

УСТОЙЧИВОСТЬ, УПРАВЛЯЕМОСТЬ И РОБАСТНОСТЬ КОГНИТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ: ТЕРМОДИНАМИКА ЭВОЛЮЦИОННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Зрелов Петр Валентинович¹, Кореньков Владимир Васильевич²,
Тятюшкина Ольга Юрьевна³, Ульянов Сергей Викторович⁴

¹Кандидат физико-математических наук, начальник отдела;
Объединенный институт ядерных исследований,
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, д. 6;
e-mail: zrelov@jinr.ru.

²Директор лаборатории;
Объединенный институт ядерных исследований;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, д. 6;
Доктор технических наук, заведующий кафедрой;
Государственный университет «Дубна»;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: korenkov@jinr.ru.

³Кандидат технических наук, доцент;
Государственный университет «Дубна»;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: tyatyushkina@mail.ru.

⁴Доктор физико-математических наук, профессор;
Государственный университет «Дубна»;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
Ведущий научный сотрудник;
Объединенный институт ядерных исследований;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, д. 6;
e-mail: ulyanovsv@mail.ru.

Рассмотрены информационные и физические (энтропийные и энергетические) закономерности, а также особенности модели квантового сильного искусственного вычислительного интеллекта в виде самоорганизующейся интеллектуальной системы управления. Модель основана на принципах минимальной информационной энтропии (в «интеллектуальном» пространстве состояний сигналов управления) и минимальной обобщенной термодинамической мере производства энтропии в единой системе «объект управления + интеллектуальный когнитивный регулятор».

Ключевые слова: Квантовый алгоритм самоорганизаций, неточные знания, термодинамика информационных процессов, когнитивные системы управления.

Для цитирования:

Зрелов П. В., Кореньков В. В., Тятюшкина О. Ю., Ульянов С. В. Устойчивость, управляемость и робастность когнитивного управления: Термодинамика эволюционных информационных процессов // Системный анализ в науке и образовании: сетевое научное издание. 2021. № 3. С. 102–125. URL : <http://sanse.ru/download/448>.

**STABILITY, CONTROLABILITY AND ROBUSTNESS OF COGNITIVE CONTROL:
THERMODYNAMICS OF INFORMATION EVOLUTION PROCESSES****Zrelov Petr V.¹, Korenkov Vladimir V.², Tyatyushkina Olga Yu.³, Ulyanov Sergey V.⁴**

¹PhD in Physico-mathematical sciences, Department head;
Joint Institute for Nuclear Research,
6 Joliot-Curie Str., Dubna, Moscow region, 141980, Russia;
e-mail: zrelov@jinr.ru.

²Laboratory Director;
Joint Institute for Nuclear Research;
Joliot-Curie Str., Dubna, Moscow region, 141980, Russia;
Grand PhD in engineering, head of the Department;
Dubna State University;
19 Universitetskaya Str., Dubna, Moscow region, 141980, Russia;
e-mail: korenkov@jinr.ru.

³PhD in Engineering sciences, associate professor;
Dubna State University,
Institute of the system analysis and management;
19 Universitetskaya Str., Dubna, Moscow region, 141980, Russia;
e-mail: tyatyushkina@mail.ru.

⁴Grand PhD in Physical and Mathematical Sciences, professor;
Dubna State University;
19 Universitetskaya Str., Dubna, Moscow region, 141980, Russia;
Leading Researcher of LIT JINR;
Joint Institute for Nuclear Research;
6 Joliot-Curie Str., Dubna, Moscow region, 141980, Russia;
e-mail: ulyanovsv@mail.ru

Informational and physical (entropy and energy) consistent patterns, as well as features of a model of quantum strong artificial computational intelligence in the form of a self-organizing intelligent control system, are considered. The model is based on the principles of minimum information entropy (in the “intelligent” space of states of control signals) and the minimum generalized thermodynamic measure of entropy production in a single system “control object + intelligent cognitive controller”.

Keywords: Quantum algorithm of self-organization, imperfect knowledge, thermodynamics of information processes, cognitive control systems.

For citation:

Zrelov P., Korenkov V., Tyatyushkina O., Ulyanov S. Stability, controlability and robustness of cognitive control: thermodynamics of information evolution processes, 2021;(3):102–125(In Russ). Available from: <http://sanse.ru/download/448>.

Введение

Основным результатом применения процесса самоорганизации является гарантированная возможность достижения необходимого уровня надежности и гибкости (адаптивности) воспроизводимой структуры когнитивной интеллектуальной системы управления. Кратко рассмотрены основные физические принципы процессов управления, позволяющие устанавливать взаимосвязь между качественными характеристиками динамического поведения объекта управления (ОУ) и исполнительным устройством САУ: устойчивостью, управляемостью и робастностью управления. Для этой цели используются информационный и термодинамический подходы, объединяющие однородным условием критерии динамической устойчивости (функция Ляпунова), управляемости и робастности.

1. Термодинамическое распределение и соотношение критериев устойчивости, управляемости и робастности интеллектуального управления

Рассмотрим динамический ОУ, описываемый (в общем виде) уравнением

$$\frac{dq}{dt} = \varphi(q, t, S(t), u(t)), \quad (1)$$

где q – вектор обобщенных координат, описывающий динамическое поведение ОУ, u – управляющая сила (выход исполнительного устройства САУ), t – время, $S(t)$ – производство энтропии ОУ и регулятором.

Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости динамической системы, описываемой уравнением (1) определяются физическими ограничениями на вид функции Ляпунова, которая имеет два важных свойства: это строго положительная функция от обобщенных координат, т.е., $V > 0$ (условие 1); полная производная по времени от функции Ляпунова является неположительной функцией, $\frac{dV}{dt} \leq 0$ (условие 2).

Дополнительные расширения понятия функции Ляпунова в виде информационных функций Ляпунова на основе связи с обобщенными моделями информационной энтропии рассмотрены в 3.1.

Согласно условиям 1) и 2) в качестве обобщенной функции Ляпунова выберем следующую функцию:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i^2 + \frac{1}{2} S^2, \quad (2)$$

где $S = S_p - S_c$ – производство энтропии в открытой системе «ОУ + регулятор»; S_p – производство энтропии в ОУ, S_c – производство энтропии в регуляторе (в исполнительном устройстве САУ).

Примечание. Отметим, что система (1) является открытой динамической системой в термодинамическом смысле, а основной задачей регулятора является снижение энтропии динамического поведения ОУ. Поэтому стоит знак вычитания энтропии, производимой регулятором (а не плюс, как в случае замкнутой термодинамической системы), что приводит к понятию негэнтропии Бриллюэна. Введение энтропийных характеристик в (2) возможно в силу скалярного свойства энтропии как функции времени, $S(t)$.

Первое условие для функции Ляпунова (2) выполняется автоматически.

Потребуем выполнения второго условия $\frac{dV}{dt} \leq 0$. В этом случае полная производная от функции Ляпунова, описанной в (2) имеет вид:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} \sum 2\dot{q}_i q_i + \frac{1}{2} 2S \cdot \dot{S} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i q_i + S\dot{S} = \sum_{i=1}^n q_i \cdot \varphi(q, t, S(t), u) + (S_p - S_c)(\dot{S}_p - \dot{S}_c).$$

Таким образом, учитывая соотношение (1), имеем

$$\frac{dV}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^n q_i \cdot \varphi(q, t, S(t), u)}_{\text{управляемость}} + \underbrace{(S_p - S_c) \cdot (\dot{S}_p - \dot{S}_c)}_{\text{робастность}} \leq 0. \quad (3)$$

устойчивость
робастность

На рис. 1 показана взаимосвязь между функцией Ляпунова и производством энтропии в ОУ и в САУ.

Уравнение (3) описывает физический закон качества управления с позиции ограничений и требований второго закона термодинамики и объединяет в аналитической форме различные меры качества управления типа: устойчивость, управляемость и робастность, поддерживающие требуемую надёжность и точность управления.

Следовательно, взаимосвязь между устойчивостью по Ляпунову и робастностью, описанной уравнением (3), является основным физическим законом для проектирования САУ. Этот закон является основой для прикладной технологии проектирования БЗ робастных ИСУ (с различными уровнями интеллектуальности [1, 2]) с использованием технологий мягких вычислений¹.

Примечание. Практическое применение физического закона процессов управления (3) к традиционным задачам, таким как оценки точности (грубости) линеаризации моделей ОУ, наблюдаемости параметров процессов управления и др., рассмотрено в [1]. Здесь отметим, что член $\sum_i q_i \dot{q}_i$ характеризует дополнительную возможность работы с физической моделью ОУ без применения математической модели, используя непосредственно измерение динамического поведения ОУ. В этом случае имеем обобщение модели «чёрного ящика» ОУ.



Рис. 1. Термодинамический критерий качества робастного управления

2. Информационные условия и ограничения на процессы когнитивного управления

Уравнение (3) связывает в аналитической форме такие качественные понятия теории управления *и* как устойчивость, управляемость и робастность на основе понятия энтропии феноменологической термодинамики с учетом совершения полезной работы регулятора.

Такой подход позволяет, как отмечалось ранее, найти такое управление *и*, которое имеет необходимое распределение между уровнями устойчивости, управляемости и робастностью, и позволяет достигать цели управления в нестандартных ситуациях с минимальным расходом полезного ресурса за счет применения в качестве функции пригодности в генетическом алгоритме минимум производства обобщенной энтропии, входящей в правую часть (3).

¹ Один из соавторов (С.В. Ульянов) в 1975г. в Брюсселе плодотворно обсуждал с И.Р. Пригожиным на семинаре «Синергетика, термодинамика и нелинейная динамика» вопросы возможной связи феноменологической термодинамики с динамической устойчивостью и приносит глубокую благодарность за полезные замечания по поводу интерпретации (2) и (3) для патента [2].

Для оценки информационных возможностей интеллектуального когнитивного регулятора рассмотрим важную связь между термодинамической S и информационной H энтропиями.

