

ОСНОВЫ ПРИМЕНЕНИЯ КВАНТОВЫХ СКВОЗНЫХ ИТ В РОБОТОТЕХНИКЕ И ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОМ КОГНИТИВНОМ УПРАВЛЕНИИ: СТОХАСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, КВАНТОВАЯ ИНФОРМАЦИОННАЯ ФИЗИКА И ИНФОРМАЦИОННАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Зрелов Петр Валентинович¹, Кореньков Владимир Васильевич²,
Тятюшкина Ольга Юрьевна³, Ульянов Сергей Викторович⁴

¹Кандидат физико-математических наук, начальник отдела;
Объединенный институт ядерных исследований,
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, д. 6;
e-mail: zrelov@jinr.ru.

²Директор лаборатории;
Объединенный институт ядерных исследований;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, д. 6;
Доктор технических наук, заведующий кафедрой;
Государственный университет «Дубна»;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: korenkov@jinr.ru.

³Кандидат технических наук, доцент;
Государственный университет «Дубна»;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: tyatyushkina@mail.ru.

⁴Доктор физико-математических наук, профессор;
Государственный университет «Дубна»;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
Ведущий научный сотрудник;
Объединенный институт ядерных исследований;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, д. 6;
e-mail: ulyanovsv@mail.ru.

Физическая платформа (в общем виде квантовой релятивистской механики и квантовой релятивистской термодинамики), стала основой развития нового поколения квантовых сквозных информационных технологий (КСИТ), что привело, в свою очередь, к развитию квантовой инженерии (квантового компьютера), квантовой теории информации, квантовой программной инженерии, квантовых вычислений, квантовой криптографии, квантовых алгоритмов и квантового программирования. Более того, природа и сущность самого понятия «информация» стали рассматриваться как физический объект. Это позволило установить механизм и возможности совершать полезную работу, не нарушая второго закона термодинамики за счет корректных информационных моделей самого второго закона. Сегодня практически отсутствуют необходимые стандартные курсы по физике, аналитической механике и термодинамике (включая квантовые модели) для ИТ-специалистов, при этом обоснованием часто служил тезис Черча-Тьюринга об алгоритмической основе информации и универсальности вычислительной машины Тьюринга. Ситуация резко изменилась с приходом КСИТ и сам тезис Черча-Тьюринга подвергся существенному пересмотру. В данной статье приведены минимально необходимые сведения из указанных областей для освоения и перехода на КСИТ.

Ключевые слова: квантовые сквозные информационные технологии, квантовое управление, квантовые вычисления, физические модели.

Для цитирования:

Зрелов П. В., Кореньков В. В., Тятюшкина О. Ю., Ульянов С. В. Основы применения квантовых сквозных ИТ в робототехнике и интеллектуальном когнитивном управлении: стохастическая механика, квантовая информационная физика и информационная геометрия // Системный анализ в науке и образовании: сетевое научное издание. 2021. № 2. С. 83–117. URL : <http://sanse.ru/download/439>.

BACKGROUND OF QUANTUM END-TO-END IT APPLICATION IN ROBOTICS AND INTELLIGENT COGNITIVE CONTROL: STOCHASTIC MECHANICS, QUANTUM INFORMATION PHYSICS AND INFORMATION GEOMETRY

Zrelov Petr V.¹, Korenkov Vladimir V.², Tyatyushkina Olga Yu.³, Ulyanov Sergey V.⁴

¹PhD in Physico-mathematical sciences, Department head;
Joint Institute for Nuclear Research,
6 Joliot-Curie Str., Dubna, Moscow region, 141980, Russia;
e-mail: zrelov@jinr.ru.

³Laboratory Director;
Joint Institute for Nuclear Research;
6 Joliot-Curie Str., Dubna, Moscow region, 141980, Russia;
Grand PhD in engineering, head of the Department;
Dubna State University;
19 Universitetskaya Str., Dubna, Moscow region, 141980, Russia;
e-mail: korenkov@jinr.ru.

³PhD in Engineering sciences, associate professor;
Dubna State University,
Institute of the system analysis and management;
19 Universitetskaya Str., Dubna, Moscow region, 141980, Russia;
e-mail: tyatyushkina@mail.ru.

⁴Grand PhD in Physical and Mathematical Sciences, professor;
Dubna State University;
19 Universitetskaya Str., Dubna, Moscow region, 141980, Russia;
Leading Researcher of LIT JINR;
Joint Institute for Nuclear Research;
6 Joliot-Curie Str., Dubna, Moscow region, 141980, Russia;
e-mail: ulyanovsv@mail.ru.

The physical platform (in the general form of quantum relativistic mechanics and quantum relativistic thermodynamics) became the basis for the development of a new generation of quantum end-to-end information technologies (CSIT), which in turn led to the development of the foundations of quantum engineering (quantum computer), quantum information theory, quantum software engineering, quantum computing, quantum cryptography, quantum algorithms and quantum programming. More-over, the nature and essence of the very concept of "information" began to be considered as a physical object. This made it possible to establish a mechanism and opportunities to perform useful work without violating the second law of thermodynamics due to correct information models of the second law itself. Today the necessary standard courses in physics, analytical mechanics and thermodynamics (including quantum models) for IT specialists are practically absent, herewith the Church-Turing thesis about the algorithmic basis of information and the universality of the Turing computing machine often served as a justification. The situation changed dramatically with the arrival of CSIT and the Church-Turing thesis itself underwent a significant revision. This article provides the minimum necessary information from these areas for the development and transition to CSIT.

Keywords: quantum end-to-end information technologies, quantum control, quantum computing, physical models.

For citation:

Zrelov P.V, Korenkov V. V., Tyatyushkina O.Yu, Ulyanov S. V. Background of quantum end-to-end it application in robotics and intelligent cognitive control: stochastic mechanics, quantum information physics and information geometry. System Analysis in Science and Education, 2021;(2):83–117(In Russ). Available from: <http://sanse.ru/download/439>.

1. Введение: Особенности взаимосвязей моделей классической механики

Классическая механика имеет три традиционные формы описания: механика Ньютона, Эйлера-Лагранжа и Гамильтона, описываемые соответствующими уравнениями Ньютона, Лагранжа 2-го рода и Гамильтона-Якоби. При определенных ограничениях на обобщенные координаты и связи (склерономные, голономные, диссипативные, и т.п.) можно описывать различные модели исследуемых математических объектов. В частности, уравнение Гамильтона-Якоби и его физическая интерпретация как волновой формы классической механики часто вызывает трудности. Доступно и ясно воспринимаются традиционно уравнения Лагранжа как корпускулярной формы классической механики и вывод на его основе уравнений движения физической системы как объекта управления. Но тяжело воспринимается ИТ-специалистами вывод уравнения Лагранжа на основе вариационного принципа наименьшего действия. Например, вызывает существенные трудности физическая интерпретация и математическая сущность ответа на вопрос почему полная энергия объекта есть сумма кинетической и потенциальной энергий, а его Лагранжиан определяется в виде разности между кинетической и потенциальной энергиями.

В результате разработка и понимание, например, принципов работы и методов построения структур гамильтоновых и лагранжевых искусственных нейронных сетей для глубокого машинного обучения, адаптации и оптимизации алгоритмов сложных систем управления, вызывает у ИТ-специалистов большие трудности.

Из педагогических целей рассмотрим особенности корпускулярного и волнового методов описания моделей классической механики и их взаимосвязь. Прежде всего, отметим некоторые физические особенности описания моделей механики.

1.1. Элементы аналитической механики

В механике сплошных сред различают лагранжев и эйлеров подходы описания сред [1]. При лагранжевом подходе к описанию среды следят за движением каждой частицы среды. Причем координаты частицы в каждый момент времени зависят от ее начальных координат (т. е. момент $t=0$) и данного момента времени. При эйлеровом описании движения среды наблюдают за тем, что происходит в данном элементе объема 3-мерного пространства. В этом случае наблюдают за различными частицами, попадающими в данный элемент объема в разные моменты времени. Таким образом, при лагранжевом описании скорость каждой частицы среды является функцией ее начальных координат и времени. При эйлеровом описании скорость движения каждой частицы среды является функцией времени и координат той точки среды, в которой она в данный момент находится. То же самое относится ко всем другим механическим функциям, описывающим движение среды. Обсудим предварительно поучительный пример взаимосвязи подходов к построению моделей описания движения системы.

Пример: Вывод уравнения Лагранжа из уравнения Ньютона. Рассмотрим движение частицы в форме уравнения Ньютона (см. рис. 1).

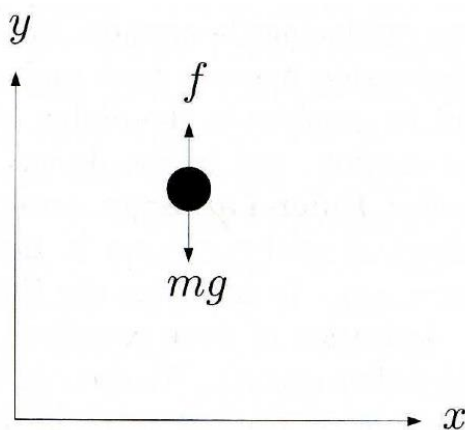


Рис. 1. Схема движения системы

Уравнение движения частицы, согласно второму закону Ньютона (или следуя методу проекции действующих на материальное тело сил), имеет вид:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum_i F_i = f - mg,$$

где f – внешняя сила, а mg – сила гравитации, действующая на частицу.

Преобразуем данное уравнение к виду:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left[\frac{1}{2} \dot{y}^2 \right] \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right),$$

где $T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$ – кинетическая энергия частицы. В свою очередь, имеем $mg = \frac{\partial}{\partial y} [mgy] = \frac{\partial}{\partial y} U$ – потенциальная энергия частицы. Тогда уравнение Ньютона можно переписать в виде уравнения Лагранжа как:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = f,$$

где Лагранжиан \mathcal{L} имеет традиционную форму $\mathcal{L} = T - U$.

Рассмотрим теперь движение частицы в потенциальном поле и Лагранжианом вида $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} |\dot{q}|^2 - U(q)$. В этом случае из уравнения Лагранжа имеем:

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{d}{dt} \dot{q} - \frac{\partial}{\partial q} U(q).$$

Таким образом, имеем уравнение $\ddot{q} = \nabla_q U(q)$, т.е. закон Ньютона.

Пример: Вывод уравнения Гамильтона Якоби из уравнения Ньютона. Запишем уравнение движения в форме Ньютона в следующем эквивалентном виде

$$m \frac{dv}{dt} + \nabla U(x, t) = 0, \quad (1)$$

где $U(x, t)$ – потенциальное поле, градиент $\nabla U = \frac{\partial}{\partial x} U(x, t)$ которого пропорционален силовому полю. Согласно векторному анализу, полная производная векторной функции имеет следующий вид:

$$\frac{dv(x, t)}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) + v(x, t) \nabla v(x, t). \quad (2)$$

Таким образом, полная производная состоит из двух переменных слагаемых: первое слагаемое характеризует изменение функции $v(x, t)$ в данном месте пространства; второе слагаемое характеризует изменение функции $v(x, t)$, происходящее благодаря тому, что рассматриваемая частица переносится в пространстве из одной точки в другую. Второе слагаемое $v(x, t) \nabla v(x, t)$ называют поэтому конвективным членом, так как оно возникает в связи с переносом (конвекцией) частицы жидкости. Дальнейшее обобщение такого подхода заключается в построении моделей параллельного переноса в римановом пространстве и рассмотрено в [2].

Из векторного анализа известно также следующее соотношение:

$$\nabla(a \cdot b) = (a \nabla) b + (b \nabla) a + a \times [\nabla \times b] + b \times [\nabla \times a]. \quad (3)$$

Тогда из (2) и (3) следует

$$\frac{d}{dt}v(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}v(x,t) + \frac{1}{2}\nabla(v^2(x,t) - v(x,t)) \times [\nabla \times v(x,t)]. \quad (4)$$

Подставляя (4) уравнение в исходное уравнение движения (1), получим

$$m \frac{\partial}{\partial t}v(x,t) + \frac{m}{2}\nabla[v^2(x,t)] - mv(x,t) \times [\nabla \times v(x,t)] + \nabla U(x,t) = 0. \quad (5)$$

Ранее было сделано предположение, что векторное поле скоростей порождается скалярной функцией с помощью соотношения в виде

$$v(x,t) = \frac{1}{m}\nabla S(x,t). \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получаем равенство

$$\nabla \left\{ \frac{\partial}{\partial t}S(x,t) + \frac{1}{2m}[\nabla S(x,t)]^2 + U(x,t) \right\} = 0. \quad (7)$$

При выводе (7) использовалось тождество $\nabla[\nabla S(x,t)] = 0$.

В выражении (7) в фигурных скобках величина является скаляром, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t}S(x,t) + \frac{1}{2m}[\nabla S(x,t)]^2 + U(x,t) = 0, \quad (8)$$

что совпадает с уравнением Гамильтона-Якоби. Таким образом, выражение (8) есть уравнение Гамильтона-Якоби для системы, описываемой уравнением движения (1).

Пример. Отметим здесь также случай, когда частица движется в потенциальном поле при наличии диссипативной силы. В этом случае уравнение движения имеет вид: $m \frac{dv}{dt} + \nabla U + \alpha v = 0$. Применяя изложенную методику к данному уравнению, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}S(x,t) + \frac{1}{2m}[\nabla S(x,t)]^2 + \frac{\alpha}{m}S(x,t) + U(x,t) = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) является уравнением Гамильтона-Якоби с диссипацией [3].

Более общий подход определения неголономного уравнения Гамильтона-Якоби с учетом диссипативных сил рассмотрен во многих работах [4-6]. Из педагогических целей рассмотрим особенности корпускулярного и волнового методов описания моделей классической механики и их взаимосвязь.

Пример: Взаимоотношение уравнений Эйлера-Лагранжа и Гамильтона-Якоби. Рассмотрим эйлеров подход на основе уравнения Гамильтона-Якоби (волновая механика), описывающего механику движения потока частиц, и его связь с лагранжевым методом описания движения частицы на основе уравнения Ньютона (корпускулярная механика).

