., Самойленко Ю.И. Управление квантовыми системами. –М.: Физматгиз, 1984.
 17. Krotov V.F. The quantization property of probability distributions of the characteristics of dynamic systems observed in the presence of random disturbances // Automation and Remote Control. – 2003. – Vol. 64. – № 1. – Pp. 76-94.
 18. Петров С.П., Мишин А.А., Ульянов С.В. Применение оптимизатора баз знаний для проектирования интеллектуальных систем управления в среде MATLAB/SIMULINK. Ч.1. // Системный анализ в науке и образовании: электрон. науч. журнал. – 2011. – №3. – [Электронный ресурс]. URL: <http://www.sanse.ru/archive/21>.
 19. Мишин А. А., Нефедов Н. Ю., Петров С. П., Полуниин А. С., Литвинцева Л. В. Методы построения баз знаний для управления нелинейными динамическими системами // Системный анализ в науке и образовании: электрон. науч. журнал. – 2011. – №2. – [Электронный ресурс]. URL: <http://www.sanse.ru/archive/20>. – 0421100111\0008.
 20. Ульянов С. В., Тятюшкина О. Ю., Колбенко Е. В. Нечеткие модели интеллектуальных промышленных регуляторов и систем управления. Методология проектирования // Системный анализ в науке и образовании: электрон. науч. журнал. – 2011. – №2. – [Электронный ресурс]. URL: <http://www.sanse.ru/archive/20>. – 0421100111\0009.
 21. Ulyanov S.V., Litvintseva L.V., Ulyanov I.S. et all. Quantum information and quantum computational intelligence: Applied quantum soft computing in AI, computer science, quantum games and self-organization, informatics and design of intelligent wise robust control. – Note del Polo Ricerca. Milano: Universita degli Studi di Milano Publ (<http://www.qcoptimizer.com/>). – 2007. – Vol. 86.
 22. Kurotani Y., Sagawa T., Ueda M. Upper bound on our knowledge about non-commuting observables for a qubit system // Phys. Review. – 2007. – Vol. A76. – № 2.
 23. Sagawa T., Ueda M. The second law of thermodynamics with discrete quantum feedback control // Phys. Rev. Lett. – 2008. – Vol. 100. – № 8. – P. 080403.
 24. Wehner S., Winter A. Higher entropic uncertainty relations for anti-commuting observables // arXiv: 0710.1185v1 [quant-ph]. – 2007.
 25. Chakrabarti R., Rabitz H. Quantum control landscapes // Intern. Reviews in Physical Chemistry. – 2007. – Vol. 26. – № 4.
 26. Tesch C.M., Kurtz L., de Vivie-Riedle R. Applying optimal control theory for elements of quantum computation in molecular systems // Chemical Physics Letters. – 2001. – Vol. 343. – № 5/6. – Pp. 633-641.
 27. Babikov D. Accuracy of gates in a quantum computer based on vibrational eigenstates // J. of Chemical Physics. – 2004. – Vol. 121. – № 16.
 28. Troppmann U., de Vivie-Riedle R. Mechanisms of local and global molecular quantum gates and their implementation prospects // J. of Chemical Physics. – 2005. – Vol. 122. – № 15.
 29. Grace M., Brif C., Rabitz H. et all. Optimal control of quantum gates and suppression of decoherence in a system of interacting two-level particles // J. of Physics. – 2007. – Vol. B40. – № 9.
 30. Werschik J., Gross E.K.U. Quantum optimal control theory // J. of Physics. – 2007. – Vol. B40. – № 18.
 31. D'Alessandro D. Introduction to quantum control and dynamics. – CRC Press, Boca Raton, FL. – 2007.
 32. Correa A.A., Reboredo F.A., Balseiro C.A. Quantum corral wave-function engineering // Physical Review. – 2005. – Vol. B71. – № 3.
 33. Hohenester U. Quantum control of polaron states in semiconductor quantum dots // J. of Physics. – 2007. – Vol. B40. – № 11.

34. Stepanyuk V.S., Negulyaev N.N., Niebergall L. et all. Effect of quantum confinement of surface electrons on adatom–adatom interactions // *New Journal of Physics*. – 2007. – Vol. 9. – № 338. – Pp. 1-15.
35. Eigler D. M., Lutz C. P., Crommie M. F. Information transport and computation in nanometre-scale structures // *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* – 2004. – Vol. A362. – № 1819. – Pp. 1135-1147.