Пример: Термодинамическая интерпретация информационной энтропии Шеннона – эквивалентность мер энтропий. Рассмотрим для переменной X т.н. зета-функцию Хассе-Вейля (HW – Hasse-Weil) следующего вида $Z(X, t) = \prod_{r \geq 1} (1 - t^r)^{-a_r}$. При замене переменных $t = q^{-s}$ можно обозначить функцию зета-функцию Хассе-Вейля $Z(X, q^{-s})$. Согласно [3, 4] информационная энтропия Шеннона $H(X, s)$ для вероятностного распределения $P(n, x) = \frac{t^n}{Z^{HW}(X, t)}$, $n \in X$ имеет вид $H(X, t) = -\sum_{n,x} P(n, x) \log P(n, x)$. При $t = q^{-s}$ можно $H(X, s)$. Оказалось (см. в [4], 6.2.1. Lemma) имеем между информационной энтропией Шеннона и зета-функцией Хассе-Вейля $Z^{HW}(X, q^{-s})$ следующее соотношение $H(X, s) = \left(1 - s \frac{d}{ds}\right) Z^{HW}(X, q^{-s})$. Для свободной энергии F физической системы $F = -\log Z(\beta)$, $\beta = \frac{1}{T} > 0$, T – температура, и т.н. частной функции $Z(\beta)$ как частный случай функции $Z^{HW}(X, q^{-s})$ приведенная Лемма показывает, что информационная энтропия Шеннона $H(X, s)$ полностью согласуется с термодинамической энтропией $S = \left(1 - \beta \frac{\partial}{\partial \beta}\right) \log Z(\beta)$. В этом случае зета-функция Хассе-Вейля $Z^{HW}(X, q^{-s})$ идентифицируется частной функции $Z(\beta)$ физической системы с Гамильтонианом H таким образом, что выполняется соотношение $\text{Tr}(e^{-\beta H}) = Z^{HW}(X, q^{-\beta})$. Тогда выражение для термодинамической энтропии совпадает с соотношением для информационной энтропии Шеннона для распределения вероятностей следующего вида $P(n) = \frac{e^{-\beta \lambda_n}}{Z(\beta)}$ при $Z(\beta) = \text{Tr}(e^{-\beta H})$ и $\text{Spec}(H) = \lambda_n$. Так как имеем:

$$\begin{aligned} S &= -\sum_n P(n) \log P(n) = \sum_n P(n) \log Z(\beta) - \beta \sum_n P(n) \lambda_n = \\ &= \left(\left[\sum_n P(n) = 1 \right] \log Z(\beta) - \left[\sum_n P(n) \lambda_n = \frac{\partial}{\partial \beta} \log Z(\beta) \right] \right) = \\ &= \left(1 - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \log Z(\beta), \end{aligned}$$

где $\sum_n P(n) \lambda_n = \frac{\partial}{\partial \beta} \log Z(\beta)$.

Таким образом, в результате вычислений имеем прямое доказательство эквивалентности мер энтропий $S = \left(1 - \beta \frac{\partial}{\partial \beta}\right) \log Z(\beta) = -\sum_n P(n) \log P(n) = H$.

Рассмотрим теперь (3) с учетом приведенной связи термодинамической энтропии с информационной энтропией Шеннона. Термодинамическое определение S и информационной H энтропий связаны соотношением фон Неймана [1] в виде: $S = kH = -k \sum_i p_i \ln p_i$, где $k \approx 1.38 \times 10^{-23}$ Дж/К и является постоянной Больцмана. Подставим в уравнение (3) вместо $S(t)$ информационную энтропию Шеннона H . В результате получим

$$\frac{dV}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^n q_i \cdot \varphi(q, t, k(H_p - H_c), u)}_{\text{управляемость}} + \underbrace{k(H_p - H_c) \cdot (H_p - \dot{H}_c)}_{\text{робастность}} \leq 0. \quad (4)$$

устойчивость

Таким образом, уравнение (4) связывает также устойчивость, управляемость и робастность, но уже на основе информационной энтропии Шеннона, позволяющее также определять управление u для гарантированного достижения цели управления в нештатных ситуациях с требованием минимального количества информации о внешней среде и о состоянии объекта управления. Следовательно, система уравнений (3) и (4) составляют систему уравнений, определяющая такое управление u , которое гарантирует достижение цели управления в нештатных ситуациях с минимальным расходом полезного ресурса и минимально требуемой исходной информации.

Таким образом, уравнения (3) и (4) включают в себя перечисленные возможности применения физической или информационной энтропий проектируемого управления u в качестве полезного ресурса для достижения глобальной робастности ИСУ.

3. Информационно-термодинамический закон квантовой самоорганизации интеллектуального управления

Как отмечалось, уравнения (3) и (4) составляют систему уравнений, определяющая такое управление u , которое гарантирует достижение цели управления в нештатных ситуациях с минимальным расходом полезного ресурса и минимально требуемой исходной информации. Рассмотрим некоторые особенности связи понятий количества информации и физической энтропии в свете приведенных уравнений (3) и (4). Так определение физической энтропии дает возможность количественной формулировки второго закона термодинамики, который в изолированной системе запрещает процессы, сопровождающиеся уменьшением энтропии. Достаточно обратить внимание на формулировку связи функции Ляпунова и производства энтропии для замкнутой в термодинамическом смысле системы на рис. 1 в виде:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{1}{T} \frac{dV}{dt}.$$

Из определения функции Ляпунова динамической устойчивости эволюции системы $V > 0$, $\frac{dV}{dt} \leq 0$, что приводит к условию второго закона термодинамики $dS \geq 0$ для замкнутой системы в термодинамическом смысле.

При этом, однако, если возможен приток информации dI о системе, т.е. если физическая система является изолированной лишь в тепловом, но не в информационном отношении, то указанный закон следует обобщить [5,6], заменив неравенство $dS \geq 0$ неравенством $dS + dI \geq 0$. Поэтому, если имеется приток информации, то можно тепловую энергию системы превратить в механическую без помощи холодильника.

Из приведенного следует, что возможно построить вечный двигатель второго рода, питающийся информацией. Особо подчеркнем, что информационная форма обобщения второго закона термодинамики не отменяет его первоначальной формулировки. Отсюда следует заключение о необходимости энергетических затрат при измерении координат физической системы и записи этой информации. Если система находится при температуре T , то для получения и записи количества информации dI о ней необходимо потратить как минимум TdI энергии. В противном случае соединение автоматического измерителя и информационного преобразователя тепловой энергии в механическую дало бы вечный двигатель второго рода. Вывод о необходимости минимальных энергетических затрат распространяется также на физические каналы с шумом, соответствующим заданной температуре T .

Таким образом, второй закон термодинамики накладывает некоторые ограничения на возможности физической реализации информационных систем, в частности автоматов-измерителей и каналов передачи информации. Максимальное количество тепловой энергии, переходящее в работу, равно произведению абсолютной температуры на количество приходящей информации Больцмана. Приток информации о физической системе позволяет переводить тепловую энергию в работу без передачи

части тепловой энергии холодильнику. Информация в этом смысле является также физическим процессом, способный создавать ресурс для совершения дополнительной полезной работы.

Пример: Демон Максвелла. Возможность описанного обобщения второго закона термодинамики на случай систем с притоком информации возникла давно в связи с обсуждением «демона Максвелла». Последний, открывая и закрывая дверцу в стенке между двумя сосудами в зависимости от того, с какой скоростью подлетает молекула к дверце, может создать разность или разность давлений, не совершая работы, нарушая второй закон термодинамики. В этом случае демону необходим приток информации. Пределы нарушения демоном второго закона термодинамики ограничены величиной приходящей информации. Это можно утверждать не только качественно, но и количественно, согласно закону $dS + dI \geq 0$, т.е. в виде точного количественного закона. Обозначим через dQ количество теплоты, прошедшее из термостата. Запишем изменение энтропии термостата в виде $dS_T = -\frac{dQ}{T}$. По первому закону термодинамики $dA = dQ - dU$ где $U = M[E]$ – внутренняя энергия системы, связанная со свободной энергией F известным соотношением $U = F + TS_x$. Дифференцируя последнее соотношение, имеем $dF = dU - TdS_x$. Второй закон термодинамики имеет в этом случае вид $dS_T + dS_x \geq 0$, $TS_x - dQ \geq 0$, что эквивалентно соотношению $dA \leq -dF$. Указанный энергетический переход совершается без изменения температуры системы. Это имеет место вследствие притока тепловой энергии из термостата, контакт с которой не должен прерываться. Тогда источником уходящей из системы механической энергии будет тепловая энергия термостата, которая будет превращаться в механическую работу.

Таким образом, если физическая система изолирована в тепловом отношении и о ней имеется количество информации I , то в ней возможны только такие процессы, для которых изменение суммарной энтропии превосходит $(-I)$: $\Delta S \geq -I$. При этом нижняя граница физически достижима. Под тепловой изоляцией имеется в виду, что тепловая энергия, которую при указанных процессах можно превратить в работу, берется из самой системы, т.е. термостат включен в данную систему.

Второй закон термодинамики, как известно, нарушается для процессов, связанных с тепловыми флуктуациями, т.е. является асимптотическим и не вполне точным. Можно дать уточненную формулировку: в теплоизолированной системе не могут происходить процессы, для которых приращение энтропии $\Delta S \leq -1$. Если брать энтропию в термодинамических единицах, то вместо 1 следует поставить постоянную Больцмана k . Тогда последнее соотношение примет вид $\Delta S \leq -k$. Соответственно в уточненной формулировке запрещены процессы, для которых $\Delta S + I \leq -1$ или $\Delta S_{\text{физ}} + kI \leq -k$. Член с количеством информации I здесь существенен, если $I \approx 1$.

Дальнейшие исследования уточнили роль квантового второго закона термодинамики в квантовой теории информации и взаимосвязь понятий работы диссипативных процессов с понятиями относительного количества информации Фишера, а также связи понятия производимой работы с количеством приходящей информации [7-16].

Пример. Так, например, работа диссипативных сил (как индикатор доступа к оценке затраченной работы системой) определяется в терминах меры свободной энергии ΔF (отличия от равновесного состояния) как $W_{\text{дисс}}(\Gamma, \lambda) = W(\Gamma, \lambda) - \Delta F$, где λ параметр протокола и $W(\Gamma, \lambda)$ означает усредненную работу, произведенную системой при воздействии внешних сил и является функцией положения в фазовом пространстве Γ . Работа диссипативных сил представляет также полное изменение производства энтропии системы как результат переноса потока тепла от действия внешних сил. Свободная энергия как мера различия конечных состояний системы называют также обратимой работой. Одновременно существует эквивалентное описание процессов с точки зрения статистического ансамбля реализации рассматриваемого процесса как последовательности бесконечно воспроизводимых траекторий данного процесса. Поэтому можно рассматривать работу диссипативных сил как усредненную величину $\langle W_{\text{дисс}}(\Gamma, \lambda) \rangle$. При этом существует связь между величиной $W_{\text{дисс}}(\Gamma, \lambda)$ и информационным расхождением Кульбак-Лейблера, введенного ранее, существует следующая связь: $\frac{\langle W_{\text{дисс}} \rangle}{kT} = S_{KL}(P_F | P_B)$, где P_F и P_B распределения плотности вероятностей в фазовом пространстве обратимых во времени процессов для данного момента времени. Таким образом, левая часть указан-

ного соотношения является тепловой энергией с постоянной Больцмана для температуры T , а правая часть представляет чисто информационную величину. Кроме того, если для распределений f и g

ввести оценку количества относительной информации Фишера в виде $S_{\text{RFI}}(f|g) = \int f \left| \nabla_{\Gamma} \left(\ln \frac{f}{g} \right) \right|^2 d\Gamma$,

то имеем соотношение $S_{\text{RFI}}(P_F|P_B) = \beta^2 \left\langle \left| \nabla_{\Gamma} W_{\text{дисс}}(\Gamma) \right|^2 \right\rangle_{P_F}$.