Так как $v(x,t) = \frac{1}{m}\nabla S(x,t)$, то примем функцию Лагранжа в виде:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}|\nabla S|^2 - U \quad (m = 1).$$

Тогда, с учетом принципа наименьшего действия $S = \int \mathcal{L} dt$ имеем:

$$0 = \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \mathcal{L} \right)}_{\text{уравнение Лагранжа 2-го рода}} - \frac{\partial}{\partial q} \mathcal{L} = \underbrace{\frac{dS}{dt} + \frac{1}{2}|\nabla S|^2 - U(x)}_{\text{уравнение Гамильтона-Якоби}},$$

т.е. из уравнения Лагранжа получили уравнение Гамильтона-Якоби.

Следовательно, установлена эквивалентность корпускулярной и волновой форм представления моделей классической механики.

Отметим здесь также случай, когда частица движется в потенциальном поле при наличии диссипативной силы. В этом случае уравнение движения имеет вид: $m \frac{dv}{dt} + \nabla U + \alpha v = 0$. Применяя изложенную методику к данному уравнению, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} S(x, t) + \frac{1}{2m} [\nabla S(x, t)]^2 + \frac{\alpha}{m} S(x, t) + U(x, t) = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) является уравнением Гамильтона-Якоби с диссипацией [3].

1.2. Стохастическая (классическая / квантовая) механика¹

С математической точки зрения (при определенных условиях и без потери общности) случайный процесс $X(t)$ определяется условным (интегральным) распределением вероятностей:

$$F_n(x, t | x_0, t_0, \dots, x_n, t_n) = P(X(t) \leq x | X(t_0) = x_0, \dots, X(t_n) = x_n) \text{ и}$$

$$F_n(x, t | x_0, t_0, \dots, x_n, t_n) = F_2(x, t | x_n, t_n),$$

или для (дифференциальной) функции плотности распределения вероятностей

$$f_n(x, t | x_0, t_0, \dots, x_n, t_n) = f_2(x, t | x_n, t_n).$$

С точки зрения механики движения точки переход из точки (x_0, t_0) в точку (x_n, t_n) осуществляется через промежуточные точки в хронологическом порядке, что не противоречит интуитивному пространственно-временному представлению о причинно-следственных связях и логических выводов отношений «прошлое - будущее» в классической механике. Если обозначить вероятность $P(X(t) \leq x)$ в виде $F(x, t)$ или

$$f(x, t) = P(x \leq x(t) \leq x + dx),$$

то, применяя отмеченное замечание о непрерывности перехода из точки в точку на траектории движения, можно записать данное утверждение перехода из точки (x_0, t_0) в точку (x_n, t_n) как промежуточных вероятностных состояний $f_2(x, t | x', t')$ в виде соотношения Чепмена-Колмогорова:

$$f_2(x, t | x_0, t_0) = \int f_2(x, t | x', t') f_2(x', t' | x_0, t_0) dx', \quad \forall t' \in (t_0, t), \quad (11)$$

и

$$f_2(x, t) = \int f_2(x, t | x', t') f_2(x', t') dx', \quad \forall t' < t. \quad (12)$$

Пример. Вывод уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова. Введем определения следующих коэффициентов (моменты n-порядка)

$$a_n(z, \Delta) = \int (x - z)^n f_2(x | z, \Delta) dz, \quad (13)$$

и для $t_0 = 0$ из (11) можно получить соотношение

$$f_2(x | x_0, t + \Delta) = \int f_2(x | z, \Delta) f_2(z | x_0, t) dz. \quad (14)$$

¹ Авторы (С.В. Ульянов) приносят глубокую благодарность проф. Принстонского университета М. Shinozuka за полезное обсуждение излагаемого подхода в Принстоне, 1998 г. и замечания по рукописи публикации [7].

Допустим, что предел a_n / Δ отличен от нуля для $n=1,2$, т.е. имеем

$$A(z,t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{a_1(z,\Delta)}{\Delta}, \quad B(z,t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{a_2(z,\Delta)}{\Delta}, \quad (15)$$

которые носят наименования коэффициентов сноса и диффузии соответственно.

Из соотношения Чепмена-Колмогорова (14) после интегрирования по частям получим:

$$\int \frac{\partial f_2}{\partial t} \varphi(x) dx = \int \left\{ \frac{\partial}{\partial z} [A(z)f_2(z|x_0,t)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [B(z)f_2(z|x_0,t)] \right\} \varphi(z) dz, \quad (16)$$

где $\varphi(x)$ определяется как некоторая гладкая функция, которая в пределе $x \rightarrow \pm\infty$ стремится к нулю. Так как это условие выполняется для $\forall \varphi$, то получим соотношение:

$$\frac{\partial f_2(x|x_0,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [f_2(x|x_0,t)A(z,t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [f_2(z|x_0,t)B(x,t)], \quad (17)$$

которое называется уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК).

Рассмотрим связь вывода уравнения ФПК (17) с выводом уравнения Шредингера.

Пример. Вывод уравнения Шредингера из уравнения ФПК. Если положить в уравнении (17) коэффициент $B(x) = -\frac{i\hbar}{m}$, и применить стандартное преобразование:

$$f_2(x|x_0,t) \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^x A(\theta,t) d\theta\right\} = \psi_2(x|x_0,t) \quad (18)$$

то уравнение ФПК (17) редуцируется в виде:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2(x|x_0,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_2(x|x_0,t)}{\partial x^2} + V(x,t) \psi_2(x|x_0,t), \quad (19)$$

где $V(x,t) = \frac{m}{2} (A(x))^2 - i\hbar \frac{dA}{dx} - \frac{i\hbar}{2} \int_0^t \frac{\partial A(\theta,t)}{\partial t} d\theta$, или в более традиционной форме:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x,t) \psi. \quad (20)$$

Это и есть уравнение Шредингера в стандартной форме (19) или идентичном виде (20). Таким образом, уравнения ФПК (17) и Шредингера (20) связаны аналитически и выводятся из простого понятия вероятности события без привлечения понятий механики движения [7]. Данная квантовая модель в виде уравнения Шредингера (20) служит основой нанотехнологий и квантовой инженерии, в частности, моделей квантового управления, квантовых вычислений и квантовых алгоритмов [8].

Пример: Уравнение Шредингера для частицы, движущейся в заданном потенциальном поле. Классическое уравнение Гамильтона-Якоби имеет, согласно (8), вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right)^2 + U(x_1, x_2, x_3, t) = 0. \quad (21)$$

Трансформированное уравнение Гамильтона-Якоби (21) имеет вид:

$$-\frac{\partial \Omega}{\partial S} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_i} \right)^2 + U(x_1, x_2, x_3, t) \left(\frac{\partial \Omega}{\partial S} \right)^2 = 0. \quad (22)$$

Соответствующее классическое волновое уравнение, для которого (22) является уравнением характеристик, принимает вид:

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial S} + \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} + U(x_1, x_2, x_3, t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial S^2} = 0. \quad (23)$$

Применив вышеприведенную трансформацию вида:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t, S) = \psi(x_1, x_2, x_3, t) \exp\left\{-\frac{iS}{\hbar}\right\},$$

получим

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j^2} + U(x_1, x_2, x_3, t) \psi, \quad (24)$$

где $\varphi(x, S)$ – вектор классических волновых функций; $\psi(x, t)$ – вектор квантовых волновых функций. Если обозначить Гамильтониан в (24) как $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + U(x_1, x_2, x_3, t)$, то уравнение (24) примет вид:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} H \psi. \quad (25)$$

Примечание. Хронологически, вывод уравнения (24) был получен [9] И.И. Гольденблатом и С.В. Ульяновым в 1964 г., и повторен [10] И.С. Аржаных в 1965 г. Выводу уравнения Шрёдингера за последние годы посвящено много работ. Приведенный в данном примере вывод уравнения Шрёдингера принципиально отличается от известных работ [11].

Рассмотрим некоторые следствия из уравнения Шрёдингера.

Пример: Вывод уравнения фон Неймана из уравнения Шрёдингера. Рассмотрим вывод одного важного для квантовой теории информации и теории квантовых алгоритмов уравнения фон Неймана для оператора плотности $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ квантового состояния из уравнения Шрёдингера, описывающего эволюцию квантового состояния $|\psi\rangle$. В общем виде оператор плотности может быть записан как внешнее произведение векторов состояния, т.е. $\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$. Для кет и бра-векторов $|\psi_k\rangle$ и $\langle\psi|$ имеем уравнения Шрёдингера в виде:

$$\frac{d|\psi\rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H |\psi\rangle \text{ и } \frac{d\langle\psi|}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle\psi| H,$$

где использовано свойство эрмитовости Гамильтониана H .

Тогда производная от оператора плотности будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = \sum_k p_k \frac{d|\psi_k(t)\rangle}{dt} \langle\psi_k(t)| + \sum_k p_k |\psi_k(t)\rangle \frac{d\langle\psi_k(t)|}{dt}.$$

Используя значения производных от векторов квантовых состояний, получим:

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -\frac{i}{\hbar} \left\{ \sum_k p_k H |\psi_k(t)\rangle \langle\psi_k(t)| - \sum_k p_k |\psi_k(t)\rangle \langle\psi_k(t)| H \right\}.$$

Правую часть приведенного выражения можно представить через коммутатор $[A, B] = AB - BA$ в виде:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)]. \quad (26)$$

Уравнение (26) называется уравнением фон Неймана для оператора плотности.

Рассмотрим следствие уравнения (26), которое приводит к следующему результату:

$$i \frac{\partial \rho^2}{\partial t} = i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \rho + i \rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = [H, \rho] \rho + \rho [H, \rho] = [H, \rho^2],$$

$$i \frac{\partial \rho^n}{\partial t} = [H, \rho^{n-1}] \rho + \rho^{n-1} [H, \rho] = [H, \rho^n].$$

Тогда квантовое уравнение Лиувилля для оператора энтропии фон Неймана, которая является функционалом вида $\rho \ln \rho$ может быть записано как [12]:

$$i \frac{\partial \ln \rho}{\partial t} = [H, \ln \rho] \text{ и } i \frac{\partial \rho \ln \rho}{\partial t} = [H, \rho \ln \rho],$$

где $I = Tr(\rho \ln \rho)$ определяет информационную энтропию фон Неймана.

Пример: Особенности вывода волновых квантовых уравнений. Рассмотрим вывод модели волновых квантовых уравнений, описывающих унитарные операторы U типа $|\psi_{fin}\rangle = U|\psi_{in}\rangle$, где кет-вектор $|\psi_{in}\rangle$ – начальное состояние квантовой системы, $|\psi_{fin}\rangle$ – конечное состояние квантовой системы, U – унитарный оператор, описывающий эволюцию квантовой системы, и переводящий ее из начального $|\psi_{in}\rangle$ в конечное состояние $|\psi_{fin}\rangle$. В частности, обсудим особенности данного (второго) постулата квантовой механики, так как физическая интерпретация данного постулата связана с разработкой математической модели унитарного оператора U , описывающего эволюцию квантовых систем, используемых широко в задачах квантового управления, квантовых вычислений и конструирования квантовых алгоритмов. Допустим, что оператор $U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} At\right)$ генерируется эрмитовым оператором A . Рассмотрим инфинитезимальную форму постулата 2 в виде: $|\psi(t+dt)\rangle = U(dt)|\psi(t)\rangle$. Если положить, что $U(dt)$ генерируется некоторым эрмитовым оператором H типа $U(dt) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Hdt\right)$, то, разлагая $|\psi(t+dt)\rangle$ в ряд Тейлора с учетом до первого порядка dt членов ряда, получим:

$$|\psi(t+dt)\rangle = |\psi(t)\rangle + dt \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle + \dots, \text{ и } U(dt) = 1 - \frac{i}{\hbar} Hdt + \dots$$

Тогда имеем в результате: $|\psi(t)\rangle + dt \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \left(1 - \frac{i}{\hbar} Hdt\right) |\psi(t)\rangle$. Следовательно, можно после несложных алгебраических преобразований получить вывод уравнения Шредингера:

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\psi(t)\rangle,$$

т.е., уравнение Шредингера следует непосредственно из второго постулата квантовой механики [13].

2. О связи меры информации Фишера и вывод уравнения Шредингера.

Как и ранее будем рассматривать измерения (для упрощения, одномерную) координаты x , результаты повторных измерений которой могут быть охарактеризованы средними значениями $\langle x \rangle = \int xp(x,t)dx$, $\langle x^2 \rangle = \int x^2 p(x,t)dx$, $p(x,t) \geq 0$ и выполняется условие нормировки $\int p dx = 1$ и $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n p = 0$, $n = 1, 2, 3$ при всех t . Из условия нормировки $p(x,t)$ и результата интегрирования по частям по отношению x в виде:

$$xp \Big|_{x=-\infty}^{\infty} - \int x \frac{\partial p}{\partial x} dx = 1$$

получим, что первый член данного уравнения равен нулю и имеем как следствие:

$$\int x \frac{\partial p}{\partial x} dx = -1.$$

Из данного соотношения можно вывести интересные следствия. Так принимая обозначения $u = x\sqrt{p}$, и $\mathcal{G} = \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\partial p}{\partial x}$, а также известное неравенство Шварца $(u, u)(\mathcal{G}, \mathcal{G}) \geq |(u, \mathcal{G})|^2$ для внутреннего произведения $(u, \mathcal{G}) = \int u^* \mathcal{G} dx$ получим соотношение неопределенности:

$$\langle x^2 \rangle I \geq 1, \text{ и } I = \int \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 dx,$$

которое носит наименование информации Фишера.

Член $\frac{1}{p}$ приводит к дивергенции при $p(x) \rightarrow 0$, поэтому можно определить амплитуду вероятности $q(x)$ и вероятность $q^2(x) = p(x)$. Тогда имеем $I = 4 \int \left(\frac{dq(x)}{dx} \right)^2 dx$.