36. Snijders P. C., Moon E. J., González C., et all. Controlled self-organization of atom vacancies in monatomic gallium layers // *Physical Review Letters*. – 2007. – Vol. 99. – № 11. – P. 116102.
37. Yannouleas C., Landman U. Symmetry breaking and quantum correlations in finite systems: Studies of quantum dots and ultracold Bose gases and related nuclear and chemical methods // *Reports on Progress in Physics*. – 2007. – Vol. 70. – № 12. – Pp. 2067-2148.
38. Ulyanov S.V., Kurawaki I., Litvintseva L.V. et all. Soft computing simulation design of intelligent control systems in micro-nano-robotics and mechatronics // *Soft Computing: A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications*. – 2000. – Vol. 4. – № 2.
39. Cacir B., Ozmen A., Atav U. et all. Investigation of electronic structure of quantum dot using Slater-type orbitals and quantum genetic algorithm // *Intern. J. of Modern Physics*. – 2007. – Vol. 18. – № 1. – Pp. 61-72.
40. Judson R.S., Rabitz H. Teaching lasers to control molecules // *Physical Review Letters*. – 1992. – Vol. 68. – № 10.
41. Pearson B. J., White J. L., Weinacht T. C. et all. Coherent control using adaptive learning algorithms // *Physical Review*. – 2001. – Vol. A63. – № 6.
42. Levis R.J., Rabitz H. Closing the loop on bond selective chemistry using tailored strong field laser pulses // *J. Phys. Chem.* – 2002. – Vol. A106. – № 27.
43. Zhu W., Rabitz H. Attaining optimal controls for manipulating quantum systems // *Intern. J. of Quantum Chemistry*. – 2003. – Vol. 83. – № 1.
44. Cavalcanti A., Freitas R.A. Jr. Nanorobotics control design: A collective behavior approach for medicine // *IEEE Trans. on Nanobioscience*. – 2005. – Vol. 4. – № 2.
45. Ulyanov S.V., Yamafuji K., Fukuda T. et all. Modelling of micro-nano-robots and physical limit of micro control // *J. of the Robotics Society of Japan*. – 1996. – Vol. 14. – № 8. – Pp. 1102-1105.
46. Meyer D.A. Quantum strategies // *Physics Review Letters*. – 1999. – Vol. 82, – № 5. – Pp. 1052-1055.
47. Eisert J., Wilkens M., Lewenstein M. Quantum games and quantum strategies // *Physics Review Letters*. – 1999. – Vol. 83. – № 15. – Pp. 3077-3088.
48. Grib A. A., Parfionov G. N. Can a game be quantum? // *J. of Mathematical Sciences*. – 2005. – Vol. 125. – № 2.
49. Aharon N., Vaidman L. Quantum advantages in classically defined task // *Phys. Review*. – 2008. – Vol. A77. – № 5. – P. 052310.
50. Ulyanov S.V., Litvintseva L.V., Ulyanov S.S. et all. Computational intelligence with quantum game's approach and robust decision-making in communication information uncertainty // *Proc. of Intern. Conf. on Computational Intelligence, ICCI'2004. (Nicosia, North Cyprus)*. – 2004. – Pp. 172-187.
51. Aerts D., Czachor M. Quantum aspects of semantic analysis and symbolic artificial intelligence // *J. of Physics*. – 2004. – Vol. A37. – P. L123-L132.
52. Aerts D. Quantum interference and superposition in cognition: Development of a theory for the disjunction of concepts // *arXiv: [physics-gen-ph] 0705.0975v*. – 17 May 2007.
53. Chen J.C.H. Quantum computation and natural language processing // *Ph.D. Thesis*. – Univ. Hamburg Publ. – 2002.
54. Sadrzadeh M. High level quantum structures in linguistic and multi agent systems // *Univ. of Southampton Publ. Amer. Association for AI (www.aaai.org)*. – 2007.
55. Laskey K.B. Quantum physical symbol systems // *J. of Logic, Language and Information*. – 2006. – Vol. 15. – № 1/2. – Pp. 109-154.
56. Benioff P. Use of mathematical logical concepts in quantum mechanics: An example // *J. of Physics*. – 2002. – Vol. A35. – Pp. 5843-5857.

57. Benioff P. Language is physical // *Quantum Information Processing*. – 2002. – Vol. 1. – № 6.
58. Hartle J.B. Quantum physics and human language // *J. of Physics*. – 2007. – Vol. A40. – Pp. 3101-3121.
59. Pang C.-Y., Zhou Z.-W., Guo G.-C. A hybrid quantum encoding algorithm of vector quantization for image compression // *Chinese Physics*. – 2006. – Vol. 15. – № 12.