Таким образом, усредненный градиент работы диссипативных сил, производимой переходным процессом от состояния равновесия эквивалентен расстоянию между прямым и обратным распределениями в фазовом пространстве, которое определяется количеством относительной информации Фишера.

Таким образом, уравнения (3) и (4) включают в себя перечисленные возможности применения физической или информационной энтропий в качестве полезного ресурса для достижения глобальной робастности ИСУ.

Пример: Квантовая система с диссипацией. В уравнениях движения квантовых систем диссипация описывается феноменологически логарифмической нелинейностью и феноменологической постоянной γ . В общем случае эволюция диссипативных процессов рассматриваемой динамической системы с Гамильтонианом \mathbf{H} описывается матрицей плотности c в виде уравнения:

$$\dot{c} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{H}, c] + \gamma D(c), \tag{5}$$

где $D(c)$ есть диссипативный оператор. В (5) предполагается в дальнейшем, что $\dot{c}(t)$ зависит только от настоящего времени t , т.е. процесс без истории, $t' < t$. При $\gamma = 0$ имеем уравнение фон Неймана

$$\dot{c} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{H}, c], \tag{6}$$

решение которого сохраняет инвариант вида $\langle S \rangle = \text{Tr}cS$ и $S = -\text{ln}c$. Следует подчеркнуть, что решение уравнения (5) сохраняет инвариант как для чистых ($c^2 = c$), так и для смешанных ($c^2 \neq c$) состояний.

Для оператора c вводятся следующие аксиомы: 1) $\text{Tr}c = 1$; 2) $c(t)$ – эрмитов положительный оператор; 3) для двух несвязанных и независимых систем $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ имеем $c(t) = c_1 \otimes c_2$. По аналогии с введенными аксиомами для оператора $D(c)$ имеем:

$$1) \text{Tr}D(c) = 0; \quad 2) D(c)^\dagger = D(c); \quad 3) D(c_1 \otimes c_2) = D(c_1) \otimes c_2 + c_1 \otimes D(c_2).$$

Если ввести обозначение \tilde{D} и определить оператор \tilde{D} как $D(c) = \tilde{D}(c)c$, то получим

$$\tilde{D}(c_1 \otimes c_2)(c_1 \otimes c_2) = \tilde{D}(c_1)c_1 \otimes c_2 + c_1 \otimes \tilde{D}(c_2)c_2. \tag{7}$$

Выполняется следующее соотношение

$$\langle \tilde{D}(c_1 \otimes c_2) \rangle = \langle \tilde{D}(c_1) \rangle + \langle \tilde{D}(c_2) \rangle, \tag{8}$$

т.е. оператор $\tilde{D}(c)$ аддитивен.

Решение функционального уравнения (7) имеет вид:

$$\tilde{D}_1(c) = -\text{ln}c = S, \quad \tilde{D}_2(c) = \langle -\text{ln}c \rangle c \tag{9}$$

или комбинация из двух решений в (9).

Для выполнения аксиомы $\text{Tr}D(c) = 0$ (сохранение вероятности) следует определить оператор $\tilde{D}(c)$ в виде:

$$\tilde{D}(c) = S - \langle S \rangle I \tag{10}$$

или

$$\tilde{D}(c) = (\langle S - \langle S \rangle I \rangle) c . \tag{11}$$

Оказалось, что формы (10) и (11) не являются единственными.

В частности

$$D_A(c) = \frac{1}{2} [A, c]_+ - \langle A \rangle c , \tag{12}$$

где A является эрмитовым оператором и $[\square\square]$ – антикоммутиатор, и $A = A_1 + A_2$ удовлетворяет соотношению (7). Таким образом, из (5) следует обобщение (6) с учетом, например, (11) в виде

$$\dot{c} = \frac{1}{i\hbar} [H, c] + \gamma (\langle S - \langle S \rangle I \rangle) c . \tag{13}$$

Пример. Для локальной энтропии $S = -\ln c$ имеем $c = \exp(-S)$. Проинтегрируем данное выражение с учетом (13), т.е. имеем

$$\begin{aligned} \dot{c} &= -\int_0^1 \exp[-(1-u)S] \dot{S} \exp(-uS) du = \frac{1}{i\hbar} [H, \exp(-S)] + \gamma (S - \langle S \rangle I) \exp(-S) = \\ &= -\frac{1}{i\hbar} \int_0^1 \exp[-(1-u)] [H, S] \exp(-uS) du + \gamma \int_0^1 \exp[-(1-u)] (S - \langle S \rangle I) \exp(-uS) du. \end{aligned} \tag{14}$$

Из (14) и (13) следует:

$$\int_0^1 \exp[uS] \left(\dot{S} - \frac{1}{i\hbar} [H, S] + \gamma (S - \langle S \rangle I) \right) \exp(-uS) du = 0. \tag{15}$$

Так как член $\exp(uS)$ положителен, то из (15) следует

$$\dot{S} - \frac{1}{i\hbar} [H, S] + \gamma (S - \langle S \rangle I) = 0 \tag{16}$$

и обобщает ранее известные результаты. Из (16) следует непосредственно требование второго закона термодинамики

$$\frac{d}{dt} \langle S \rangle = \text{Tr}(\dot{S}c + S\dot{c}) = \gamma (\langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2) \geq 0 \tag{17}$$

при условии $\gamma > 0$.

Таким образом, термодинамический критерий физической реализуемости выполняется: исследуемая математическая модель корректна.

Пример. Допустим теперь, что матрица плотности диагональная с собственными значениями p_i и нормированными собственными векторами $|i\rangle$ (бра- и кэт- вектора в обозначениях Дирака). Тогда эволюция n -го состояния квантовой системы

$$c(t)|i(t)\rangle = p_i(t)|i(t)\rangle, \tag{18}$$

где c – положительно определенная форма с единичным следом. Поэтому в (18) имеем $p_i \geq 0$ и $\sum_i p_i = 1$. Дифференцируя (18) по времени t , получим

$$(\dot{c} - p_i I)|i\rangle = (p_i I - c) \frac{d}{dt} |i\rangle. \tag{19}$$

Используя обобщенное уравнение фон Неймана (13) и матричные элементы $|j\rangle$, получим

$$\frac{1}{i\hbar} H_{ij} (p_j - p_i) + \delta_{ij} \{ -\gamma (\ln p_i + \langle S \rangle) p_i - \dot{p}_i \} = (p_j - p_i) \left\langle j \left| \frac{d}{dt} \right| i \right\rangle;$$

$$\langle S \rangle = -\sum_i p_i \ln p_i; \quad H_{ij} = \langle i | H | j \rangle. \tag{20}$$

Диагональная часть (20) дает результат в виде

$$\dot{p}_i = -\gamma (\ln p_i + \langle S \rangle) p_i. \tag{21}$$

Тогда можно показать, что $\langle S \rangle$ является неубывающей функцией, т.е.

$$\frac{d}{dt} \left(\langle S \rangle = -\sum_i p_i \ln p_i \right) = \gamma \sum_i (\langle S \rangle + \ln p_i) p_i \ln p_i = \gamma (\langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2) \geq 0. \tag{22}$$

Рассмотрим (21) для системы с двумя состояниями. В этом случае имеем два собственных значения для матрицы плотности с : p и $q=1-p$.

Уравнение (21) принимает вид простого дифференциального уравнения для функции p :

$$\dot{p} = \gamma (\ln p + \langle S \rangle) p = \gamma p (1-p) \ln \left[\frac{1-p}{p} \right], \tag{23}$$

где $\langle S \rangle = -p \ln p - (1-p) \ln (1-p)$. Для $p=1/2$ имеем $\dot{p}=0$; для $p = \left(\frac{1}{2} + u \right)$ линеаризация уравнения (23) приводит к соотношению ($\dot{u} = -\gamma u$) и тогда $u = u_0 \exp \{ -\gamma (t - t_0) \}$, т.е.

$$p = \frac{1}{2} + \left(p_0 - \frac{1}{2} \right) \exp \{ -\gamma (t - t_0) \}. \tag{24}$$

Из (24) следует, что при $t \rightarrow \infty$ следует экспоненциальная задержка перехода системы к равновесию.

На рис. 2 показаны графики значений энтропии $\langle S \rangle$ и \dot{p} .

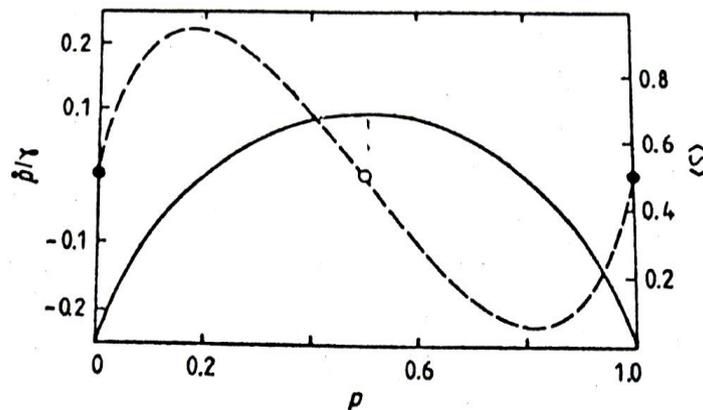


Рис. 2. Графики зависимости энтропии и вероятности от параметров системы

Устойчивое (максимум энтропии) и неустойчивые стационарные распределения, как следует из рис. 2, являются циклическими. При замене переменных $x = (1-p)/p$ в (21) интегрирование дает

$$p(t) = \left[1 + \left(\frac{1}{p_0} - 1 \right) \exp[-\gamma(t-t_0)] \right]^{-1}. \tag{25}$$

Из (25) следует, что при $t \rightarrow \infty$ функция $p(t)$ стремится к состоянию равновесия , при $p_0 \neq 0$.

На рис. 3 при различных $p_0 \neq 0$ показаны графики поведения $p(t)$.