2.1. Мера информации Фишера в информационной физике

Рассмотрим пример применения данной меры информации к выводу стационарного (независящего от времени) волнового уравнения Шредингера, описывающего движение частицы массой m в скалярном потенциальном поле $V(x)$ и полной энергии $W(x)$. Положение частицы x определяется амплитудами вероятности $q_n(x)$. Информация из измерения положения частицы определяется в виде

$$I = 4 \sum_{n=1}^N \int dx \left(\frac{dq_n(x)}{dx} \right)^2. \text{ Определим комплексные волновые функции } \psi_n(x) \text{ в виде } \psi_n(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} (q_{2n-1}(x) + iq_{2n}(x)).$$

Тогда выражение для информации будет иметь:

$$I = 4N \sum_{n=1}^{N/2} \int dx \left(\frac{d\psi_n(x)}{dx} \right)^* \left(\frac{d\psi_n(x)}{dx} \right) = 4N \sum_{n=1}^{N/2} \int dx \left| \frac{d\psi_n(x)}{dx} \right|^2.$$

Волновая функция $\phi_n(\mu)$ момента μ связана с волновой функцией $\psi_n(x)$ преобразованием Фурье $\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int d\mu \phi_n(\mu) e^{-\frac{i\mu x}{\hbar}}$, применяя $\frac{d}{dx}$ оператор дифференцирования к обеим сторонам преобразования Фурье получим:

$$\frac{d\psi_n(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int d\mu \left(-\frac{i\hbar}{\hbar} \phi_n(\mu) \right) e^{-\frac{i\mu x}{\hbar}}.$$

Таким образом, имеем взаимное преобразование Фурье:

$$\psi_n(x) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \phi_n(\mu) \text{ и } \frac{d\psi_n(x)}{dx} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} -\frac{i\mu}{\hbar} \phi_n(\mu).$$

В силу теоремы Парсеваля имеем соответственно:

$$\int dx |\psi_n(x)|^2 = \int d\mu |\phi_n(\mu)|^2 \text{ и } \int dx \left| \frac{d\psi_n(x)}{dx} \right|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \int d\mu \mu^2 |\phi_n(\mu)|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \langle \mu^2 \rangle.$$

Следовательно, из последнего соотношения следует определение количества информации Фишера определяется через распределение момента в виде:

$$I = \frac{4N}{\hbar^2} \int d\mu \mu^2 \sum_{n=1}^{N/2} |\chi_n(\mu)|^2 \equiv J.$$

Информация J представляет собой предельное количество информации, которое можно извлечь из измерения и ограничивает сверху количество информации I , вычисляемое по наблюдению положения частицы x через вероятность ее обнаружения в интервале $(x - dx, x + dx)$. Унитарное по своей природе преобразование Фурье приводит к вариационному принципу определения оптимума между наблюдаемой информацией I о положении частицы и ее дуальной (в силу принципа неопределенности) величине момента в виде количества информации J .

Равенство $I = J$, означает, что измеряемое количество информации максимально эффективно передается через информацию (наблюдение) дуальной величины. Для полноты суждения отметим, что здесь не рассматривается выходной сигнал измерительного прибора и поэтому неопределенность определения точности состояния физической системы в рассмотрение не включено. Полное распределение вероятности положение x частицы имеет в этом случае вид $p(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N q^2(x) = \sum_{n=1}^{N/2} |\psi_n(x)|^2$.

Нетрудно видеть, что справедливы ранее приведенные выражения в следующем виде:

$$\int d\mu \sum_n |\chi_n(\mu)|^2 = \int dx \sum_n |\psi_n(x)|^2 = \int dx p(x) = 1,$$

так что $P(\mu) = \sum_n |\phi_n(\mu)|^2$ определяет плотность вероятности момента μ . Тогда имеем:

$$\frac{4N}{\hbar^2} \int d\mu \mu^2 \sum_{n=1}^{N/2} |\chi_n(\mu)|^2 \equiv J = \frac{4N}{\hbar^2} \int d\mu \mu^2 P(\mu) = \frac{4N}{\hbar^2} \langle \mu^2 \rangle.$$

В приближении нерелятивистской механики кинетическая энергия частицы равна $\frac{\mu^2}{2m}$ и полная энергия $W = U(x) + \frac{\mu^2}{2m}$.

Поэтому можно преобразовать ранее введенные выражения к виду:

$$J = \frac{4N}{\hbar^2} \langle \mu^2 \rangle = \frac{8Nm}{\hbar^2} \langle W - U(x) \rangle = \frac{8Nm}{\hbar^2} \int dx (W - U(x)) p(x) = \frac{8Nm}{\hbar^2} \int dx (W - U(x)) \sum_{n=1}^{N/2} |\psi_n(x)|^2.$$

Таким образом, информация J , извлекаемая из измерения, является функционалом волновой функции $\psi_n(x)$, т.е. $J[\psi_n(x)]$ определяет функционал ограниченной информации для рассматриваемой проблемы, и $I[\psi_n(x)] = J[\psi_n(x)]$.

Рассмотрим функционал $K[\psi_n(x)] = I[\psi_n(x)] - J[\psi_n(x)] = I - J$ и согласно принципу экстремума физической информации, необходимо найти его экстремум, т.е.:

$$K = I - J = 4N \sum_{n=1}^{N/2} \int dx \left[\left| \frac{d\psi_n(x)}{dx} \right|^2 - \frac{2m}{\hbar^2} [W - U(x)] |\psi_n(x)|^2 \right] = Extremum.$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа для данной вариационной задачи имеет вид:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{nx}^*} \right) = \frac{\partial L}{\partial \psi_n^*}, \quad n = 1, \dots, N/2, \quad \psi_{nx}^* \equiv \frac{\partial \psi_n^*}{\partial x},$$

а использование подынтегрального выражения для функционала K в качестве Лагранжиана L дает решение вариационной задачи в виде:

$$\frac{d^2 \psi_n(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [W - U(x)] \psi_n(x) = 0, \quad n = 1, \dots, N/2,$$

т.е. имеем стационарное уравнение Шредингера, выведенное из информационного принципа экстремума информации Фишера [14].

Пример: Информационная механика Лагранжа на основе меры информации Фишера. Рассмотрим информационный подход на основе обобщенного Лагранжиана \mathcal{L} в виде включения меры информации Фишера

$$I_F = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \log p|^2 p dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial}{\partial p} \log p \right|^2 p dx$$

в его стандартную структуру [15]:

$\mathcal{L} = T + I - U$. Следуя методу Эйлера-Лагранжа, получим уравнения, ассоциированные с данным Лагранжианом. Для этой цели в стандартной процедуре метода Лагранжа 2-го рода вычисляется вариационная производная от меры информации Фишера I_F , которая после вычислений имеет следующий вид:

$$\frac{\partial I_F}{\partial p} = 4 \frac{\Delta \sqrt{p}}{\sqrt{p}}.$$

Соответственно, уравнения движения имеют следующий вид:

$$p \frac{\partial}{\partial t} (\nabla S) + \frac{1}{2} p |\nabla S|^2 - p \nabla V + 4 \frac{\Delta \sqrt{p}}{\sqrt{p}} = 0.$$

Принимая обозначения $u = \nabla S$ можно сделать вывод, что пара переменных (p, u) дает решение уравнений квантовой гидродинамики [15, 16]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (pu) + \operatorname{div} (pu \otimes u) - p \nabla V + 4p \nabla \left(\frac{\Delta \sqrt{p}}{\sqrt{p}} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} p + \operatorname{div} (pu) = 0.$$

Данные уравнения называются уравнениями Мадэлунга. Подстановка $\psi = \sqrt{p} \exp(iS)$ приводит к уравнению Шредингера для волновой функции ψ в виде:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = -4 \Delta \psi + V \psi,$$

при условии, что начальные значения приготовлены в виде $\psi(\bullet, 0) = \sqrt{p(\bullet, 0)} \exp(iS(\bullet, 0))$.

2.2. Мера информации Фишера в информационной геометрии

Рассмотрим некоторые дополнительные особенности свойств информации Фишера в информационной геометрии. Допустим задана система, которая описывается плотностью вероятностей

$P(x, \theta)$, где θ параметр. Предположим, что существуют первая $\frac{\partial P(x, \theta)}{\partial \theta} = \partial_\theta P(x, \theta)$ и вторая

$\frac{\partial^2 P(x, \theta)}{\partial \theta^2} = \partial_\theta^2 P(x, \theta)$ производные.

Количество информации Фишера $I(\theta)$ определяется при $\partial_\theta \int dx P(x, \theta) = \partial_\theta 1 = 0$ как:

$$I(\theta) = \int dx \frac{(\partial_\theta P(x, \theta))^2}{P(x, \theta)} = \left\langle (\partial_\theta P(x, \theta))^2 \right\rangle_\theta = - \left\langle \partial_\theta^2 \ln P(x, \theta) \right\rangle_\theta,$$

где $\langle \dots \rangle_\theta$ означает осреднение в соответствии с $P(x, \theta)$. Информация Фишера связана с дивергенцией Кульбака-Лейблера (относительной энтропией) между двумя распределениями вероятностей $P(x)$

и $Q(x)$, $D_{\text{KL}}(Q \| P) = \int dx Q(x) \ln \left(\frac{Q(x)}{P(x)} \right)$. Положим, что $Q(x) = P(x, \theta + d\theta)$, т.е. распределение вероятностей имеет инфинитезимальное смещение параметра, и соответствующая дивергенция Кульбака-

Лейблера может быть записана как $D_{KL}(P(\theta + d\theta) \| P(\theta)) = \frac{1}{2} I(\theta) d\theta^2 + O(d\theta^3)$, а с точки зрения информационной геометрии информация Фишера является кривизной дивергенции Кульбака-Лейблера. Подобно дивергенции Кульбака-Лейблера информация Фишера аддитивна в следующем смысле: предположим имеется дополнительная случайная переменная, которая образует пару $x = (y, z)$, которая связаны условным распределением вероятностей $P_{z|y}(z, \theta | y)$. Тогда можно записать $P(x, \theta) = P_{z|y}(z, \theta | y) P_y(y, \theta)$, где $P_y(y, \theta)$ маргинальное распределение вероятностей случайной переменной y . Тогда после всех выкладок имеем:

$$I(\theta) = I_{z|y}(\theta) + I_y(\theta),$$

где

$$I_{z|y}(\theta) \equiv \int dz \int dy \frac{(\partial_\theta P_{z|y}(z, \theta | y))^2}{P_{z|y}(z, \theta | y)} P_y(y, \theta) = \left\langle (\partial_\theta \ln P_{z|y})^2 \right\rangle_\theta, \quad I_y(\theta) \equiv \int dy \frac{(\partial_\theta P_y(y, \theta))^2}{P_y(y, \theta)} = \left\langle (\partial_\theta \ln P_y)^2 \right\rangle_\theta.$$

Следовательно, декомпозиция информации Фишера может быть представлена в виде суммы двух положительных членов, зависящих от условной статистики случайной величины z и статистики случайной величины y , соответственно. В частности, имеем $I(\theta) \geq I_y(\theta)$, т.е. исключение переменных из рассмотрения информацию Фишера.

Если случайные переменные z и y независимы, то имеем $I(\theta) = I_z(\theta) + I_y(\theta)$.

2.3. Обобщенные мера информации Фишера и дивергенции

Меры измерения информации Фишера могут быть обобщены в разных направлениях. Рассмотрим одно из таких обобщений [17-23].

Определение: $((p, \beta) -$ информация Фишера). Для некоторых $p \in (1, \infty)$ и $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, $(p, \beta) -$ информация Фишера для непрерывной дифференцируемой плотности ρ определяется в следующем виде $F_{p,\beta}[\rho] = \left(\int_{\mathbb{R}} \left| [\rho(x)]^{\beta-1} \frac{d}{dx} \log[\rho(x)] \right|^p \rho(x) dx \right)^{\frac{2}{p\beta}}$ при предположении существования интеграла.

При строго положительной ρ и ограниченном множестве определения аргумента введенный интеграл должен существовать на всем замкнутом поддерживающим аргумент множеством и быть дифференцируемым на данном замкнутом множестве аргумента. В частном случае $F_{2,1}$ определяет стандартную меру информацию Фишера.

Определение: $((p, \beta, \lambda) -$ сложность Фишера-Реньи) [17]. Мера $((p, \beta, \lambda) -$ сложности Фишера-Реньи для распределения ρ определяется как величина вида $C_{p,\beta,\lambda}[\rho] = (F_{p,\beta}[\rho] N_\lambda[\rho])^\beta$, в котором энтропия Реньи мощностью β с индексом λ для непрерывной дифференцируемой плотности ρ определяется как $N_\lambda[\rho] = \exp\{2H_\lambda[\rho]\}$, и $H_\lambda[\rho] = \frac{1}{1-\lambda} \log \int_{\mathbb{R}} |\rho(x)|^\lambda dx$ является обобщенной информационной энтропией Шеннона. При этом распределение определяется индексом подбрасываемой монеты ($\lambda < 1$) «решка» и ($\lambda > 1$) «орел». Таким образом, два различных значения параметра λ для распределения ρ и его производной могут рассматриваться для ранее введенного определения двухпараметрического количества информации Фишера.