60. Ferreira A., Sharma G., Mavroidis C. New trends in bio-nanorobotics using virtual reality technologies // *Proceedings of the 2005 IEEE Intern. Conference on Robotics and Biomimetics*. (June 29 - July 3, Hong Kong and Macau). – 2005. – Pp. 89-94.
61. Wegrzni S., Klamka J., Znamirovski L. et all. Nano and quantum systems of informatics // *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Ser. Technical Sciences*. – 2004. – Vol. 52. – № 1.
62. Furia C.A. Quantum informatics: A survey // *Calif. Inst. Techn. Publ.* – 2006. – [Электронный ресурс]. URL: <http://home.dei.polimi.it/furia/publs/quantuminformatics06.pdf>.
63. Schaller G., Schützhold R. Quantum algorithm for optical-template recognition with noise filtering // *Physical Review*. – 2006. – Vol. A74. – № 1.
64. Perus M., Bischof H., Loo C.K. Quantum-implementable selective reconstruction of high-resolution images // *Applied Optics*. – 2004. – Vol. 43. – № 33.
65. Jozsa R. Quantum effects in algorithms // *Proc. 1st International Conference on Quantum Computation and Quantum Communication*. – Palm Springs. February 1998. – [Электронный ресурс]. URL: <http://xxx.lanl.gov/ps/quant-ph/9805086>.
66. Svore K.M., Aho A.V., Chuang I. et all. A layered software architecture for quantum computing design tools // *Computer*. – 2006. – Vol. 39. – № 1. Pp. 74-83.
67. Litvintseva L.V., Ulyanov S.V. Design of self-organized intelligent control systems based on quantum fuzzy inference: Intelligent system of systems engineering approach // *IEEE Intern. Conference on Systems, Man and Cybernetics*. 2005. (Hawaii, USA, 10-12 Oct. 2005). – Vol. 4. – Pp. 3835-3840.
68. Litvintseva L.V., Ulyanov S.V., Ulyanov S.S. Quantum fuzzy inference for knowledge base design in robust intelligent controllers // *J. of Comp. and Systems Sci. Intern.* – 2007. – Vol. 46. – № 6.
69. Yukalov V.I., Sornette D. Quantum decision theory as quantum theory of measurement // *Physics Letters*. – 2008. – Vol. A372. – Pp. 6867-6871.
70. Styer D.F., Balkin M.S., Becker K.M. et all. Nine formulation of quantum mechanics // *Am. J. Phys.* – 2002. – Vol. 70. – № 6. – Pp. 288-297.
71. Passon O. How to teach quantum mechanics // *Eur. J. Phys.* – 2004. – Vol. 25. – № 4. – Pp. 765-769.
72. Grau B.C. How to teach basic quantum mechanics to computer scientists and electrical engineers // *IEEE Trans. Educations*. – 2004. – Vol. 26. – № 1. – Pp. 1-7.
73. Flores E., Osler T.J. The tautochrone under arbitrary potentials using fractional calculus // *Am. J. Phys.* – 1999. – Vol. 67. – № 8. – Pp. 718-722.
74. Haws L., Kiser T. Exploring the brachistochrone problem // *Amer. Math. Monthly*. – 1995. – Vol. 102. – № 4. – Pp. 328-336.
75. Gemmer J.A., Nolan M., Umble R. Generalizations of the brachistochrone problem // *arXiv: 0612152v2 [math-ph]*. – 27 Jan 2009.
76. Gemmer J.A. Generalization of the brachistochrone problem. A Senior Thesis. Millersville Univ. – 2006. 32P.
77. Goldstein H.F., Bender C.M. Relativistic brachistochrone // *J. Math. Phys.* – 1986. – Vol. 27. – № 2. – Pp. 507-511.
78. Scarpello G. M., Ritelli D. Relativistic brachistochrone under electric or gravitational uniform field // *Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM)*. – 2006. – Vol. 86. – № 9. – Pp. 736-743.
79. Kamath S.G., Sreedhar V.V. Classical radiation from relativistic charge accelerated along a brachistochrone // *Phys. Review*. – 1987. – Vol. 36. – № 5. – Pp. 2478-2481.
80. Kamath S.G. Relativistic tautochrone // *J. Math. Phys.* – 1992. – Vol. 33. – № 3. – Pp. 934-940.