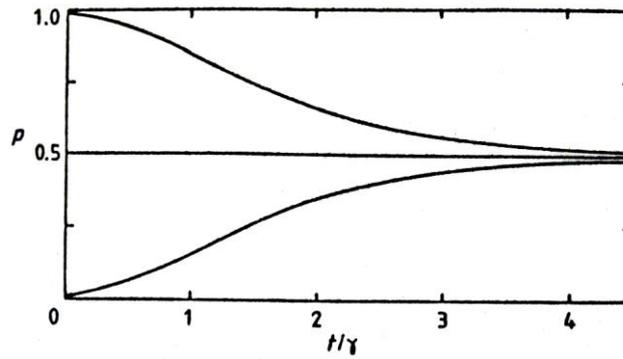


Рис. 3. График поведения функции $p(t)$

Уравнение фон Неймана может быть обобщено на случай взаимодействия с термостатом в виде:

$$\dot{c} = \frac{1}{i\hbar} [H, c] + \gamma \left\{ (S - \langle S \rangle I)c - \beta \left(\frac{1}{2} [H, c]_+ - \langle H \rangle c \right) \right\}, \tag{26}$$

где $[H, c]_+ = Hc + cH$ – антикоммутатор; β – действительная константа связи.

При $\beta \ll 1$ (низкая температура термостата) член $\gamma(S - \langle S \rangle)$ может быть опущен и из (26) следует

$$\dot{c} = \frac{1}{i\hbar} [H, c] - \tau \left(\frac{1}{2} [H, c]_+ - \langle H \rangle c \right), \quad \tau = \beta\gamma. \tag{27}$$

Уравнение (26) обладает двумя особенностями: 1) из-за наличия члена $\langle H \rangle$ является нелинейным; 2) чистые состояния остаются чистыми при эволюции системы для $c = |\psi\rangle\langle\psi|$. Тогда уравнение (27) может быть записано как нелинейное уравнение Шредингера в виде:

$$|\dot{\psi}\rangle = \frac{1}{i\hbar} H|\psi\rangle - \frac{1}{2}\tau(H - \langle H \rangle I)|\psi\rangle. \tag{28}$$

Уравнение (28) совпадает с уравнением Гисина.

При $\langle H \rangle = \text{const}$ имеем динамическую квантовую систему со связями и в этом случае параметр β уже не является постоянным.

Примечание. В общем случае ожидаемое значение наблюдаемой величины N удовлетворяет, согласно (13), следующему уравнению

$$\frac{d}{dt} \langle N \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [N, H] \rangle + \gamma \left[\langle NS \rangle - \langle N \rangle \langle S \rangle - \beta \left(\frac{1}{2} \langle [N, H]_+ \rangle - \langle N \rangle \langle H \rangle \right) \right] + \left\langle \frac{\partial N}{\partial t} \right\rangle. \tag{29}$$

В частности, если наблюдаемая $N \equiv H$, то

$$\frac{d}{dt} \langle H \rangle = \gamma \left[\langle HS \rangle - \langle H \rangle \langle S \rangle - \beta \left(\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 \right) \right]. \tag{30}$$

При $\langle H \rangle = \text{const}$ из (30) находим значение параметра β в виде

$$\beta = \frac{\langle HS \rangle - \langle H \rangle \langle S \rangle}{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2},$$

что совпадает с ранее исследованными феноменологическими моделями Veretta.

Таким образом, получили обобщение результатов на квантовые динамические системы и критерии физической реализуемости соответствующих математических моделей [17].

3.1. Информационные функции Ляпунова и квантовая функция Фишера

В квантовой механике гильбертово пространство состояний связано с геометрией пространств, в которых введены меры различимости состояний и имеется возможность определения чистых состояний и смешанных состояний. Метрика данной различимости связана естественным образом с представлением длины траектории вычисления квантового алгоритма и естественным вопросом является выявление отношения между данной длиной и вычислительной сложностью программы. В этом случае траектория в Гильбертовом пространстве, определяемая квантовым алгоритмом, является геодезической в метрике Фубини-Штади – Fubiny-Study (FS).

Пример: Квантовые геометрические аналоги классических моделей кривизны в информационной геометрии искривленных пространственно-временных континуумов. Рассмотрим в качестве примера факты геометрии пространства квантовых состояний. Расстояние между двумя квантовыми состояниями $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ можно определить различными способами. Например, широко применяемые меры расстояния Fubiny-Study (FS) и Wootters (W) определяются соответственно в следующем виде:

$$d^{(FS)}(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) = \gamma \left(\sqrt{1 - |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2} \right) \text{ и } d^{(W)}(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) = \arccos \gamma |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|,$$

где γ – постоянная величина. Несмотря на внешнее различие, данные меры расстояния эквивалентно определяют расстояние между квантовыми состояниями. Так для близких состояний, когда $|\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2 = 1 - \delta^2$, где δ – малая величина, имеем соотношение $d^{(FS)} = d^{(W)} = \gamma\delta$. Аналогичным образом определяются другие меры расстояний (см., ниже). Аналогично данному результату элементы длины для семейства (множества) векторов квантовых состояний $|\psi(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^k)\rangle$ параметризованных k параметрами $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^k$, определенные на заданных метриках расстояния, эквивалентны для различных определений расстояния $ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j$ с метрическим тензором

$$g_{ij} = \gamma^2 \text{Re}(\langle \psi_i | \psi_j \rangle - \langle \psi_i | \psi \rangle \langle \psi | \psi_j \rangle), \text{ где } |\psi_i\rangle = \frac{\partial}{\partial \xi^i} |\psi(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^k)\rangle.$$

Приведенная форма метрики расстояния применяется на практике многими исследователями и обычно принимается $\gamma = 2$. Тогда для двумерного случая g_{ij} является метрическим тензором сферы с единичным радиусом (сфера Блоха).

При рассмотрении эволюции квантового состояния, описываемой уравнением Шредингера, вводится понятие скорости квантовой эволюции $\mathcal{G} = \frac{ds}{dt} = \frac{\gamma}{\hbar} \sqrt{\langle (\Delta H)^2 \rangle}$, где $\Delta H = H - \langle H \rangle$. Рассмотрим теперь определение геодезической кривой на пространстве векторов квантовых состояний. Геодезическая линия (однопараметрическое множество векторов квантовых состояний), соединяющая два вектора состояний $|\psi_0\rangle$ и $|\psi_1\rangle$ можно определить как линейную комбинацию (аналог суперпозиции)

$$|\psi(\xi)\rangle = C [(1 - \xi)|\psi_0\rangle + \xi|\psi_1\rangle e^{i\phi}], \tag{31}$$

где ξ – параметр, принимающий значения от 0 до 1.

Примечание. Фазовый множитель $e^{i\phi}$ выбирается следующим образом. Векторы $|\psi_0\rangle$ и $|\psi_0\rangle e^{i\phi_0}$ определяют эквивалентные квантовые состояния. Поэтому требуется выполнение условия эквивалентности геодезических линий определенных между состояниями $|\psi_0\rangle$ и $|\psi_1\rangle$, и состояниями $|\psi_0\rangle e^{i\phi_0}$ и $|\psi_1\rangle e^{i\phi_1}$. Данное условие выполняется, если выбрать $e^{i\phi} = \frac{\langle \psi_1 | \psi_0 \rangle}{|\langle \psi_1 | \psi_0 \rangle|}$. Условие нормализации

для параметра C определяется из выражения внутреннего произведения $\langle \psi(\xi) | \psi(\xi) \rangle = 1$ и имеет следующий вид:

$$C = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi(1-\xi)(1 - |\langle \psi_1 | \psi_0 \rangle|)}}.$$

Отметим, что геодезическая линия (31) является множеством состояний и существует много способов её параметризации. В геометрии квантовых состояний показано, что длина кривой в квантовом пространстве состояний не зависит от пути её параметризации [18,19].

Для вычисления длины геодезической линии удобно представлять определяющее её уравнение в виде

$$|\psi(\xi)\rangle = C \left[\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) |\psi_0\rangle + \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) |\psi_1\rangle e^{i\phi} \right], \quad (32)$$

где новый параметр $0 \leq \theta \leq \pi$ и константа нормализации $C = \frac{1}{\sqrt{1 + |\langle \psi_1 | \psi_0 \rangle| \sin \theta}}$.

Подчеркнем, что (31) и (32) адекватно описывают однопараметрическое семейство векторов квантовых состояний в виде геодезических линий. Используя определение метрики как $g_{ij} = \gamma^2 \text{Re}(\langle \psi_i | \psi_j \rangle - \langle \psi_i | \psi \rangle \langle \psi | \psi_j \rangle)$ для однопараметрического множества состояний (32) дает выражение $ds = \frac{\gamma}{2} \frac{\sqrt{1 - |\langle \psi_1 | \psi_0 \rangle|^2}}{(1 + |\langle \psi_1 | \psi_0 \rangle| \sin \theta)}$. Тогда длина геодезической линии, соединяющей состояния $|\psi_0\rangle$ и $|\psi_1\rangle$, определяется в виде

$$s = \int ds = \gamma \arccos |\langle \psi_1 | \psi_0 \rangle|. \quad (33)$$

Таким образом, выражение (33) для длины геодезической линии совпадает с выражением метрики Wootters расстояния между векторами квантовых состояний. Аналогично можно вычислить длину кривой (31), соединяющей состояния $|\psi_0\rangle$ и $|\psi_1\rangle$, для определенной фазы ϕ . Тогда геодезическая линия определяется как кривая минимальной длины на семействе кривых. Минимальная длина достигается при установленном выше условии $e^{i\phi} = \frac{\langle \psi_1 | \psi_0 \rangle}{|\langle \psi_1 | \psi_0 \rangle|}$ и эквивалентно метрике расстояния

Wootters. Рассмотрим теперь другой геометрический фактор – кривизна пространства и его квантовый аналог в пространстве векторов квантовых состояний.