Примечание. Существует семейства обобщенных мер энтропии и дивергенции [18-20], применение которых позволяет расширить возможности исследования пропускной способности каналов передачи информации, робастность каналов к ошибкам в передачи информации, квантового тестирования гипотез и мн. др. К таким мерам относятся, например, относительная типа Реньи – «сэндвич» энтропия вида:

$$D_\alpha(\rho\|\sigma) := \frac{1}{\alpha-1} \log Q_\alpha(\rho\|\sigma), \text{ где } Q_\alpha(\rho\|\sigma) := \text{Tr} \left[\left(\sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \rho \sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \right)^\alpha \right] \text{ и } \alpha \in (0,1) \cup (1,\infty)$$

или мера относительной энтропии Умегаки вида $D(\rho\|\sigma) := \text{Tr}[\rho(\log \rho - \log \sigma)]$ при условии $\sigma \gg \rho$ и равно ∞ при $\sigma \not\ll \rho$. Распространенные меры Петц-Реньи, log-Эвклидова Реньи дивергенция, и Реньи - сэндвич дивергенция определяются, соответственно, как:

$$D_\alpha(\rho\|\sigma) := \frac{1}{\alpha-1} \log \frac{\text{Tr}[\rho^\alpha \sigma^{1-\alpha}]}{\text{Tr}[\rho]}, \quad D^*_\alpha(\rho\|\sigma) := \frac{1}{\alpha-1} \log \frac{\text{Tr} \left[\left(\sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \rho \sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \right)^\alpha \right]}{\text{Tr}[\rho]} \text{ и}$$

$$D^*_\alpha(\rho\|\sigma) := \frac{1}{\alpha-1} \log \frac{\text{Tr} \left[e^{\alpha \log \rho + (1-\alpha) \log \sigma} \right]}{\text{Tr}[\rho]}.$$

Вариации квантовой относительной энтропии можно представить в виде следующих выражений [21-23]:

$$V^{(t)}(\rho\|\sigma) := \text{Tr}[\rho(\log \rho - \log \sigma)^2] - D(\rho\|\sigma)^2, \quad (t) = \{ \} \text{ или } *$$

$$V^*(\rho\|\sigma) := \int_0^1 dt \text{Tr}[\rho^{1-t} (\log \rho - \log \sigma) \rho^t (\log \rho - \log \sigma)] - D(\rho\|\sigma)^2.$$

Примечание. Понятие вспомогательной функции $E_0(s, P)$ ввел Галлагер [24] в следующем виде:

$$E_0(s, P) := -\log \int \left(\sum_x P(x) \left(\frac{dW_x}{dv} \right)^{\frac{1}{1+s}} \right)^{1+s} dv, \quad s > 1, \text{ где } \nu \text{ некоторая мера такая, что } W_x \text{ является абсо-}$$

лютно непрерывной функцией по отношению к ν для всех x и $P(x) > 0$. Бурнашев и Холево [25] обобщили вспомогательную функцию Галлагера на квантовую вспомогательную функцию в виде

$$E_0(s, P) := -\log \text{Tr} \left[\left(\sum_x P(x) W_x^{\frac{1}{1+s}} \right)^{1+s} \right], \text{ где } \{W_x\} - \text{множество операторов плотности пространства}$$

выходных сигналов. В свою очередь, выражение $I_\alpha^{(1)}(P, \mathcal{W}) := \inf_q D_\alpha(P \circ \mathcal{W} \| P \otimes q) = \frac{E_0^{(1)}}{s} \Big|_{s=\frac{1-\alpha}{\alpha}}$, в котором инфимум берется по всем вероятностным мерам q выходов измеримого пространства, и $P \circ \mathcal{W}$ означает совместную вероятностную меру между входным и выходным пространствами, эквивалентно шкале версии вспомогательной функции Галлагера.

Величину $I_\alpha^{(1)}(P, \mathcal{W})$ называют информацией Реньи порядка α для распределения P . Величину типа $I_\alpha^{(2)}(P, \mathcal{W}) := \inf_q \sum_x P(x) D_\alpha(\mathcal{W}_x \| q)$ обозначают как информацию Аугустина порядка α для рас-

пределения P [23]. Тогда при максимизации по всем P обе меры информации Реньи и Аугустина эквивалентны пропускной способности Реньи порядка α вида $C_{\alpha, \mathcal{W}} := \sup_P I_\alpha^{(1)}(P, \mathcal{W}) = \sup_P I_\alpha^{(2)}(P, \mathcal{W})$.

Тогда можно также определить вспомогательную функцию, ассоциированную с информацией Аугустина в виде:

$$E_0^{(2)}(s, P) := s I_{\frac{1}{1+s}}^{(2)}(P, \mathcal{W}) \text{ и } E_0^{(2)}(s, P) = \inf_v \left\{ \sum_x P(x) D(V_x \| W_x) + s I(P, v) \right\}, \quad s > -1,$$

где инфимум берется по всем фиктивным каналам входных и выходных пространств \mathcal{W} ; $I(P, v)$ определяет информацию Шеннона и $D(V_x \| W_x)$ - дивергенция Кульбака-Лейблера.

Примечание. Меры количества информации Реньи и Аугустина порядка α , количество информации Холево можно также записать в приведенных выше обозначениях как:

$$I_\alpha^{(1),(t)}(P, \mathcal{W}) := \inf_{\sigma \in \mathcal{S}^{(t)}} D_\alpha^{(t)}(P \circ \mathcal{W} \| P \otimes \sigma), I_\alpha^{(2),(t)}(P, \mathcal{W}) := \inf_{\sigma \in \mathcal{S}^{(t)}} D_\alpha^{(t)}(\mathcal{W} \| P | \sigma), \text{ для } (t) = \{ \cdot \}, *, *$$

где $P \circ \mathcal{W} = \sum_{\omega \in \mathcal{W}} P(\omega) D_\alpha^{(t)}(\omega \| \sigma)$, $\alpha \in [0, \infty]$ означает совместную вероятностную меру и $\omega \in \mathcal{W}$ и $D_\alpha^{(t)}(\mathcal{W} \| P | \sigma) := \sum_{\omega \in \mathcal{W}} P(\omega) D_\alpha^{(t)}(\omega \| \sigma)$, $\alpha \in [0, \infty]$; при $\alpha = 1$ оба приведенные выражения для мер информации Реньи и Аугустина соответствуют соотношению Холево в виде [23]:

$$I_\alpha^{(1),(t)}(P, \mathcal{W}) = I_\alpha^{(2),(t)}(P, \mathcal{W}) = I(P, \mathcal{W}) := D(P \circ \mathcal{W} \| P \otimes P\mathcal{W}) = D_1(\mathcal{W} \| P \otimes P\mathcal{W} | P),$$

где $P\mathcal{W} = \sum_{\omega \in \mathcal{W}} P(\omega)\omega$ задает маргинальное состояние на выходном Гильбертовом пространстве. Если меры коммутируют, то данное соотношение точное определение взаимной информации Шеннона.

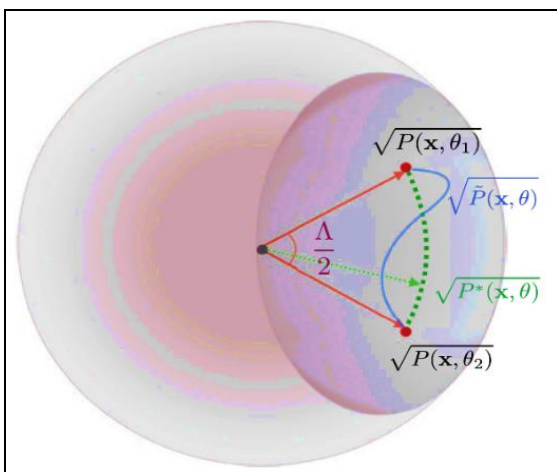
Разновидности приведенных обобщенных мер энтропии и дивергенции рассмотрены на примерах в 3.2 при обсуждении информационных моделей второго закона термодинамики.

2.4. Геометрическая интерпретация меры информации Фишера

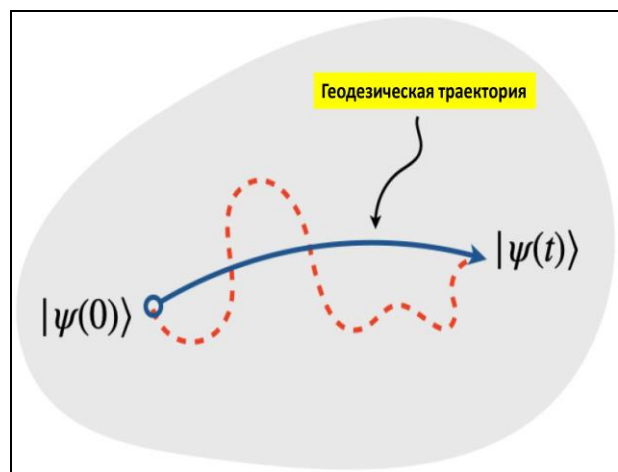
Геометрическая интерпретация информации Фишера следует из определения статистического элемента длины ds в информационной геометрии в виде $ds^2 = I(\theta)d\theta^2$. Величина ds интерпретируется как безразмерное расстояние между вероятностными распределениями от двух инфинитезимально различимыми значениями θ , т.е. между $P(x, \theta)$ и $P(x, \theta + d\theta)$. Естественный путь определения элемента длины линии инфинитезимального статистического расстояния в виде:

$$\mathcal{L}(\theta_2, \theta_1) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} |d\theta| \sqrt{I(\theta)}.$$

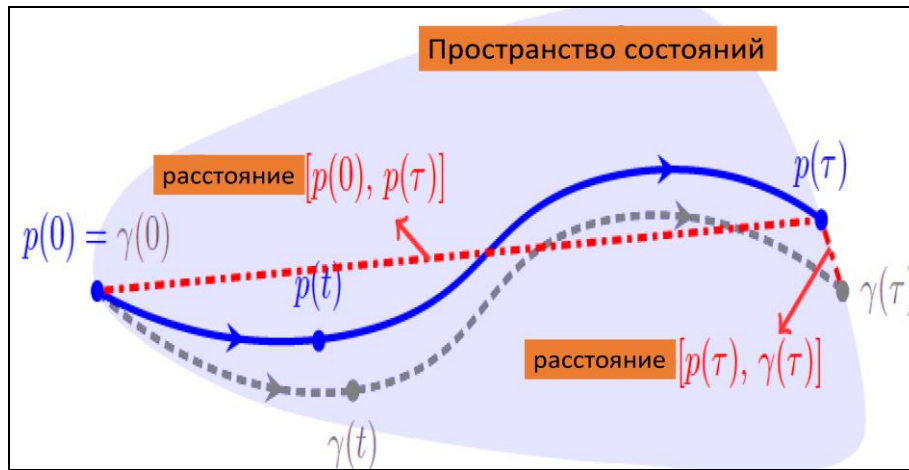
Это есть мера измерения длины расстояния «пройденного» распределением вероятностей при изменении параметра от $\theta = \theta_1$ до $\theta = \theta_2$. Следует отметить, что введенное определение удовлетворяет всем аксиомам метрики и определения геометрии длины отрезка траектории, т.е. неравенству треугольника и сохраняет инвариант длины при параметризации пути траектории. Геометрически условие нормализации приводит к факту, что $\sqrt{P(x, \theta)}$ определяется как вектор единичной длины, т.е. определяется инфинитезимальной траекторией на сфере единичного радиуса (см. рис. 2).



(a)



(б)



(6)

Рис. 2. Возможные варианты параметризации расстояния между двумя распределениями вероятностей $P(\theta_1)$ и $P(\theta_2)$ [26-28].

Таким образом, минимальная длина определяется как длина дуги между двумя точками $P(\theta_1)$ и $P(\theta_2)$ на единичной сфере как $\Lambda \equiv 2 \arccos \left(\int dx \sqrt{P(x, \theta_2) P(x, \theta_1)} \right)$, т.е. в виде угла Бхаттачарья. Параметризация (на рис. 1 в виде $\sqrt{P^*(x, \theta)}$), реализующая данное расстояние минимальной длины, называется геодезической и определяется как:

$$P^*(x, \theta) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\Lambda}{2}\right)^2} \left(\sin\left(\frac{\Lambda}{2} \frac{\theta_2 - \theta}{\theta_2 - \theta_1}\right) \sqrt{P(x, \theta_1)} + \sin\left(\frac{\Lambda}{2} \frac{\theta - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1}\right) \sqrt{P(x, \theta_2)} \right)^2,$$

которое минимизирует интеграл действия $C(\theta_2, \theta_1) = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta I(\theta)$. Для геодезической имеем:

$$\mathcal{L}^*(\theta_2, \theta_1) = \Lambda, \quad C^*(\theta_2, \theta_1) = \frac{\Lambda^2}{2(\theta_2 - \theta_1)}.$$

Физическая интерпретация информации Фишера заключается в возможности измерения количества информации в состоянии системы, определяемое множеством параметров: если состояние системы не зависит от данного параметра, то информация Фишера равна нулю и получить информацию при его измерении невозможно; если малая вариация параметра приводит к высокому изменению состояния системы, то информация Фишера возрастает и возможно получить точную оценку параметра соответствующим измерением [24-27].

Пример: Информационная длина и физическая интерпретация. Интуитивно информационную длину определяют, вычисляя, как быстро количество информации меняется во времени, а затем измеряют тактовое время на основе этой шкалы времени. В частности, временной масштаб изменения информации τ может быть вычислен по времени корреляции зависящей от времени плотности распределения вероятностей, $p(x, t)$, следующим образом: $\frac{1}{\tau^2} = \int dx \frac{1}{p(x, t)} \left[\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \right]^2$. Тогда размерность $\tau = \tau(t)$ является временем и служит динамической единицей времени для изменения информации. $\mathcal{L}(t)$ – общее изменение информации между временем 0 и t :

$$\mathcal{L}(t) = \int_0^t \frac{dt_1}{\tau(t_1)} = \int_0^t dt_1 \sqrt{\int dx \frac{1}{p(x, t_1)} \left[\frac{\partial p(x, t_1)}{\partial t_1} \right]^2}.$$

В принципе, неравенство $\tau(t)$ может зависеть от времени, поэтому требуется интегральное обобщение. Величины $\tau(t)$ и $\mathcal{L}(t)$ в уравнениях выше связаны с относительной энтропией (расхождение

Кульбака–Лейблера) $D(p_1, p_2) = \frac{1}{2} \left[\int dx \frac{(\partial_t p(x, t))^2}{p(x, t)} \right] (dt)^2$ следующим образом. Инфинитезимальное

расстояние $dl(t_1) = \sqrt{D(p_1, p_2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\int dx \frac{(\partial_t p(x, t))^2}{p(x, t)}}$ и суммирование по

$dt(t_i), i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ($n = t/dt$) при $dt \rightarrow 0$ имеем в результате:

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{D[p(x, idt), p(x, (i+1)dt)]} dt \propto \int_0^t dt_1 \sqrt{\int dx \frac{(\partial_{t_1} p(x, t_1))^2}{p(x, t_1)}} = \mathcal{L}(t),$$

где $\mathcal{L}(t)$ – информационная длина. Таким образом, $\mathcal{L}(t)$ равна сумме бесконечно малой относительной энтропии [27].

Отметим, что $\mathcal{L}(t)$ означает лагранжево расстояние между функциями плотности распределения вероятностей в моменты времени 0 и t , и оно зависит существенно от конкретного пути, по которому система прошла, достигнув конечного состояния. Напротив, относительная энтропия $D[p(x, 0), p(x, t)]$ зависит только от функций плотности распределения вероятностей в моменты времени 0 и t и, следовательно, не говорит о промежуточных состояниях между начальным и конечным состояниями.

3. Термодинамика информации Фишера и энергетика синергетического эффекта самоорганизации знаний - информационное взаимодействие в системах «объект управления + регулятор»

Одной из особенностей стохастической термодинамики является наличие неоднозначности в определении понятий тепла и работы в том смысле, что модели осреднения осуществляются либо по ансамблям или по времени, а рассмотрение корректности моделей ограничено пределами моделей интерпретации самой термодинамики. Это привело к различным определениям указанных понятий, например, тепла, которое имеет эквивалентные осреднения, но отличается в терминах флуктуаций.

Термодинамика информации Фишера. Классическое определение стохастического потока тепла имеет вид $\dot{Q}^{\text{heat}}(t) = -f(x(t), t) \circ \dot{x}(t)$, где операция \circ означает стохастическое произведение Стратоновича, и отвечает первому закону термодинамики $d_t U(x(t)) = \dot{Q}(t) + \dot{W}(t)$ для ансамбля простых траекторий броуновского движения. В силу того, что траектории Броуновского движения разрывные по своей природе, то определение дает корректное осреднение потока тепла $\langle \dot{Q}(t) \rangle_t$ между системой и тепловым резервуаром (баней), но вариация формально бесконечна, т.е. $\langle \Delta \dot{Q}^2(t) \rangle_t = \infty$. Поэтому вместо измерения реальной скорости $\dot{x}(t)$ частицы измеряют среднюю скорость положения $x(t)$, которая физически представляет собой локальную среднюю скорость $\mathcal{G}(x(t), t)$ и определяется потоком тепла в обозначениях, принятых ранее, в виде: $\dot{Q}^{\text{mean}}(t) = -f(x(t), t) \mathcal{G}(x(t), t)$. Данное определение можно рассматривать как «локальный осредненный поток тепла» в том смысле, что осреднение $\dot{Q}(t)$ осуществляется в соответствии с условным распределением вероятностей $P(x, t + dt | x(t), t)$. В результате получаем эквивалентное усреднение, как и $\dot{Q}(t)$, но вариация уже имеет конечное значение.

Другое возможное определение тепла в терминах локальной средней скорости имеет следующий вид:

$$\dot{Q}^{\text{entr}}(t) = -\mathcal{G}(x(t), t)^T \mu^{-1} \mathcal{G}(x(t), t) + k_B T \nabla \cdot \mathcal{G}(x(t), t).$$

После осреднения и выкладок получим:

$$\langle \dot{Q}^{\text{entr}}(t) \rangle_t = -k_B T (\sigma^{\text{tot}}(t) - \sigma^{\text{synt}}(t)),$$

где $\sigma^{\text{synt}}(t) = -\partial_t \int dx P(x, t) \ln P(x, t)$ определяет скорость производства информационной энтропии Шеннона. Данному определению соответствует физическая интерпретация тепла как возрастание энтропии при событийном взаимодействии, а вариация величина конечная. Тогда определение информации Фишера можно представить в виде [28]:

$$I(t) = \beta^2 \left\langle \left(\dot{Q}^{\text{heat}} - \dot{Q}^{\text{entr}} \right)^2 \right\rangle_t.$$

Следовательно, информация Фишера может быть определена через мощность флуктуаций взаимодействующих событий.

Рассмотрим на основе приведенных выводов взаимосвязь между количеством информации, извлекаемой из БЗ когнитивного интеллектуального регулятора, и свободной энергией для совершения полезной работы с позиции семейства второго закона термодинамики.

Физические ограничения на извлечение максимального количества полезной работы и информационные ресурсы работы в корреляционных связях между системой и памятью.

В квантовой термодинамике производство энтропии системой определяется как произведение термодинамических сил на термодинамический поток переноса тепла. Максимальное количество работы, извлекаемой из системы ограничено изменением ее неравновесной свободной энергии. Необратимые процессы рассматриваются в общем случае как воспроизводимые «термодинамическими силами» управляемые «термодинамические потоки» [29]. Таким образом, термодинамические потоки можно рассматривать как следствие воздействия термодинамических сил [30], которые, в свою очередь, носят не механический характер, например, силы диссипации. Энтропия и корреляция взаимосвязаны, а работа может быть извлечена из корреляции между системой и памятью резервуара [31]. Диссипативная информация характеризует количественную меру затраченной работы, извлеченной из корреляционных связей.

Таким образом, квантовая диссипативная информация характеризует потенциальную затрачиваемую работу и информация, связанная с событиями о системе, рассматривается как потеря части возможной работы. В свою очередь, условная взаимная информация может рассматриваться как часть производства термодинамической энтропии. Условно свободная энергия эквивалентна максимально извлекаемой из системы работе при известной памяти резервуара. Другими словами, количества возможной полезной работы можно извлечь больше из корреляционных связей между системой и памятью резервуара, взаимодействующего с системой, если корреляция доступна наблюдателю [31-34]. Рассмотренные положения являются платформой для оценки физических ресурсов при конструировании моделей квантовых алгоритмов самоорганизации интеллектуального когнитивного управления с применением дополнительно выполненной полезной работы, извлеченной из скрытой в классических состояниях квантовой информации.

3.1. Информационно-термодинамические ограничения на извлечение полезной работы в информационной физике и информационной геометрии

Физически синергетический эффект означает самоорганизацию знаний и создание дополнительной информации, которая позволяет многоагентной системе выполнять наиболее полезную работу с минимальной потерей полезного ресурса и с минимумом необходимой исходной информации, не разрушая нижнюю исполнительный уровень системы управления. Вместе с информационно-термодинамическим законом интеллектуального управления (оптимальное распределение качеств управления как «устойчивость - управляемость - робастность») интеллектуальная система управления (ИСУ) разработана как многоагентная система, обеспечивающая достижение цели управления в условиях неопределенности исходной информации и ограниченного полезного ресурса.

Примечание. Известно, что если наблюдателю в виде демона Максвелла доступны микроскопические степени свободы, то второй закон термодинамики может быть нарушен. Сцилард показал из анализа модели демона Максвелла, что из термодинамического цикла извлекается работа в виде $kT \ln 2$. Более того, было показано, что извлекаемая работа W_{ext}^S из системы определяется количеством информации (или квантово-классической взаимной информацией) I , которая извлекает знания о системе из результатов измерения. Одновременно подобное соотношение в виде нижней границы существует для полной стоимости W_{cost}^M измерения и стирания информации $W_{ext}^S \leq -\Delta F^S + kTI$ и $W_{cost}^M \geq kTI$, где ΔF^S определяет свободную энергию системы. Тогда нетрудно заметить, скорость извлекаемой работы \dot{W}_{ext} ограничена величиной $\dot{W}_{ext} \leq kT\dot{I}$, т. е. ограничена скоростью извлекаемой информации [35-37].

Примечание. Свойство робастности (по своей физической природе) выступает составной частью самоорганизации, а требуемый уровень робастности ИСУ достигается за счет выполнения отмеченного выше принципа минимума производства обобщенной энтропии. Принцип минимума производства энтропии в ОУ и системе управления служит физическим принципом оптимального функционирования с минимальным расходом полезной работы и лежит в основе разработки робастной ИСУ. Данное утверждение базируется на том, что для общего случая управления динамическими объектами оптимальное решение конечной вариационной проблемы определения максимума полезной работы W эквивалентно, согласно, решению конечной вариационной проблемы нахождения минимума производства энтропии S .

Таким образом, исследование условия максимума функционала $\max_{q_i, u}(W)$, где q_i, u – обобщенные координаты ОУ и сигнал управления соответственно, эквивалентно, исследованию ассоциированной проблемы минимума производства энтропии, т.е. $\min_{q_i, u}(S)$, или имеем эквивалент поиска решений задач оптимизации: $\max_{q_i, u}(W) \equiv \min_{q_i, u}(S)$.

Рассмотрим данное утверждение на примере с позиции теории оптимального управления на основе связи с уравнением Беллмана-Гамильтона-Якоби и термодинамики дифференциальных уравнений потока жидкой среды [38, 39]. Доставляемая совокупная мощность W на единицу расхода жидкости G как величина (W/G) определяется интегральным производством работы потока $dQ/G = -cdT$ при начальной T^i и конечной T^f температурах потока жидкости. Данное интегрирование соответствует производству специфичной работы потоком и оценивается в виде функционала следующего вида:

$$W_{[T^i, T^f]} \equiv \frac{W}{G} = - \int_{T^i}^{T^f} c \left(1 - \frac{T^e}{T + \dot{T}} \right) \dot{T} dt. \tag{27}$$

Обозначение $[T^i, T^f]$ означает переход из начальной точки направления движения состояния вектора $\mathbf{T} \equiv (T, \tau)$ в конечную точку состояния. Для функционала (27) задачу определения максимальной работы для данной модели можно определить как:

$$W_{\max} = \max \left\{ - \int_{T^i}^{T^f} L(T, \dot{T}) dt \right\} = \max \left\{ - \int_{T^i}^{T^f} c \left(1 - \frac{T^e}{T + \dot{T}} \right) \dot{T} dt \right\} \tag{28}$$

В (28) функция $L(T, \dot{T})$ определяет Лагранжиан системы и определяет энергию потока. В квазистатическом режиме $dT/d\tau = 0$ и функционал определения совершаемой работы (28) представляет изменение классической энергии (27).

Альтернативной формой определения работы является функционал вида:

$$W_{[T^i, T^f]} \equiv \frac{W}{G} = \int_{T^i}^{T^f} -c \left(1 - \frac{T^e}{T} \right) dt - T^e \int_{T^i}^{T^f} c \frac{\dot{T}^2}{T(T + \dot{T})} = - \int_{T^i}^{T^f} c \left(1 - \frac{T^e}{T} \right) dT - T^e S, \tag{29}$$

к котором первый член описывает «обратимый» процесс, а второй член функционала представляет собой произведение температуры равновесного состояния и производства энтропии S , которая определяется как:

$$S = \int_{T^i}^{T^e} c \frac{\dot{T}^2}{T(T + \dot{T})} d\tau. \quad (30)$$

Скорость производства энтропии определяется через единицу массы потока жидкости и определяет специфическую размерность количества энтропии S . В свою очередь, производство энтропии S отличается от специфической энтропии потока жидкости s . Так производство энтропии S является квадратичной функцией скорости потока $u = dT / d\tau$ только в случае, когда нет производства работы и соответственно нет эффективности, $\eta = 0$ или эквивалентно выполняется соотношение $T + \dot{T} = T^e$. Для случая активного переноса тепла (коэффициент эффективности η отличен от нуля) производство энтропии не является квадратичной функцией скорости, в представленном интегральном выражении (29). Операция максимизации для функционала (29) при фиксированном значении температуры и времени приводит к тому, что роль первого члена (т.е. описывающего потенциал) оказывается несущественной, и решение проблемы максимизации высвобожденной работы эквивалентно решению ассоциированной проблемы минимума производства энтропии. Таким образом, согласована роль поиска решения проблемы минимизации производства энтропии в установлении эквивалентности поиска решения проблемы максимизации извлекаемой работы.

Как следствие, получаем подтверждение вывода об эквивалентности решений проблемы максимизации извлекаемой работы и ассоциированной проблемы оптимизации с фиксированной конечной точкой в виде минимизации производства энтропии.

Пример: Принцип минимума производства энтропии на основе метода уравнения Гамильтона-Якоби. Рассмотренная задача поиска экстремума извлечения воспроизведенной работы может быть сформулирована также с позиции вариационного исчисления для Лагранжиана в виде:

$$L = c \left(1 - \frac{T^e}{\dot{T} - T} \right) \dot{T}. \quad (31)$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа для рассматриваемой проблемы поиска экстремума работы и минимума производства энтропии приводит к дифференциальному уравнению второго порядка

$$T\ddot{T} - \dot{T}^c = 0, \quad (32)$$

которое описывает оптимальные траектории всех рассматриваемых процессов. При этом первый интеграл уравнения (31) приводит к формальной аналогии с механической энергией в виде

$$E \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{T}} - L = c \frac{T^e \dot{T}^2}{(\dot{T} + T)^2}. \quad (33)$$

Уравнение для оценки оптимального значения температуры теплового потока при условии $E = h$ имеет следующий вид:

$$\dot{T} = \frac{\pm T \sqrt{\frac{h}{cT^e}}}{1 \pm \sqrt{\frac{h}{cT^e}}} \equiv \zeta T \quad \text{где} \quad \zeta = \frac{\ln \frac{T^f}{T^i}}{\tau^f - \tau^i}. \quad (34)$$

Из методов динамического программирования следует, что рассматриваемые функции с учетом локальных ограничений удовлетворяют уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана с теми же переменными состояниями системы, что и для задачи без ограничений. Отличие задач с ограничениями и без ограничений заключается в конечном счете только в численных значениях множеств определения оптимизационных управлений и видах функций качества.