Кривизна. Вектор состояния квантовой эволюции от одного параметра, такой как время t , и однопараметрического множества векторов состояний $|\psi(t)\rangle = \exp\{-iHt\} |\psi_0\rangle$, генерируемое гамильтонианом системы. Отклонение вектора состояний $|\psi(t)\rangle$ от геодезической линии, связывающей состояния $|\psi_0\rangle$ и $|\psi_1\rangle$, определяется через кривизну пространства. Для введения понятия кривизны рассмотрим случай эволюции из двух состояний $|\psi_0\rangle$ в $|\psi_1\rangle$. На первом этапе предположим, что осуществляется эволюция в течении отрезка времени Δt из начального состояния $|\psi_0\rangle$ в промежуточное состояние $|\psi'\rangle$ в виде $|\psi'\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H\Delta t} |\psi_0\rangle$ и далее в течении отрезка времени $\Delta t'$ из состояния $|\psi'\rangle$ в состояние $|\psi_1\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H\Delta t'} |\psi'\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(\Delta t + \Delta t')} |\psi_0\rangle$, где H - не зависящий от времени гамильтониан. Без потери общности в дальнейшем принимается $\Delta t = \Delta t'$. Отклонение квантовой эволюции от геодезической линии, связывающей состояния $|\psi_0\rangle$ и $|\psi_1\rangle$, может быть охарактеризовано максимальным значением величины $|\langle \psi' | \psi(\xi) \rangle|^2$ параметризованной ξ . При $\max |\langle \psi' | \psi(\xi) \rangle|^2 = 1$ состояние $|\psi'\rangle$ принадлежит геодезической. Отклонение $|\psi'\rangle$ от геодезической увеличивается с уменьшением величины

$\max |\langle \psi' | \psi(\xi) \rangle|^2$, соответственно. Обычно вводится следующее выражение $1 - \max |\langle \psi' | \psi(\xi) \rangle|^2 = \min(1 - |\langle \psi' | \psi(\xi) \rangle|^2)$, которое эквивалентно нулю, когда отклонение равно нулю, и положительно возрастает, когда отклонение увеличивается. Нетрудно заметить, что данное выражение эквивалентно метрике расстояния *Fubiny-Study*.

Дополнительная точка зрения на квантовый алгоритм может быть рассмотрена с позиции траекторий в пространстве унитарных преобразований. При заданной траектории $|\psi(s)\rangle$ квантового алгоритма можно определить оператор U таким образом, что выполняется соотношение $U|\psi(0)\rangle = |\psi(1)\rangle$ и определить программу как траекторию в пространстве унитарных операторов $O(s)$ и при этом выполняется $O(s=0)=1$ и $O(s=1)=U$. В этом случае вычислительная сложность заданной программы определяется количеством гейтов необходимых для определения реализации данной траектории квантового траектория. В этом случае рассматриваемая траектория генерируется однозначно унитарным оператором H , который идентифицируется как Гамильтониан системы, формирующий структуру квантового алгоритма и его эволюцию вдоль траектории. Тогда можно записать $O(t) = e^{-iHt} O(0) e^{iHt}$ и аналогично для $|\psi(t)\rangle$. В случае выполнения условия $[H, O(0)] \neq 0$ интересуются вопросом как потенциально простой начальный оператор $O(0)$ принимает в процессе эволюции во времени сложную структуру. Для заданной траектории $O(s)$ возможно ввести определение оператора Ляпунова L_s в виде решения уравнения Ляпунова:

$$\frac{L_s O(s) + O(s) L_s}{2} = \frac{dO(s)}{ds}.$$

Для найденного решения L_s можно определить функцию квантовой информации Фишера $F(s)$ как $F(s) = Tr [O(s) L_s^2]$. Естественным отношением между функцией квантовой информации Фишера и метрикой различимости состояний на Гильбертовом пространстве является введенная интуитивная геометрическая интерпретация сложности. Несложно представлять длину траектории в метрике пространства унитарных операторов, которая задается в виде обратной квантовой функции Фишера. По сути, данная метрика сложности имеет дуальный характер по отношению к стандартной метрике различимости, которая по своей сущности дуальности просто является соотношением неопределенности «время-энергия». Квантовая информация Фишера зависит от вариаций поведения системы во времени, в то время как энтропия является величиной равновесной и не зависит от изменений распределений вероятностей во времени. В связи с отмеченным, отношение между сложностью и энтропией с этой точки зрения отражает отношение между информацией о состоянии (энтропия) и относительное состояние во времени (сложность).

Допустим, что рассматривается траектория оператора $O(s)$ и определено однопараметрическое семейство собственного базиса $|\phi_n(s)\rangle$ в виде:

$$O(s) |\phi_n(s)\rangle = \rho_n(s) |\phi_n(s)\rangle.$$

В этом базисе имеем $O(s) = \sum_n \rho_n(s) |\phi_n(s)\rangle \langle \phi_n(s)|$. Рассмотрим уравнение Ляпунова для оператора траектории $O(s)$ и разрешим уравнение для определения L_s . Тогда имеем:

$$L_s = \sum_n \left(\frac{\partial_s \rho_n(s)}{\rho_n(s)} |\phi_n(s)\rangle \langle \phi_n(s)| + 2\rho_n(s) \sum_{m \neq n} L_{n,m} |\phi_n(s)\rangle \langle \phi_m(s)| + 2\rho_n(s) \sum_{m \neq n} L_{m,n} |\phi_m(s)\rangle \langle \phi_n(s)| \right),$$

где $|\partial_s \phi_n(s)\rangle = \sum_m L_{m,n} |\phi_m(s)\rangle$. Оператор Ляпунова L_s в случае, когда задан Гамильтониан эволюции H определяет траекторию $O(s) = e^{-iHs} O(0) e^{iHs}$. Применяя к $O(0)$ представление в виде $O(0) = \sum_n \rho_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n|$ как результат получаем $L_s = e^{iHs} L_0 e^{-iHs}$ с учетом, что [20]

$$L_0 = 2i \sum_{n,m} \frac{\langle \phi_m | [H, O(0)] | \phi_n \rangle}{\rho_m + \rho_n} | \phi_n \rangle \langle \phi_m |.$$

С определением функции оператора Ляпунова L_s определяется квантовая функция Фишера $F(s) = \text{Tr}[O(s)L_s^2]$. В этом случае $\text{Tr}[O(s)L_s] = 0$ и для случая временной эволюции с заданным Гамильтонианом квантовая функция Фишера является постоянной. При этом при определенной через временную эволюцию Гамильтониана сама квантовая функция Фишера также постоянная и определяется как $F = \text{Tr}[O(0)L_0^2]$.

Из изложенного следует, что при построении математической модели необходимо проверять ее корректность, устойчивость и условия термодинамического критерия физической реализуемости: нарушение хотя бы одного из этих условий ведет, по существу, к нарушению остальных условий. При этом необходимо, чтобы условие корректности и устойчивости исследуемой математической модели совпадали с соответствующим понятием их устойчивости. Этот вывод является обоснованием часто встречающейся в системной инженерии интуитивной замены понятия корректности обыкновенных дифференциальных уравнений на понятие их устойчивости.

Следовательно, выбор физического базиса проведения эксперимента и определение математического способа (задания критерия корректного описания) модели ОУ существенно влияют на качество интерпретации результата процесса обработки экспериментальных данных и извлечения объективных знаний из динамического поведения самого ОУ.

4. Информационно-термодинамические условия и ограничения на возможность совершения полезной работы на основе извлеченной информации

Современная физика (феноменологическая термодинамика) утверждает (и справедливо), что необходимо совершить полезную работу для извлечения количества информации о поведении исследуемой системы, затратив при этом дополнительный энергетический ресурс (потеряв полезную работу за счет возрастания энтропии в поведении исследуемого объекта и системы измерения извлекаемой информации – физический закон интеллектуальной ИТ образовательного процесса). В этом случае справедливы [21] следующие информационно-термодинамические ограничения:

$$W_{ext}^S \leq -\Delta F^S + k_B T I, \quad W_{cost}^S \geq k_B T I, \quad (34)$$

где W_{ext}^S означает количество извлекаемой работы из системы S (не путать с обозначением термодинамической энтропии S) и определяется количеством (квантово-классической взаимной) информации I , которая является мерой точности измерений и знаний о системе S и ограничено сверху; аналогично W_{cost}^S ограничено снизу и означает полную стоимость измерения и считывания информации; величина ΔF^S означает свободную энергию системы S ; величина $k_B T \ln 2$ (T – температура и k_B – постоянная Больцмана) означает количество работы, которое можно извлечь из термодинамического цикла и затратить на считывание одного бита информации (Ландауэр, 1961г.). Таким образом, согласно (34), существуют объективные границы на количество извлекаемых знаний из измерений поведения исследуемой системы, а знания позволяют совершать полезную работу.

Пример: Информационно-термодинамические оценки затрат ресурса на извлечение количества знаний из процессов измерения. В микросистемах термодинамические величины, такие как «работа», «тепло» и «внутренняя энергия» не являются постоянными величинами и флуктуируют. Случайные флуктуации могут нарушать второй закон термодинамики, но в среднем второй закон термодинамики на макроуровне выполняется, если начальное состояние системы находится в тепловом равновесии, т.е. $\langle \Delta F - W \rangle \leq 0$, где, как и ранее ΔF – свободная энергия, как мера различия между состояниями системы, W – совершаемая работа и знак $\langle \square \rangle$ означает усреднение по ансамблю множества состояний системы. Однако управление с обратной связью позволяет целенаправленно, выборочно манипулировать только флуктуациями так, что выполняется строгое неравенство $\Delta F - W > 0$. Данное выражение эквивалентно использованию информации о поведении системы [22], прототип демона

Максвелла. Термин «обратная связь» означает, что выбор стратегий управления зависит от результатов измерений на выходе системы управления. Другими словами, метод «управление с обратной связью» эквивалентен применению «систем управления с замкнутым контуром». Применение управления с обратной связью позволяет использовать информацию в качестве ресурса в виде свободной энергии системы [23]. Отметим, что Сцилард разработал модель преобразования одного бита информации в свободную энергию (или работу) в количестве $k_B T \ln 2$. Таким образом, второй закон термодинамики обобщается в виде $\langle \Delta F - W \rangle \leq k_B T I$. Здесь I означает количество взаимной информации, извлеченной измерением состояния системы, т.е. является величиной объективной [24,25].

Следовательно, Демон Максвелла (по типу Сциларда) является *активным интеллектуальным агентом*, который способен оценить вход (используемое содержание информации) и выход (приобретенную энергию) при управлении с обратной связью и реализует идею *преобразования информации в энергию*, и является информационно-термодинамическим решением обратной проблемы оценки потерь на извлечение информации о свойствах модели ОУ.

Благодаря синергетическому эффекту создается дополнительный информационный ресурс, и мультиагентная система способна решать сложные динамические задачи для выполнения командной работы. Данная задача не может быть выполнена каждым элементом (агентом) системы отдельно в различных средах без внешнего управления, контроля или координации, однако обмен знаниями и информацией позволяет выполнять полезную командную работу для достижения цели управления в условиях неопределенности исходной информации и ограничений на возможное потребление полезных ресурсов.

В частности, известно (см. пример ниже), что для систем управления с обратной связью объем извлекаемой полезной работы удовлетворяет неравенству

$$W_{\max}(t) = k \int_0^t T_{\min} I_c dt' \leq k T I_c, \quad (35)$$

где k – это постоянная Больцмана, $T_{\min}(t)$ интерпретируется системой как самая низкая достижимая температура во времени t для контроля обратной связи, предполагая $T_{\min}(0) = T$ и I_c определяет количество информации Шеннона (перенос энтропии), извлеченное системой из процесса измерения.

Пример: Информационно-термодинамический анализ интеллектуальной когнитивной системы управления. Рассмотрим структурную схему (на рис. 4) гибридной интеллектуальной когнитивной системы управления. Особенностью структурной схемы гибридной когнитивной ИСУ, представленной на рис. 4 является наличие двух взаимодействующих (нечеткого интеллектуального и когнитивного) регуляторов. В Предисловии и Введении подробно рассмотрено взаимодействие данных регуляторов. Здесь отметим, что БЗ интеллектуального технического регулятора и БЗ когнитивного регулятора создаются на основе единой программно-алгоритмической платформе – ОБЗ на мягких вычислениях, используя сигнал ошибки управления и соответствующие обучающие сигналы, описывающие динамическое поведение ОУ или ЭЭГ коры ГМ человека-оператора.

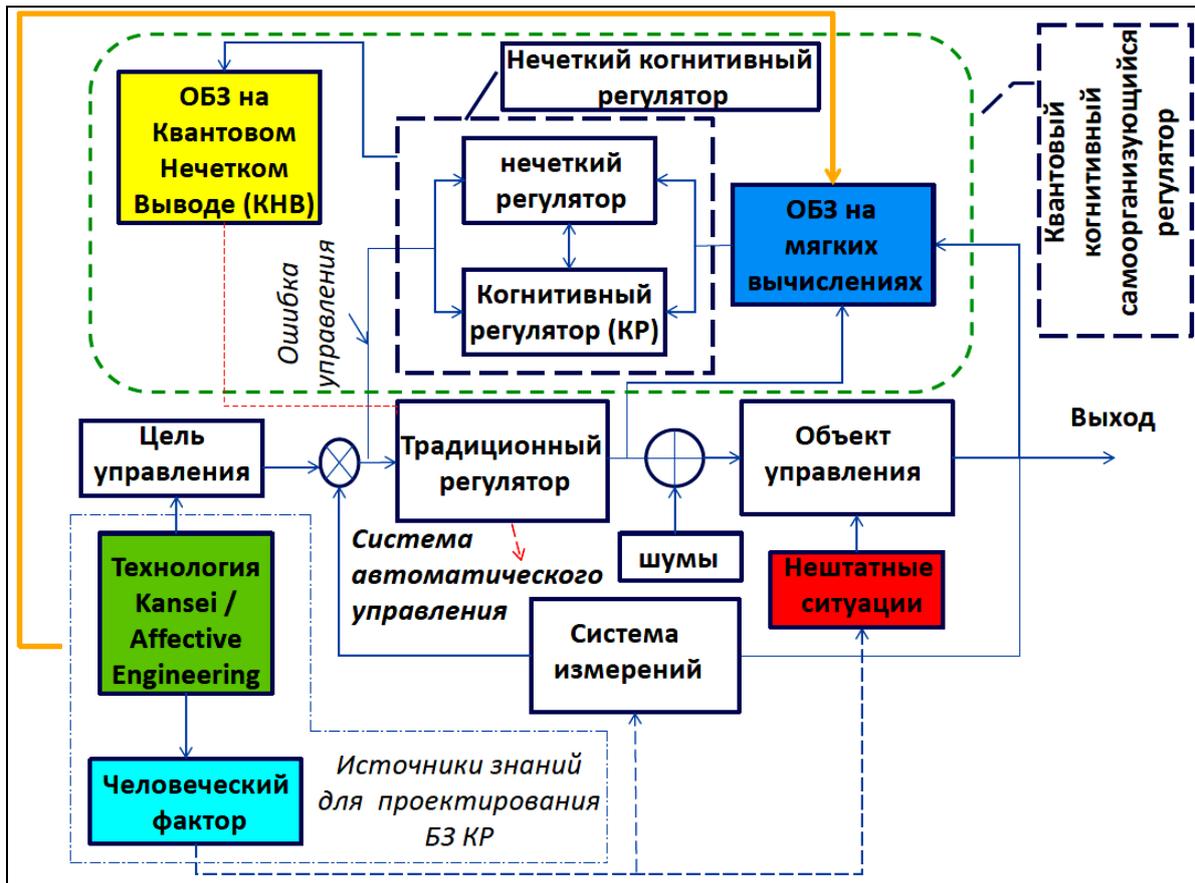


Рис. 4. Структурная схема гибридной интеллектуальной когнитивной системы управления

Ошибка управления содержит информацию о непредвиденной ситуации управления и поступает на входы рассматриваемых регуляторов. Выходные сигналы регуляторов отражают реакции БЗ, которые в общем случае являются неполными (imperfect KB) и могут привести к потере робастности системы управления. Оба сигнала поступают в блок КНВ, который осуществляет самоорганизацию неполных БЗ, формируя в реальном времени новую робастную БЗ гибридного квантового интеллектуального когнитивного регулятора.

Обобщением уравнений (3) и (4) является следующая система уравнений:

$$\underbrace{\frac{dV}{dt}}_{\text{устойчивость}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n q_i \cdot \varphi(q, t, k(S_{co} - (S_{Te} + S_{Ce})), u)}_{\text{управляемость}} + \underbrace{(S_{co} - (S_{Te} + S_{Ce})) \cdot (\dot{S}_{co} - (\dot{S}_{Te} + \dot{S}_{Ce}))}_{\text{робастность}} \leq 0, \quad (36)$$

$$\underbrace{\frac{dV}{dt}}_{\text{устойчивость}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n q_i \cdot \varphi(q, t, k(H_{co} - (H_{Te} + H_{Ce})), u)}_{\text{управляемость}} + \underbrace{(H_{co} - (H_{Te} + H_{Ce})) \cdot (\dot{H}_{co} - (\dot{H}_{Te} + \dot{H}_{Ce}))}_{\text{робастность}} \leq 0, \quad (37)$$

где $(S_{Te} + S_{Ce})$ и $(H_{Te} + H_{Ce})$ означают совместные термодинамические и информационные энтропии технического интеллектуального и когнитивного регуляторов соответственно.

Обсудим особенности соотношения (35) применительно к системе уравнений для интеллектуального когнитивного управления (36) и (37).

Известное выражение второго закона феноменологической термодинамики утверждает, что максимальное (усредненное) количество работы, извлекаемое из системы при взаимодействии с простым тепловым резервуаром, не может превышать количество свободной энергии и проявляет стремление к понижению при переходе системы из начального в конечное состояния. Однако, как следовало из анализа поведения теплового двигателя (тепловой машины) Сциларда, возможно нарушение такого ограничения при допущении предположения о доступности дополнительной информации интеллектуальному агенту, извлекающему на ее основе работу из тепловой машины (открытая система с информационным обменом). Для учета такой возможности второй закон феноменологической термо-

динамики обобщается на основе введения наблюдателя (демона) с контуром управления обратной информационной связью. В частности, показано, что при применении управления с обратной информационной связью количество извлекаемой работы W должно удовлетворять неравенству типа (34) следующего вида:

$$W \leq kTI_c, \quad (38)$$

где k – постоянная Больцмана, T – температура теплового резервуара, и I_c определяет т.н. «перенос энтропии» к регулятору от системы измерения [26, 27]. При этом предполагается, что при переходе от начального к конечному состоянию снижения свободной энергии не происходит. Имеется также возможность разработать протоколы обратных связей, позволяющие сформировать уравнения определения W применяя обратимые и «квазистатичные» преобразования. В первом приближении данного подхода определяется составляющая конечного времени для уравнения, определяющего W , которая характеризует максимальную работу, которую можно извлечь с применением управления с обратной связью, в терминах переноса энтропии. Результат описывается на основе исследования поведения существенно демпфированной системы на основе модели решения уравнения Ланжевена. Максимальное количество извлекаемой работы за период t , $W_{\max}(t)$, определяется [28] через интеграл вида:

$$W_{\max}(t) = k \int_0^t T_{\min} \dot{I}_c dt' \leq kTI_c(t). \quad (39)$$

Здесь $T_{\min}(t)$ интерпретируется как наименьшая температура, достигаемая системой за время t непрерывного управления с обратной связью при предположении, что в начальное значение равновесия системы $T_{\min}(0) = T$. Так как $T_{\min}(t) \leq T, \forall t$, верхняя граница в (39) получается из применения (38).

Количество переноса энтропии $I_c(t)$ определяется через количество передаваемой информации регулятору от системы измерений в интервале $[0, t]$. Поэтому оптимально применяемое количество переноса энтропии регулятором позволяет извлечь полезную (от $kT_{\min} \ln 2$) до $kT \ln 2$) единиц работу. Кроме того, для широкого класса динамических систем получено выражение для определения количества переноса энтропии $I_c(t)$, применимое как для случая непрерывного, так и дискретного времени. В частности, новое соотношение получено в замкнутой математической форме для определения количества переноса энтропии (вне зависимости от закона и применяемого вида обратной связью). Для линейных систем размерности, превышающих единицу, т.е. для динамических систем с квадратичным Гамильтонианом и имеющим контакт с тепловым резервуаром, показано выполнение следующего соотношения:

$$W_{\max}(t) \square k \int_0^t T_{\min} \dot{I}_c dt', \quad (40)$$

и выполняется равенство асимптотически $t \rightarrow \infty$, т.е. система находится в неравновесном состоянии. Более того, для всех состояний выполняется неравенство $W \leq kTI_c(t)$ и второй закон выполняется для конечных интервалов времени. Квадратичная форма Гамильтониана является типовой для систем с тепловыми флуктуациями при комнатной температуре, находящихся в состоянии с минимальной энергии. Теория оптимального управления дает возможность вычислить T_{\min} , и определить характер закона обратной связи, например, для линейных систем по принципу разделения переменных наблюдения параметров траекторий и управления. Оценка измерения траектории может быть дана эффективно на основе применения фильтра Калмана-Бьюси, который позволяет использовать насколько возможно максимально эффективно информацию, содержащуюся в измерениях на основе минимума вариаций оценки ошибки.