Пример: проблема максимизация воспроизводимой двигателем работы. Рассматриваемая проблема может быть описана с точки зрения обратного уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (ГЯБ). Само обратное уравнение ГЯБ ассоциируется с исследованием количества оптимальной работой или

передаваемой двигателем энергии как оптимальной интегральной функции I , определяемая начальными состояниями (т.е., значениями температуры) и, соответственно, путями траекторий достижения состояний двигателя равновесия. Функцию I часто называют функцией оптимального качества для оценки возможной интегральной работы, воспроизводимой двигателем. Оценка возможной максимальной работы (для обоих случаев с ограничениями или без ограничений) осуществляется вычислением характеристической функции следующего вида:

$$I(\tau^f, T^f, \tau^i, T^i) \equiv \max_{[T^i, T^f]} W = \max \left\{ \int_{T^i}^{T^f} \left[-c \left(1 - \frac{T^e}{T+u} \right) u \right] d\tau \right\}. \quad (35)$$

Величина I в (35) определяет экстремальное значение интегральной возможной воспроизводимой работы $W(T^i, T^f)$. В этом случае функция I характеризует поведение экстремального значения работы, реализуемой двигателем для заданных температур T^i и T^f при длительности процесса в интервале $\tau^f - \tau^i$. Так как знания о поведении характеристической функции I является достаточным условием для описания экстремальных свойств исследуемой проблемы, то остальные функции во внимание не принимаются. В результате проблема трансформируется в эквивалентную проблему поиска максимума конечного состояния координаты работы $x_0^f = W^f$ для объекта, описываемого следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\tau} &= -c \left(1 - \frac{T^e}{u+T} \right) u \equiv f_0(T, u) \\ \frac{dT}{d\tau} &= u \equiv f_1(T, u) \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= 1 \equiv f_2(T, u) \end{aligned} \quad (36)$$

Состояние системы (36) описывается расширенным вектором состояния $\mathbf{X} = (x_0, x_1, x_2)$, в котором состоят в композиции три координаты состояния $x_0 = W$, $x_1 = T$, и $x_2 = \tau$. Введем функции оптимального качества Θ^i and Θ^f , которые соответствуют начальной и конечной координатам производимой работы. Функции Θ^i соответствует размерность на единицу больше размерности функции I , включая координату работы $x_0 = W$, и определяется в виде:

$$\max_u W^f \equiv \Theta^i(W^i, \tau^i, T^i, \tau^f, T^f) = W^i + I(\tau^i, T^i, \tau^f, T^f). \quad (37)$$

Определим функцию V как соответственно в расширенном пространстве переменных в виде

$$V = W^f - \Theta^i(W^i, \tau^i, T^i, \tau^f, T^f) = W^f - W^i - I(\tau^i, T^i, \tau^f, T^f). \quad (38)$$

Два взаимно максимальных значения постоянных W^i и W^f описываются экстремумом функций следующего вида:

$$V^i(W^i, \tau^i, T^i, \tau^f, T^f) = V^f(\tau^i, T^i, W^f, \tau^f, T^f) \equiv 0 \quad (39)$$

и выполняется вдоль всех оптимальных путей траекторий. Заданные функции можно описать в терминах волновой функции V следующим образом:

$$\max V = \max \left\{ W^f - W^i - I(\tau^f, T^f, \tau^i, T^i) \right\} = 0. \quad (2)$$

В (40) уравнение для функции I интегральной работы в окрестности пространства координат (T, τ) , в которое не включена координаты W , следует непосредственно из условия $V = 0$. Напомним, что в (36) (для определения решения уравнения ГЯБ) входят три уравнения определения переменных состояния в виде $x_0 = W$, $x_1 = T$ и $x_2 = \tau$, для которых можно записать обобщенное уравнение в форме:

$$\frac{dx_\beta}{d\tau} = f_\beta(x, u), \quad \beta = 0, 1, 2. \quad (41)$$

Свойства функции вида $V = W^i - \Theta^i$ из второй линии (41). Частную производную V от независимой координаты τ можно не учитывать применить соотношения:

$$\frac{\partial V}{\partial W^i} = -\frac{\partial \Theta^i}{\partial W^i} = -1 \quad (42)$$

и с учетом $\dot{W} = f_0 = -L$, для экстремума функции производимой работы получим уравнение вида:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau^i} + \min_{u^i} \left\{ \frac{\partial V}{\partial T^i} u^i + L^i(T^i, u^i) \right\} = 0 \quad (\max W^f). \quad (43)$$

В терминах интегральной функции оптимальной работы, $I = W^f - W^i - V$, для (43) имеем:

$$\frac{\partial I}{\partial \tau^i} + \min_{u^i} \left\{ \frac{\partial I}{\partial T^i} u^i + f_0(T^i, u^i) \right\} = 0. \quad (44)$$

Поскольку оптимальное управление u определяется в терминах состояния, времени и градиента компонент экстремума функции качества I , то возможен переход от квазилинейного уравнения ГЯБ к соответствующему нелинейному уравнению Гамильтона-Якоби. Максимум в (44) относительно переменной u распадается на два уравнения, первое из которых описывает оптимальное управление u и выражается через переменные T и $z = \partial I / \partial T$ следующим образом:

$$\frac{\partial I}{\partial T} = -\frac{\partial f_0(T, u)}{\partial u}, \quad (45)$$

а второе уравнение следует из (44) без обозначения операции поиска экстремума:

$$\frac{\partial I}{\partial \tau} + \frac{\partial I}{\partial T} u + f_0(T, u) = 0 \quad (46)$$

(в обоих уравнениях индекс для упрощения записи опущен). Применяв Гамильтонову запись энергетического типа и (46) получим уравнение Гамильтона-Якоби для интеграла I в виде:

$$\frac{\partial I}{\partial \tau} + H\left(T, \frac{\partial I}{\partial \tau}\right) = 0. \quad (47)$$

Отличие (47) от уравнения ГЯБ состоит в том, что (47) оперирует только экстремальной траекторией и Гамильтониан H является экстремальным.

Для Лагранжиана $L = -f_0$, где f_0 определяет интенсивность производимой механической работы базовый интеграл $W_{[T^i, T^f]}$ записывается в форме (28) в виде:

$$W_{\max} = \max \left\{ -\int_{T^i}^{T^f} L(T, \dot{T}) d\tau \right\} = \max \left\{ -\int_{T^i}^{T^f} c \left(1 - \frac{T^e}{T + \dot{T}} \right) \dot{T} d\tau \right\} \quad (48)$$

у которого экстремальным значением является функция $I(T^i, \tau^i, T^f, \tau^f)$. Переменная подобная моменту (эквивалент температуре) имеет вид:

$$z \equiv -\frac{\partial f_0}{\partial u} = c \left(1 - \frac{T^e T}{(T + u)^2} \right) \quad (49)$$

$$u = \left(\frac{T^e T}{1 - \frac{z}{c}} \right)^{1/2} - T \quad (50)$$

Уравнение Гамильтона-Якоби в частных производных для определения максимальной работы (производимой двигателем) определяется начальными условиями и имеет вид:

$$\frac{\partial I}{\partial \tau} + H\left(T, \frac{\partial I}{\partial T}\right) = 0 \tag{51}$$

$$H\left(T, \frac{\partial I}{\partial T}\right) = c \left[\sqrt{T^e} - \sqrt{T \left(1 - \frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial T}\right)} \right]^2$$

Таким образом, строго обосновано, что вариационная задача интерфейса для извлечения максимальной работы W эквивалентна вариационной задаче с фиксированной конечной точкой определения минимума производства энтропии.

Для производства специфической энтропии имеем:

$$S_\sigma = \int_0^{\tau^f} L_\sigma d\tau = \int_0^{\tau^f} c \frac{u^2}{T(T+u)} d\tau. \tag{52}$$

Минимум функционала может быть описан оптимальной функцией $I_\sigma(T^i, \tau^i, T^f, \tau^f)$ и уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид:

$$\frac{\partial I_\sigma}{\partial \tau} + H_\sigma = 0 \tag{53}$$

$$H_\sigma = c \left[1 - \sqrt{1 - \frac{1}{c} T \frac{\partial I_\sigma}{\partial T}} \right]^2$$

Оба функционала (для определения производимой работы и производства специфической энтропии) имеют эквивалентные экстремумы.

Функция Ляпунова \mathfrak{L} для формы (41) имеет вид [39]:

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^3 x_\beta^2 + \frac{1}{2} S^2 \tag{54}$$

и

$$\frac{d\mathfrak{L}}{d\tau} = \sum_{\beta=1}^3 x_\beta f_\beta + (S_u - S_c) \left(\frac{dS_u}{d\tau} - \frac{dS_c}{d\tau} \right). \tag{55}$$

Соотношение (55) определяет необходимые и достаточные условия для устойчивости и робастности управления с минимумом производства энтропии в объекте управления и системе управления.

Следовательно, в разработанной модели КА в Главе 6 используемый принцип минимума информационной энтропии гарантирует необходимое условие самоорганизации – минимум требуемой исходной информации в сигналах обучения; термодинамический критерий минимума новой меры обобщенного производства энтропии обеспечивает достаточное условие самоорганизации – робастность процессов управления с минимальным расходом полезного ресурса.

3.2. Обобщенные меры энтропии, дивергенции / количества информации и извлечение работы

Значимым является также ранее упомянутый факт, что усредненная величина произведенной работы силами диссипации определяется в виде [39-41]:

$$\frac{\langle W_{diss} \rangle}{kT} = S_{KL}(P_F \| P_B),$$

т. е. работа сил диссипации определяется дивергенцией Кульбака-Лейблера для вероятностных распределений P_F, P_B . Отметим, что левая часть данного соотношения представляет физически тепловую энергию, а правая часть определяет чисто информацию о системе. Информационная энтропия является мерой количества информации о системе и расхождения Кульбака-Лейблера, а также определения количества информации Фишера. Аналогичная зависимость существует между работой, произведенной силами диссипации, и расхождением Реньи в квантовом случае. Рассмотрим некоторые обобщения мер информационных расхождений – обобщенные дивергенции.

Пример: Обобщенная мера квантовой дивергенции Реньи. В квантовом случае в соотношение для плотностей (ρ, σ) возможно ввести обобщенное определение относительной $\alpha - z$ энтропии Реньи ($\alpha - z$ relative Rényi entropies) в виде [42, 43]:

$$D_{\alpha,z}(\rho\|\sigma) = \frac{1}{\alpha-1} \log \text{Tr} \left(\left(\sigma^{\frac{1-\alpha}{2z}} \rho^{\frac{\alpha}{z}} \sigma^{\frac{1-\alpha}{2z}} \right)^z \right), \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Часто $\alpha - z$ относительную дивергенцию Реньи называют для сокращения $\alpha - z$ относительной энтропией. Частные случаи относительной $\alpha - z$ энтропии Реньи при изменении соотношения $\alpha - z$ имеют вид

$$D_{\alpha,1}(\rho\|\sigma) = D_{\alpha}(\rho\|\sigma) = \frac{1}{\alpha-1} \log \text{Tr}(\sigma^{1-\alpha} \rho^{\alpha}), z = 1,$$

$$D_{\alpha,\alpha}(\rho\|\sigma) = \tilde{D}_{\alpha}(\rho\|\sigma) = \frac{1}{\alpha-1} \log \text{Tr} \left(\left(\sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \rho \sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \right)^{\alpha} \right), z = \alpha.$$

Для случая $\sigma \gg \rho$ $D_{\alpha,1}(\rho\|\sigma)$ и $D_{\alpha,\alpha}(\rho\|\sigma)$ дифференцируемы при $\alpha = 1$, имеем [28, 43, 44]

$$\left. \frac{d}{d\alpha} D_{\alpha,1}(\rho\|\sigma) \right|_{\alpha=1} = \left. \frac{d}{d\alpha} D_{\alpha,\alpha}(\rho\|\sigma) \right|_{\alpha=1} = \frac{1}{2} V(\rho\|\sigma),$$

где $V(\rho\|\sigma) \triangleq \text{Tr}(\rho(\log \rho - \log \sigma)^2) - (\text{Tr}(\rho(\log \rho - \log \sigma)))^2$ определяется как вариация относительной энтропии.

Пример: о взаимосвязях обобщенных мер энтропии и количества информации. Обобщением меры энтропии Больцмана-Гиббса является мера $S_q = \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q-1}$, которая часто именуется как мера q -энтропии Тсаллиса². Обобщение приведенной меры q -энтропии было дано Шарма и Митталом

в 1975г. в виде двухпараметрической энтропии $S_{\alpha\beta} = \frac{1}{1-\beta} \left[\left(\sum_{i=0}^N p_i^{\alpha} \right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}} - 1 \right]$, где $\alpha > 0$ и $\alpha, \beta \neq 1$. При

$\alpha = \beta$ следует мера энтропии Тсаллиса и при $\beta \rightarrow 1$ мера Шарма-Миттал переходит в пределе в меру Реньи. Известно, в свою очередь, что мера Реньи редуцируется в меру информационной энтропии Шеннона при стремлении параметра к единице. Было отмечено еще в 1972 г., что данная мера обладает полуаддитивным свойством следующего вида:

$$S_{\alpha\beta}(p) = S_{\alpha\beta}(p^A) + S_{\alpha\beta}(p^B) + (1-\beta) S_{\alpha\beta}(p^A) S_{\alpha\beta}(p^B), \quad p = (p_{ij}), \quad p_{ij} = p_i^A p_j^B \quad \forall i, j.$$

² Более точные определения были даны С.В. Ульяновым еще в 1973 г. [45] и были обсуждены с М.С. Пинскером в 1972 г., отраженные также в совместной с М.С. Пинскером и Р.Л. Добрушиным (представлено А.Н. Колмогоровым) публикации [46] в 1976 г., которые, в свою очередь, познакомили с работами 1973 г. задолго до публикации Тсаллиса [47] в 1988 г.).

На современном языке теории групп, энтропия Шарма-Миттал, как и энтропия Тсаллисса, относятся формально к мультипликативной группе и, например, в случае групповой энтропии Тсаллисса, выполняется соотношение вида $\Phi(x, y) = x + y + (1 - q)xy := x \oplus_q y$ и носит наименование q – сумма. Рассмотрим некоторые обобщения введенных мер.

1. Комбинация из двух копий мер Шарма-Миттал. Определим трехпараметрическую групповую энтропию в виде $Z_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}(p) = S_{\alpha_1, \beta} \oplus_{\beta} S_{\alpha_2, \beta}$. Тогда имеем:

$$Z_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}(p) := \frac{1}{\beta - 1} \left[1 - \left(\sum_{i=1}^N p_i^{\alpha_1} \right)^{\frac{\beta-1}{\alpha_1-1}} \left(\sum_{i=1}^N p_i^{\alpha_2} \right)^{\frac{\beta-1}{\alpha_2-1}} \right]$$

и закон группы для групповой энтропии выполняется в виде:

$$Z_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}(p) = Z_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}(p^A) + Z_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}(p^B) + (1 - \beta) Z_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}(p^A) Z_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}(p^B).$$

2. Комбинация из мер Тсаллисса и Шарма-Миттал. В этом случае имеем закон группы:

$$Z_{\alpha, q}(p) := S_{\alpha, q} \oplus_q S_q \text{ и меру } Z_{\alpha, q}(p) = \frac{1}{1 - q} \left[1 - \left(\sum_{i=1}^N p_i^q \right) \left(\sum_{i=1}^N p_i^{\alpha} \right)^{\frac{q-1}{\alpha-1}} \right].$$

Введенная мера групповой энтропии удовлетворяет закону полуаддитивности вида:

$$Z_{\alpha, q}(p) := Z_{\alpha, q}(p^A) + Z_{\alpha, q}(p^B) + (1 - q) Z_{\alpha, q}(p^A) Z_{\alpha, q}(p^B).$$

Примечание. Групповой закон может быть расширен до вида:

$$\omega(x, y) = \zeta(\zeta^{-1}(x)) + \zeta^{-1}(y) + (1 - \beta) \zeta^{-1}(x) \zeta^{-1}(y).$$

Пример: Обобщенные меры информации и информационно-термодинамические ограничения на извлекаемую работу. Из изложенных результатов следует, что термодинамика может рассматриваться как теория, в которой модели рассматриваются с привлечением преобразований состояний системы в присутствии обмена с тепловой баней (резервуаром). Извлечение или расход работы можно включить в данную парадигму, поскольку это эквиваленты преобразованию состояний (состояние системы, совершающей работу, может быть повышено или понижено с одного энергетического уровня собственного состояния на другой) [51-67]. В терминах информационно-теоретических величин, можно записать такие преобразования как $F_{\min}(\rho) - F_{\min}(\theta) = kTD_{\min}(\rho \parallel \theta)$, где $D_{\min}(\rho \parallel \theta) = -\ln \text{Tr} \Pi_{\omega} \theta$ является мин-относительной энтропией с оператором преобразований Π_{ω} – проектором на множество ω и θ состояние Гиббса вида $\theta = Z^{-1} \sum_{E, g} e^{-\beta E} |E, g\rangle \langle E, g|$ с функцией распределения Z . Мин-относительная энтропия и однократная свободная энергия вводятся в термодинамике (как и в информационной геометрии или информационной физике) независимо в виде нижних границ для количества возможной извлекаемой работы из классических состояний, применяя модель последовательных независимых взаимодействий с тепловой баней (резервуаром). В термодинамическом пределе $D_{\min}(\rho \parallel \theta)$ является относительной энтропией $S(\rho \parallel \theta) = -\text{Tr} \rho \log \theta + \text{Tr} \rho \log \rho$, которая эквивалентна выражению вида $F(\rho) - F(\theta)$.

Таким образом, так как максимальное возможное количество извлекаемой работы W , которое можно извлечь при взаимодействии макроскопической системы с тепловой баней определяется как $W = F(\rho) - F(\theta)$, то в более обобщенном виде можно представить результат как выражение $W = F_{\epsilon}^{\min}(\rho) - F_{\epsilon}^{\min}(\theta)$, в котором β -сглаженная версия F_{\min} обозначенная как F_{ϵ}^{\min} , определяется оптимальное и достижимое количество работы из источника и только в термодинамическом пределе восстанавливается традиционный результат. Конечная размерность системы означает, что только меньшее количество работы возможно извлечь.

Примечание. Извлечение термодинамической работы. В макроскопической области и при слабой корреляции между системами имеем следующее соотношение: $F_\alpha(\rho, \rho_\beta) \approx F_1(\rho, \rho_\beta)$ для всех α , что обосновывает факт почему при простом ограничении, заданном во втором законе термодинамики, приближенные описания приводят к более или менее точному пределу. Было показано, что величину $F_{\min}(\rho)$ можно определить в виде:

$$F_{\min}(\rho) = -kT \ln \sum h(\omega, g, E_i) e^{-\beta E_i},$$

где $\omega = \sum_E P_E \rho_E P_E$ и $P_E = |E\rangle\langle E|$ определяет состояние ρ , декогерентное в энергетическом собственном базисе (в котором внедиагональные элементы образуют нулевое множество), $h(\omega, g, E_i)$ равно 1, если энергетический уровень $|g, E_i\rangle$ заселен и 0 в противном случае, β есть обратная температура, и k – Больцмана, определяет максимальное количество извлекаемой работы из системы при контакте с резервуаром при всех термодинамических операциях (при преобразовании системы в состояние термравновесия с тепловой баней). Это также соответствующее количество в модели альтернативных адиабатических и изотермических операций.

В общем случае, $F_\epsilon^{\min}(\rho) \leq F \leq F_\epsilon^{\max}(\theta)$, поэтому в нано- шкале извлечь количества работы в общем случае можно меньше из источника, чем требуется количества работы на его создание, что отвечает всем требованиям фундаментальных законов о необратимости термодинамических процессов. В терминах информационно-теоретических величин, $F_{\max}(\rho) - F_{\max}(\theta) = TD_{\max}(\rho \parallel \theta)$, где $D_{\max}(\rho \parallel \theta) = \log \min \{ \lambda : \rho \leq \lambda \theta \}$ определяет мах-относительную энтропию. В приближении термодинамического предела имеем $F_\epsilon^{\min}(\rho) \approx F_\epsilon^{\max}(\theta)$, т.е. обратимость восстановлена. Это второе подтверждение почему существует ограничение на количество извлекаемой работы. Например, рассмотрим чистое квантовое состояние $|\psi\rangle = \sum_E \sqrt{\frac{e^{-\beta E}}{Z}} |E\rangle$, энтропия которого равна нулю. Но в случае «дефазировки» собственного базиса энергетического состояния производится изменение ω и система переходит в состояние Гиббса если энергетические уровни невырожденные и имеем свободную энергию ($-kT \ln Z$); невозможно извлечь работу из данного состояния, несмотря на это состояние имеет нулевую энтропию. Однако, в термодинамическом пределе когерентность уменьшается, и свободная энергия в квантовом случае приближается к классическому состоянию, и, как следствие, F_{\min} стремится к свободной энергии Гельмгольца [68-71].

Данный вывод не отрицает, а только подтверждает возможность затраты работы на извлечение квантовой информации, скрытой в классическом состоянии, на наноуровне и совершить на макроуровне на ее основе работу, которая по количеству будет намного больше, чем количество затраченной работы на ее извлечение.

Таким образом, информация позволяет совершать полезную работу и становится в определенном смысле понятием первичным по отношению к определению понятия материя и работа. При выводе моделей второго закона термодинамики на основе информационных предпосылок не требуется предположений, вводимых традиционно в термодинамике при выводе второго закона

Приведенные результаты позволяют рассмотреть роль информации в формировании и извлечении термодинамических сил для совершения самоорганизующимися интеллектуальными когнитивными регулятором дополнительной полезной работы для гарантированного достижения цели управления в условиях непредвиденных ситуаций управления.

4. Информационно-термодинамические основы закона квантового алгоритма управления самоорганизацией

Классические состояния динамических процессов содержат скрытую квантовую информацию, которая рассматривается как дополнительный информационный ресурс для компенсации затрат на извлечение и расхода полезной работы. Возможно совершить дополнительное полезное управляющее воздействие на основе извлеченной работы и количество извлеченной скрытой в классических состо-

ниях квантовой информации является ресурсом данной полезной работы. Информация является физическим процессом и используется для реализации самоорганизации знаний в интеллектуальных системах управления на основе квантово-классических корреляций между классическими состояниями. В основе подхода самоорганизации неточных баз знаний положены четыре положения квантовой теории информации и квантовой термодинамики, которые сформулированы следующим образом работы [39, 72-75]: 1) принцип минимума производства энтропии объединенной системы «объект управления + интеллектуальный регулятор», гарантирующий достижение цели управления с минимумом затраты полезной работы объектом управления и интеллектуальным регулятором; 2) принцип минимума информационной энтропии для проектирования интеллектуального когнитивного регулятора, для которого требуется минимум исходной информации для совершения целенаправленного действия; 3) количество затраченной работы на извлечение скрытой в классическом состоянии квантовой информации меньше количества совершенной (на основе извлеченной скрытой квантовой информации) полезной работы; и 4) решение проблемы поиска максимальной извлекаемой полезной работы эквивалентно решению проблемы поиска минимума производства энтропии затраченной на ее извлечение.

Решение задачи заключается в проектировании робастных БЗ интеллектуальных когнитивных регуляторов, производящих управляющие силы, удовлетворяющих перечисленным требованиям.

Пример: Извлечение термодинамической работы с получением новой информации. При изотермическом расширении движущейся частицей выполняется работа. Количество работы, совершенное

во время изотермического расширения равно $W_{\text{exp}} = \int_{V/2}^V \frac{k_B T}{V} dV = k_B T \log 2$ и данное количество со-

вершенной механической работы эквивалентно преобразованию тепловой энергии в передачу полностью в работу. Закон сохранения энергии указывает на факт, что имеем $W = -Q$, так как начальное и конечное состояния идентичны с той же энергией. Подобно демону Максвелла, двигатель Сциларда извлекает работу из простого теплового резервуара с заданной температурой, нарушая второй закон термодинамики. Если тепловая емкость события конечная величина, то извлекаемая за цикл работа по величине меньше, чем $k_B T \log 2$, поскольку имеем меньшее количество энергии чем в начальном состоянии цикла. Тем не менее, при непрерывных повторениях процесса тепловой резервуар может полностью отдать энергию, которая превратится в полезную работу. Сцилард сформулировал необходимое условие для выполнения измерения для работы двигателя: явление нарушения второго закона термодинамики было связано с возможностью состояния демона приобретать знания; при этом утверждалось, что решение парадокса связано с некоторой скрытой энтропийной стоимостью, ассоциированной с измерением.

Существует по крайней мере три основных подхода объяснения нарушения второго закона, возникающие при рассмотрении работы демона Максвелла или двигателя Сциларда.

1. В первом подходе рассматривается роль флуктуаций, которые обычно игнорируются в идеализированных мысленных экспериментах, но присутствующих в реальных ситуациях наблюдений или измерений.

2. Во втором подходе следуют Сциларду и рассматривают энтропийную стоимость, ассоциированную с измерением.

3. В третьем подходе рассматривается факт необходимости демону хранить информацию о состоянии системы, а при удалении информации конечное состояние общей системы не эквивалентно начальному состоянию. Возникает необходимость оценивать стоимость стирания информации в памяти.

Второй закон термодинамики оперирует ограничениями на преобразования состояний системы. Надлежащее определение второго закона термодинамики состоит в утверждении, что энтропия не может спонтанно убывать при усреднении по подходящей шкале времени. Само содержание понятие «по подходящей шкале времени» зависит от времени релаксации системы и трудно определить в общем случае. Количественное описание связи между флуктуациями и вторым законом термодинамики было дано в 1993 г. Эвансом и соавторами при формулировке флуктуационной теоремы. Сама теорема связана с доказательством последовательности дополнительных теорем, одна из которых устанавливает соответствие между вероятностью наблюдения осредненного по времени производства энтропии магнитуды ΔS и вероятностью принятия противоположного значения $-\Delta S$ в виде соотно-

шения $\frac{P(\Delta S)}{P(-\Delta S)} = \exp\left\{\frac{\Delta S}{k_B}\right\} \geq 1$. Так как правая часть положительная и больше единицы, то вероятность, что при наблюдениях флуктуаций временно «нарушается» второй закон термодинамики меньше единицы и повсеместно подчиняется этому утверждению. Более того, относительная вероятность производить и потреблять энтропию возрастает экспоненциально с количеством изменения энтропии. Поскольку энтропия является величиной экстенсивной, то флуктуационная теорема также указывает на факт, что наблюдение флуктуаций отрицательной энтропии стремится к нулю для макроскопических систем. Если Q определяет среднее значение тепла, поглощенного системой при преобразовании, то полное производство энтропии (т.е. «система + события») определяется в следующем виде: $\Delta S_{tot} = \underbrace{(S_f - S_i)}_{\Delta S} - \beta Q$.

Согласно второму закону термодинамики, изменение полной энтропии ограничено снизу нулем в виде: $\Delta S_{tot} \geq 0 \rightarrow \Delta S \geq \beta Q$. Физический процесс, в котором достигается равенство нижней границы, рассматривается как термодинамический обратимый процесс.

Отметим, что поток энтропии между системой и тепловой баней возможен для обратимого процесса, если количество поглощенного тепла системой эквивалентно изменению его энтропии. Этот факт является следствием абсорбции тепла системой и отражается в убывании событийной энтропии в соответствии с выражением типа [55-71]:

$$\Delta S_{env} = -\beta Q.$$

Пример: Квантовая термодинамическая сила и извлечение работы. Известно, что отрицательное значение количества работы ΔW может быть извлечено из изотермического цикла с помощью контроллера с обратной связью и при измерении изменение энтропии системы можно оценить в соответствии с выражением:

$$\Delta S_{meas} = H(X|M) - H(X) = -I(X:M)$$

и $H(X) = -\sum_x \rho(x) \ln \rho(x)$ – информационная энтропия Шеннона, $I(X:M)$ определяет взаимную информацию между состоянием системы и результатом измерения M . Поскольку количество взаимной информации $I(X:M)$ величина положительная, то контроллер принуждает систему снизить энтропию. Это означает, что в присутствии контроллера возможно извлечь работу из системы большего количества чем предполагалось.