Пример. Рассмотрим систему, схема которой представлена на рис. 5 и состоящей из электрической емкости C , сопротивления R с тепловым шумом (тепловой резервуар) и контроллер обратной связи (демон) с возможным доступом к измерению показаний напряжения вольтметра

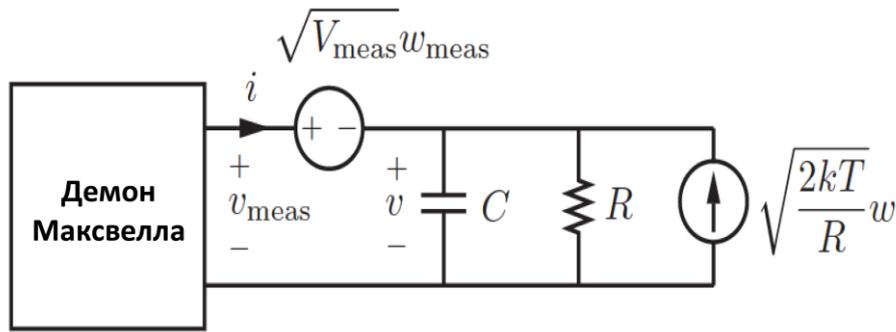


Рис. 5. Демон (регулятор с обратной связью) связан с емкостью, тепловой резервуар с температурой T , и шум напряжения в измерительной системе интенсивности V_{meas} .

Демон (см. ранее данное определение) имеет возможность наблюдать величину тока i и имеет доступ к измерению шума напряжения \mathcal{G}_{meas} . Резистор содержит случайный шум, описываемый моделью Джонсона-Найквиста. Схема на рис. 5 моделируется на основе существенно демпфированного уравнения Ланжевена следующего вида:

$$\tau \dot{\mathcal{G}} = -\mathcal{G} + Ri + \sqrt{2kTR}w, \quad \langle \mathcal{G}(0) \rangle = 0; \quad \mathcal{G}_{meas} = \mathcal{G} + \sqrt{V_{meas}}w_{meas}, \quad \langle \mathcal{G}(0)^2 \rangle = \frac{kT}{C},$$

где $\mathcal{G}(0)$ Гауссовский шум, w и w_{meas} некоррелированные Гауссовские белые шумы ($\langle w(t)w(t') \rangle = \langle w_{meas}(t)w_{meas}(t') \rangle = \delta(t-t')$). V_{meas} интенсивность измеримого шума, и $\tau = RC$ постоянная величина открытой системы. Измеримый шум $\sqrt{V_{meas}}w_{meas}$ рассматривается как модель случайного шума Джонсона-Найквиста в канале связи между емкостью и демона и резистивность которого не влияет на демона. Поток тепла к сопротивлению определяется как \dot{Q} и скорость извлекаемой демоном работы задается в виде \dot{W} , которые подчиняются первому закону термодинамики,

$$\dot{U} = \dot{Q} - \dot{W}, \quad \text{где } U = \frac{1}{2}C(\mathcal{G}^2) \equiv \frac{1}{2}kT_C, \quad \dot{Q} = \frac{k}{\tau}(T - T_C), \quad \dot{W} = -\langle \mathcal{G}i \rangle. \quad (41)$$

Эффективная текущая температура («кинетическая температура») емкости обозначается как T_C , а внутренняя энергия обозначается в виде U . Напряжение \mathcal{G}_{meas} является измеримой величиной и «питает» демона информацией: физически означает измерение флуктуирующего шума напряжения в емкости \mathcal{G} демоном.

Данная задача оптимизации решается в режиме [без информации о траекторной реализации $(\mathcal{G}_{meas})_0^t$] на основе метода динамического программирования. Состояние фильтра Калмана-Бьюси обозначается как $\hat{\mathcal{G}}$ и рассматривается как решение уравнения:

$$\tau \frac{d}{dt} \hat{\mathcal{G}} = -\hat{\mathcal{G}} + Ri + K(\mathcal{G}_{meas} - \hat{\mathcal{G}}), \quad \hat{\mathcal{G}}(0) = 0,$$

где K является функцией времени и подлежит определению. Для фиксированных уровней шума существует оптимальное значение коэффициента усиления $(K)_0^t$, называемое коэффициентом усиления Калмана, при котором достигается минимальное оценка значения вариации ошибки:

$$\min_{(K)_0^t} \left\langle [\mathcal{G}(t) - \hat{\mathcal{G}}(t)]^2 \right\rangle.$$

В результате, применение методологии динамического программирования приводит к исследованию уравнения фильтра Риккати, которое для исследуемой задачи записывается в следующем виде:

$$\tau \dot{T}_{min} = 2(T - T_{min}) - \frac{\sigma T_{min}^2}{2T}, \quad T_{min}(0) = T, \quad (42)$$

где оптимальный коэффициент усиления K выражен параметризацией через решение $(T_{\min})_0^t$, $K = \frac{\sigma T_{\min}}{2T}$, $\sigma \equiv \frac{2kTR}{V_{\text{meas}}}$, и σ характеризует фундаментальное природное поведение теплового резервуара в виде измеримой интенсивности случайного теплового шума.

Для получения оценки максимальной работы в (40) необходимо иметь оценку информационного потока по непрерывному каналу обратной связи неопределенной части измеримого напряжения \mathcal{G} в виде измеримой величины $\mathcal{G}_{\text{meas}}$. Такой величиной является перенос энтропии [28]. Оценка непрерывного по времени предела переноса энтропии имеет следующий вид: $I_c(t) = I\left(\left(\mathcal{G}(0), (w)_0^t\right); \left(\mathcal{G}_{\text{meas}}\right)_0^t\right)$. Такая величина называется количеством взаимной информации между неопределенным начальным значением напряжения $\mathcal{G}(0)$ и случайными значениями траектории теплового шума w , возникающего при измерении траектории $\mathcal{G}_{\text{meas}}$. Количество взаимной информации двух случайных величин ξ и θ определяется в виде:

$$I(\theta; \xi) = \int \ln \left(\frac{dP_{\theta\xi}}{d(P_\theta \otimes P_\xi)} \right) dP_{\theta\xi} \geq 0$$

и эквивалентно количеству (дифференциальной) энтропии Шеннона случайной величины ξ , убывающей при наличии знаний о случайной величине θ и взаимно наоборот. Здесь $P_{\theta\xi}$, P_θ , и P_ξ описывают взаимное и маргинальные меры распределения вероятностей случайных величин θ и ξ . Тогда количество перенос энтропии определяется следующим выражением для данной задачи:

$$I_c(t) = \frac{1}{2V_{\text{meas}}} \int_0^t \langle [\mathcal{G} - \hat{\mathcal{G}}]^2 \rangle dt' = \frac{1}{2V_{\text{meas}}} \int_0^t \frac{kT_{\min}}{C} dt' = \frac{\sigma}{4\tau} \int_0^t \frac{T_{\min}}{T} dt', \quad \tau = RC.$$

Отметим, что I_c не зависит от описания природы демона, например, деталей описания коэффициента его усиления обратной связи G . Сам демон может оптимально управлять извлечением работы (40) с помощью использования измерений $\mathcal{G}_{\text{meas}}$ и выбора инжекции тока i . На интуитивном уровне интерпретации демон может воспроизводить положительную работу со скоростью \dot{W} если будет принимать значения тока как $i < 0$ при корректной оценке $\mathcal{G} > 0$ и наоборот.

Примечание. Модель демона традиционно рассматривают как слабо наблюдаемую систему с малыми флуктуациями, при действии на которую энергия извлекается в противоречии второму закону термодинамики. В более современной интерпретации демон рассматривается как контроллер, содержащий систему измерения (цифровой или аналоговый вычислитель), способный определить наиболее оптимальное действие для реализации исполнительным устройством. Извлеченная информация должна храниться в памяти компьютера в период необходимого использования. Демон Ландауэра-Пенроуза-Беннета рассматривает память компьютера совместно с принципом Ландауэра, согласно которому для стирания одного бита при температуре T необходимо затратить на преодоление диссипативных сил теплового резервуара работу как минимум $kT \ln 2$ как ключевой позиции для восстановления выполнения условий второго закона термодинамики.

Замечание. Известно, что если наблюдателю в виде демона Максвелла доступны микроскопические степени свободы, то второй закон термодинамики может быть нарушен. Сцилард показал из анализа модели демона Максвелла, что из термодинамического цикла извлекается работа в виде $kT \ln 2$. Более того, было показано, что извлекаемая работа W_{ext}^S из системы определяется количеством информации (или квантово-классической взаимной информацией) I , которая измеряет знания о системе при измерении. Одновременно подобное соотношение в виде нижней границы существует для полной стоимости W_{cost}^M измерения и стирания информации $W_{\text{ext}}^S \leq -\Delta F^S + kTI$ и $W_{\text{cost}}^M \geq kTI$, где ΔF^S определяет свободную энергию системы. Тогда нетрудно заметить, скорость извлекаемой работы \dot{W}_{ext} ограничена величиной $\dot{W}_{\text{ext}} \leq kTI$, т. е. ограничена скоростью извлекаемой информации.

Таким образом, регулятор имеет возможность совершить полезную работу за счет извлеченной информации с ограничениями в виде (39).

На рис. 6 приведено интегральное описание информационно-термодинамического закона распределения качеств управления применяемого в задачах проектирования когнитивных ИСУ.



Рис. 6. Информационно-термодинамический закон распределения качеств управления

Отметим некоторые дополнительные выводы из анализа особенностей информационно-термодинамического закона квантовой самоорганизации когнитивных робастных ИСУ на рис. 6 с позиции теории динамических робототехнических систем.

Выводы. Физический (термодинамический) критерий (36) самоорганизации робастных ИСУ показывает, что уровень робастности возможно повысить за счет управления производством энтропии технического контроллера, который позволяет снизить потери полезного ресурса объекта управления. Информационный критерий (37) показывает, что негэнтропия когнитивного регулятора снижает требования к количеству необходимой начальной информации для гарантированного достижения проектируемого уровня робастности. Таким образом, извлекаемая информация из БЗ когнитивного регулятора предоставляет возможность получить дополнительный ресурс для совершения полезной работы, что эквивалентно возможности совершения целенаправленного действия на объект управления для гарантированного достижения цели управления. Этот факт подтверждает справедливость утверждения о физической природе информации [29–32] и управление, использующее данную информацию, позволяет совершить полезную работу.

Обсудим кратко физические (энергетические) особенности взаимодействия объекта управления и регулятора в условиях управления как энергетического обмена. Приведенные на рис. 6 соотношения характерны для диссипативных или без потерь моделей объектов управления с высокоэнергетическими уровнями, а также для применяемых в данных объектах регуляторов с обратной связью без потерь с низким энергетическим уровнем. В этом общем случае энергия стремится к передаче от объекта управления регулятору тем самым энергия объекта управления убывает, и энергия регулятора увеличивается и энергия эмуляции (но не физическая энергия) аккумулируется регулятором. И наоборот, если применяемый регулятор с высоким энергетическим уровнем, то объект управления с низким энергетическим уровнем, то энергия может передаваться от регулятора объекту управления, так как регулятор может воспроизводить реально физическую энергию для управления достижимостью требуемого энергетического потока.

Тогда, если и когда состояния регулятора совпадают с высоким уровнем энергии эмуляции, тогда возможно восстановить данные состояния удаляя энергию эмуляции так, что энергия эмуляции не возвращается к объекту управления. В этом случае общая замкнутая система состоит из объекта управления и регулятора и обладает прерывистыми потоками такими, что возможно организовать

логическое переключение в сочетании с непрерывной динамикой и сформировать модель описания на основе импульсных дифференциальных уравнений [29].

Основная цель робастного интеллектуального когнитивного управления заключается в поддержке оптимального соотношения в распределении качеств управления таких как устойчивость, управляемость и робастность при выполнении термодинамических и информационных соотношений на рис. 6 и выполняют роль информационно-термодинамических компенсаторов стабилизации процессов управления. Множество обнуления определяется как множество всех точек в пространстве состояний регуляторов с замкнутыми обратными связями, которому соответствует регуляторы с убывающей энергией эмуляции. При обнулении состояний регулятора энергия объекта управления никогда не может возрасти после первого же события обнуления состояний.

Более того, если энергия замкнутой системы управления сохраняется между событиями обнуления состояний регулятора, то убывание энергии объекта управления сопровождается соответствующим возрастанием энергии эмуляции. Таким образом, поддержка оптимального информационно-термодинамического распределения между устойчивостью, управляемостью и робастностью за счет процессов самоорганизации знаний может быть реализован при помощи нового квантового алгоритма управления самоорганизацией знаний в виде неточных БЗ на основе операций квантовых вычислений, которые отсутствуют в технологиях мягких вычислений.

Примечание: Лемма об устойчивости нелинейных систем. Приведенные в [33] соотношения между термодинамической экс-энергией и Гамильтонианом системы позволили сформулировать Лемму об устойчивости Гамильтоновых систем. Условно устойчивость ограничена условиями теорем Ляпунова и Четаева следующим образом: для заданной производной функции Ляпунова как декомпозиции и суммы скорости производства экс-энергии \dot{W} и скорости диссипации экс-энергии $T_0\dot{S}_i$ выполняется условие

$$\dot{V} = \dot{W} - T_0\dot{S}_i = \sum_{j=1}^N Q_j \dot{q}_j - \sum_{l=1}^{M-N} Q_l \dot{q}_l, \tag{43}$$

где Q_j определяет вектор обобщенных сил и скорость необратимого производства энтропии определяется в виде $\dot{S}_i = \sum_k F_k X_k = \frac{1}{T_0} \sum_k Q_k \dot{q}_k \geq 0$.

Закон управления является оптимальным по Ляпунову если минимизирует первую по времени производную функции Ляпунова на всем пространстве допустимых управлений. В общем случае множество коэффициентов усиления обратной связи оптимизируются минимизацией ошибки управления. Функция Ляпунова определяется как полная энергия ошибки эквивалентности соответствующему Гамильтониану H в виде $V = H$. Тогда концепция оптимальности по Ляпунову следует непосредственно из условия $\dot{W} = 0$ в (43) и максимизации $T_0\dot{S}_i$, при которых производная функции (Гамильтониана) по времени или модифицированная мощность (работа / энергия) записывается в виде $\dot{V} = \dot{H} = -T_0\dot{S}_i = -\sum_{j=1}^N Q_j \dot{q}_j = -\sum_{j=1}^N F_j \dot{R}_j$, и не зависит от динамики системы и определяется как кинематическая величина, применимая к другим системам. Отметим, что F_j означает множество сил, действующих на механическую систему и \dot{R}_j означает инерционную линейную скорость точки, в которой приложена сила. Пассивное управление робототехнических систем следует непосредственно при $\dot{W} = 0$ в (43).

Информационные функции Ляпунова рассмотрены в [34].

Выводы

- Приведенные соотношения между количеством информации, извлекаемой свободной энергии и совершаемой полезной работой подтверждают отмеченное утверждение: робастность интеллектуальной системы управления возможно повысить за счет производства энтропии когнитивного регулятора.
- Извлекаемая информация, основанная на знаниях в БЗ когнитивного регулятора, позволяет получить дополнительный ресурс для полезной работы, что эквивалентно появлению целенаправленного действия на объект управления для гарантированного достижения цели управления.
- Разработанный когнитивный робастный регулятор уменьшает потери полезного ресурса объекта управления, а неэнтропия когнитивного регулятора снижает требования к минимуму исходной информации для достижения робастности.

Список литературы

1. Петров Б.Н., Гольденблат И.И., Ульянов С.В. Теория моделей процессов управления: Информационно-термодинамические аспекты. — М.: Наука, 1978.
2. Ulyanov S.V. Self-organizing control system. Patent US 6,411,944,B1 (Filed: Mar. 17, 1998). 2002 (Foreign Application Priority Data Mar. 21, 1997 (JP)).
3. Marcolli M. Motivic information // arXiv:1712.08703v1 [math-ph] 23 Dec 2017.
4. Combe N.C., Manin Yu.I., Marcolli M. Geometry of information: classical and quantum aspects // 2021. — Available from: <http://www.its.caltech.edu> arXiv: 2107.08006v1 [cs.IT] 16 Jul 2021.
5. Стратонович Р.Л. Теория информации. — М.: Советское Радио. — 1975.
6. Yufik Y.M. The understanding capacity and information dynamics in the human brain // Entropy. 2019. Vol. 21 / P. 308; [doi:10.3390/e21030308].
7. Brandao F. G.S.L., Horodecki M., Huei H., Ng Y., Oppenheim J., and Wehner S. The second laws of quantum thermodynamics // arXiv:1305.5278v1 [quant-ph] 2013.
8. Sagawa T. Thermodynamic and logical reversibilities revisited // arXiv: 1311.2188v1 [cond-mat.stat-mech] 8 Nov 2013.
9. Yamano T. Phase space gradient of dissipated work and information: A role of relative Fisher information // arXiv: 1311.2176v1 [cond-mat.stat-mech] 9 Nov 2013.
10. Ilgin I. and Yang I-Sh. Energy carries information // arXiv:1402.0878v1 [hep-th] 4 Feb 2014.
11. Horowitz Jordan M. and Esposito M. Thermodynamics with continuous information flow // arXiv:1402.3276v2 [cond-mat.stat-mech] 14 Feb 2014.
12. Renes J. M. Work Cost of thermal operations in quantum and nano thermodynamics // arXiv:1402.3496v1 [math-ph] 14 Feb 2014.
13. Horowitz J. M. Sagawa T. Equivalent definitions of the quantum nonadiabatic entropy production // arXiv:1403.7778v1 [quant-ph] 30 Mar 2014.
14. Lang A.H., Fisher Ch.K., and Mehta P. Thermodynamics of statistical inference by cells // arXiv:1405.4001v1 [physics.bio-ph] 15 May 2014.
15. Apollaro T. J. G., Francica G., Paternostro M., and Campisi M. Work statistics, irreversible heat and correlations build-up in joining two spin chains // arXiv: 1406.0648v1 [cond-mat.stat-mech] 3 Jun 2014.
16. Hemmo M, and Shenker O. Entropy and computation: The Landauer-Bennett thesis reexamined // Entropy. — 2013. — Vol. 15. — Pp. 3297–3311.

17. Ульянов С.В. Квантовая релятивистская информатика: логика физических противоречий корректности и строгости математических моделей квантовых релятивистских объектов. LAP Lambert Acad. Publ. Berlin. 2015.
18. Dodonov V.V. et al. Energy-sensitive and "Classical-like" Distances between Quantum States // Phys. Scr. 1999. Vol. 59. N02. Pp. 81–89.
19. Fillipov S.N., Man'ko V.I. Distances between quantum states in the tomographic-probability representation // Phys. Scr. 2010. Vol. 140. P. 014043.
20. Gomez C. Complexity and time // Phys. Rev. 2020. Vol. D 101. P. 065016.
21. Funo K., Watanabe Yu, Ueda M. Thermodynamic work gain from entanglement // Physical Review, 2013. Vol. A88. No 5. P. 052319.
22. Toyabe S., Sagawa T., Ueda M., Muneyuki E., Sano M. Experimental demonstration of information-to-energy conversion and validation of the generalized Jarzynski equality // Nature Physics, 2010. — Vol. 6. — Pp. 988-992.
23. Van der Meer R., Ng N. H. Y., Wehner S. Smoothed generalized free energies for thermodynamics // Physical Review A, 2017. — Vol. 96. — No 6. — P. 062135.
24. Tribus M., Shannon P.T., Evans R.B. Why thermodynamics is a logical consequence of information theory // A. I. Ch. E. Journal. 1966. — Vol. 12. — No 2. — Pp. 244 – 248.
25. Bais F.A., Farmer J.D. Physics of information [R]. SFI WORKING PAPER: 2007-08-029. [www.santafe.edu]. The Handbook on the philosophy of information, Ed by J. van Benthem and P. Adriaans. 2009.
26. Sagawa T., Ueda M. Minimal Energy Cost for Thermodynamic Information Processing: Measurement and Information Erasure // Phys. Rev. Lett. 2009. 102(25): 250602. [Erratum. Phys. Rev. Lett. 106, 189901, 2011].
27. Horowitz J. M., Sandberg H. Second-law-like inequalities with information and their interpretations [J]. New Journal of Physics. 2014. Vol. 16: 125007.
28. Sandberg H, et al. Maximum work extraction and implementation costs for nonequilibrium Maxwell's demon // Physical Review E. 2014. No 4. P. 042119.
29. Haddad W. M., Chellaboina V., Nersesov S. G. Thermodynamics: A Dynamical Systems Approach, Princeton Series in Applied Mathematics Princeton. NJ: Princeton University Press, 2005.
30. Feng Q., Li W. Hypocoelliptic entropy dissipation for stochastic differential equations // arXiv:2102.00544v1 [math.DS] 31 Jan 2021.
31. Ito S., Dechant A. Stochastic time evolution, information geometry, and Cramer-Rao bound // Phys. Rev. 2020. Vol. X10. P. 0201056.
32. Yoshimura K., Ito S. Information geometric inequalities of chemical thermodynamics // Phys. Rev. Research. 2021. Vol. 3. P. 013175.
33. Robinett R. D., Wilson D. G. Exergy and Irreversible Entropy Production Thermodynamic Concepts for Control Design: Nonlinear Systems // 14th Mediterranean Conf. on Control and Automation, 2006. — Pp. 1–8, doi: 10.1109/MED.2006.328728.
34. Mirkes E.M. Universal Gorban's Entropies: Geometric Case Study // Entropy. — 2020. — Vol. 22. No 3. — Pp. 264 [<https://doi.org/10.3390/e22030264>].