При этом контроллер интегрируется во второй закон следующим образом:

$$\Delta W \geq \Delta F^\beta - \frac{1}{\beta} I(\rho_1 : X) \text{ и } I(\rho_1 : X) = \frac{1}{\beta} [S(\rho_1) - H((p_k)) + H(\rho_1 : X)],$$

где ρ_1 описывает состояние системы в некоторый момент времени t_1 , $S(\rho_1)$ – энтропия фон Неймана, $H(p_k) = -\sum_k p_k \ln p_k$ – информационная энтропия Шеннона и

$$H(\rho_1 : X) = -\sum_k Tr \left[\sqrt{D_k} \rho_1 \sqrt{D_k} \ln \sqrt{D_k} \rho_1 \sqrt{D_k} \right], (D_k) = M_k^\dagger M_k, p_k = Tr [D_k \rho]$$

положительная операторно-значимая мера. Дифференцирование по времени данных трех выражений приводит к следующему результату для определения извлекаемой работы с помощью контроллера:

$$\frac{dW_{irr}^{contr}}{dt} = \frac{1}{\beta} [Tr(\dot{\rho}_1 \ln \rho_1)] + \sum_k \dot{p}_k \ln p_k - \sum_k Tr \left[\sqrt{D_k} \dot{\rho}_1 \sqrt{D_k} \ln \sqrt{D_k} \rho_1 \sqrt{D_k} \right].$$

Таким образом, определены три квантовые термодинамические силы для производства работы процессом [28-31, 51, 63, 64, 71]. Поскольку работа определяется изменением внутреннего состояния системы, то можно записать выражение:

$$W = \Delta F(\alpha) + \alpha^{-1} D_{KL} [\rho_T \| \rho_{can,T}(\alpha)] - \alpha^{-1} D_{KL} [\rho_0 \| \rho_{can,0}(\alpha)],$$

при выводе которого использован закон сохранения энтропии Гиббса-Шеннона в термодинамической изолированной Гамильтоновой системе, т.е. $S(\rho_T) = S(\rho_0)$ и $\Delta F(\alpha) \equiv F_T(\alpha) - F_0(\alpha)$ описывает изменение свободной энергии Гельмгольца системы. Поскольку в данном случае взаимодействие с тепловой баней отсутствует, то вводится параметр α , обратный температуре. При условии, что известно начальное состояние системы, возможно установить следующее неравенство для работы в виде:

$$W \geq \Delta F(\alpha) - \alpha^{-1} D_{KL}[\rho_0 \| \rho_{can,0}(\alpha)] \equiv W_{LB}(\alpha),$$

в котором нижняя достижимая граница для работы обозначена в виде $W_{LB}(\alpha)$.

Следовательно, существует значение для параметра α , для которого величина $W_{LB}(\alpha)$ имеет максимальное значение [60-70].

5. Информационные модели второго закона термодинамики и извлечение работы

Рассмотрим класс т.н. термодинамических операций и их взаимосвязи с формулировкой второго закона термодинамики на основе обобщенных моделей количества информации и дивергенции.

5.1. Определение термодинамических операций.

Рассмотрим квантовую систему, взаимодействующую с тепловой баней, следующего вида: $\rho = \sum \sigma(E, E', g, g') |E, g\rangle \langle E, g|$ с фиксированным Гамильтонианом H и собственными состояниями энергии E определенными как $|E, g\rangle$. Обсудим некоторые типы преобразования состояний, применение которых позволило бы, в частности, увеличить способность использовать систему в качестве резервуара для извлечения работы. В случае, когда начальное и конечное состояния системы не совпадают, то эволюцию системы следует рассматривать как не циклическую. Это приводит к идее рассматривать саму термодинамику как теорию ресурсов, в которой используется соответствующая модель математической машины с точки зрения теории информации.

Примечание. Ранее в 3.2 также отмечалось, что термодинамика может рассматриваться как теория, в которой модели рассматриваются с привлечением преобразований состояний системы в присутствии обмена с тепловой баней (резервуаром). Извлечение или расход работы можно включить в данную парадигму, поскольку это эквивалентно преобразованию состояний (состояние системы, совершающей работу, может быть повышено или понижено с одного энергетического уровня собственного состояния на другой).

Рассмотрим, в связи с отмеченным, некоторые модели квантовой теории информации на примере дивергенции Реньи и ее обобщений, на основе которых разрабатываются информационные модели второго закона термодинамики.

Пример: Модель обобщенной дивергенции Реньи. В 1961 г. Alfred Rényi ввел определение параметризованного семейства энтропий (которые носят по праву его имя) путем ослабления одной из аксиом построения информационной энтропии Шеннона. Это ослабление привело к определению « α -Rényi энтропия и « α - Rényi дивергенция» для соответствующего параметра параметра $\alpha \in (0,1) \cup (1,\infty)$ и распределения вероятностей p и q в виде:

$$H_\alpha(p) = \frac{1}{1-\alpha} \log \sum_x [p(x)]^\alpha, \quad D_\alpha(p\|q) = \frac{1}{1-\alpha} \log \sum_x [p(x)]^\alpha [q(x)]^{1-\alpha}.$$

Меры энтропии Шеннона и относительной энтропии следуют как предел при $\alpha \rightarrow 1$:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} H_\alpha(p) = H(p) \equiv -\sum_x p(x) \log p(x), \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} D_\alpha(p\|q) = D(p\|q) \equiv -\sum_x p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Благодаря своим свойствам мера энтропии Реньи стала популярным инструментарием во многих исследованиях: сходимость к мере Шеннона при $\alpha \rightarrow 1$, монотонность по параметру α , и аддитив-

ность как дополнение к другим свойствам. Сходимость предела при $\alpha \rightarrow 1$ к мере информационной энтропии Шеннона и относительной энтропии одно из основных важных асимптотических следствий таких как обоснование и доказательство теоремы о сжатии данных или пропускной способности канала связи и передачи информации. Монотонность меры $H_\alpha(p)$ по параметру α приводит к неожиданным результатам в зависимости от значения параметра α , т.е. для $\alpha > 1$ и наоборот для $\alpha < 1$, помогая охарактеризовать ранее упомянутое распределение информационного характера. Аддитивность указывает на то, что энтропии Реньи безмерны при оценке случайных процессов без памяти. С целью развития либо многомерного классического или квантового обобщения данных мер предлагается часто применять линейные комбинации указанных мер, но в данном случае нет гарантий, что начальные свойства исходных мер будут сохранены в принятой линейной комбинации мер Реньи, например, не гарантируется сохранение свойства монотонности по параметру α . Например, для условной взаимной информации оператора трех плотностей ρ_{ABC} , определенной как [74]:

$$I(A;B|C)_\rho = H(AC)_\rho + H(BC)_\rho - H(C)_\rho - H(ABC)_\rho,$$

где $H(F)_\rho \equiv -Tr\{\sigma_F \log \sigma_F\}$ – квантовая энтропия оператора плотности строгой σ системы F . Одно из основных свойств данной величины – не неотрицательность (известное под наименованием строгой субаддитивность квантовой энтропии) и, как следствие, монотонная невозрастание по отношению к квантовому каналу в системе A (симметрично для системы B). Однако, если определить обобщение Реньи $I(A;B|C)_\rho$ как

$$H_\alpha(AC)_\rho + H_\alpha(BC)_\rho - H_\alpha(C)_\rho - H_\alpha(ABC)_\rho,$$

где $H_\alpha(F)_\rho \equiv [\log Tr\{\sigma_F^\alpha\}]/(1-\alpha)$, то получим контрпример и данная мера Реньи может принимать отрицательное значение, свойство монотонности по отношению к квантовому каналу выполняется не всегда, а также и монотонности по α .

Примечание. Продолжим ранее рассмотренный пример условной взаимной информации в виде следующего обобщения Реньи-меры [17-23]:

$$I_\alpha(A;B|C)_\rho \equiv \frac{1}{\alpha-1} \log Tr\{\rho_{ABC}^\alpha \rho_{AC}^{(1-\alpha)/2} \rho_C^{(1-\alpha)/2} \rho_{BC}^{1-\alpha} \rho_C^{(1-\alpha)/2} \rho_{AC}^{(1-\alpha)/2}\}.$$

Для $\alpha \in [0,1) \cup (1,2]$, введенная величина не неотрицательна, монотонно невозрастающая по отношению к квантовому каналу действия на систему B , сходится к $I_\alpha(A;B|C)_\rho$ в пределе $\alpha \rightarrow 1$, и подчиняется свойству монотонности по параметру α . Однако, до сих пор доказательство монотонности по α для $I_\alpha(A;B|C)_\rho$ по-прежнему отсутствует. Полная ситуация с определением для $I_\alpha(A;B|C)_\rho$ свойства монотонного невозрастания по отношению к квантовым каналам действующих на систему A – частично это сделано для случая когда $I_\alpha(A;B|C)_\rho$ не симметричная величина по отношению к изменению позиций A и B систем.

5.2. Обобщенные меры энтропий и информации

Модификации предложенных ранее Реньи-мер как квантовых информационных мер были предложены в виде применения операций перемен местами операторов в заданной последовательности применения операторов [17-22]. Примером может послужить применения Шаттен 2-нормы в виде:

$$I'_\alpha(A;B)_\rho \equiv \frac{2}{\alpha-1} \max_{V_{\rho_A} \in \mathbb{V}_{\rho_A}} \log \left\| \rho_B^{(1-\alpha)/2} \rho_A^{(1-\alpha)/2} V_{\rho_A} \rho_{AB}^{\alpha/2} \right\|_2.$$

Идея заключается в модификации данного выражения, применив перестановку операторов в следующем виде:

$$I'_\alpha(A; B)_\rho \equiv \frac{2}{\alpha - 1} \max_{V_{\rho_{AC}} \in \mathbb{V}_{\rho_{AC}}, V_{\rho_C} \in \mathbb{V}_{\rho_C}} \log \left\| \rho_{BC}^{(1-\alpha)/2} V_{\rho_C} \rho_C^{(1-\alpha)/2} \rho_{AC}^{(1-\alpha)/2} V_{\rho_{AC}} \rho_{ABC}^{\alpha/2} \right\|_2,$$

где \mathbb{V}_ω означает компактное множество всех унитарных V_ω коммутирующих с Эрмитовым оператором ω . Тогда для фиксированных собственных базисов ρ_C и ρ_{AC} ранее введенное выражение редуцируется для Реньи-меры взаимной информации и принимает следующий вид:

$$I'_\alpha(A; B)_\rho \equiv \frac{2}{\alpha - 1} \max_{V_{\rho_A} \in \mathbb{V}_{\rho_A}} \log \left\| \rho_B^{(1-\alpha)/2} \rho_A^{(1-\alpha)/2} V_{\rho_A} \rho_{AB}^{\alpha/2} \right\|_2 = \frac{2}{\alpha - 1} \log \left\| \rho_B^{(1-\alpha)/2} \rho_A^{(1-\alpha)/2} \rho_{AB}^{\alpha/2} \right\|_2.$$

Такая мера Реньи с перестановкой операторов при $\alpha = 1$ в целом прерывистая и в пределе $\alpha \rightarrow 1$ не сходится к мере энтропии фон Неймана.

5.3. Семейство вторых информационных законов термодинамики

Рассмотрим возможные циклы термодинамических процессов и обсудим изменения в формулировке законов возврата системы в начальное состояние при применении дополнительных систем. Оказалось, что свободная энергия системы не единственная инстанция определения какие пути перехода возможны и можно сформулировать необходимые и достаточные условия термодинамических переходов, которые удовлетворяют не одному, а семейству вторых законов термодинамики. Определим свободные энергии $F_\alpha(\rho, \rho_\beta) = kTD_\alpha(\rho \parallel \rho_\beta) - k \log Z$, с мерой дивергенции Реньи $D_\alpha(\rho \parallel \rho_\beta)$ заданной как $D_\alpha(\rho \parallel \rho_\beta) = \frac{\text{sgn}(\alpha)}{\alpha - 1} \log \sum_i p_i^\alpha q_i^{1-\alpha}$, где p_i собственные значения для ρ и q_i собственные значения термосостояний системы $\rho_\beta = e^{-\beta H_S} / Z$ с Гамильтонианом H_S , и функцией распределения $Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$, и $\beta = 1/T$.

Можно сформулировать вторые законы термодинамики для диагонального блока состояний в энергетическом базисе. Для этих условий сформулирован следующий семейство вторых законов: в присутствии тепловой бани и заданной температуры свободные энергии $F_\alpha(\rho, \rho_\beta)$ не возрастают для $\alpha \geq 0$. Так что,

$$\forall \alpha \geq 0, F_\alpha(\rho, \rho_\beta) \geq F_\alpha(\rho', \rho_\beta),$$

где ρ и ρ' начальное и конечное состояние системы, соответственно.

Более того, если $F_\alpha(\rho, \rho_\beta) \geq F_\alpha(\rho', \rho_\beta)$ выполняется $\forall \alpha \geq 0$, то существует каталитическая термооперация преобразования ρ в ρ' . При $\alpha \rightarrow 1$, $F_\alpha(\rho, \rho_\beta)$ эквивалентна стандартному определению свободной энергии Гельмгольца $F(\rho)$, и сформулированные условия содержат стандартную форму второго закона термодинамики (совместно с сохранением энергии) и является одним из многих ограничений на термодинамические преобразования состояний.

Для случая $\alpha = 0$, $F_0(\rho, \rho_\beta) = F_{\min}(\rho)$ имеем новую форму второго закона термодинамики. Для состояний, не диагональных в энергетическом базисе, и некоммутативных по своей природе состояний системы и тепловых состояний резервуара обобщения второго закона термодинамики основаны на применении квантовой Реньи-дивергенции. Введем две версии свободной энергии $F_\alpha(\rho, \rho_\beta)$ в следующем виде:

$$\tilde{F}_\alpha(\rho, \rho_\beta) = kT \frac{\text{sgn}(\alpha)}{\alpha - 1} \log \text{Tr} \rho^\alpha \rho_\beta^{1-\alpha} - kT \log Z$$

и

$$\hat{F}_\alpha(\rho, \rho_\beta) = kT \frac{1}{\alpha - 1} \log \left(\text{Tr} \left(\rho_\beta^{(1-\alpha)/2\alpha} \rho \rho_\beta^{(1-\alpha)/2\alpha} \right)^\alpha \right) - kT \log Z.$$

В результате имеем [52] «Семейство квантовых моделей второго закона термодинамики», которое описывается следующим образом.

Переход от ρ к ρ' возможен только если выполняются следующие информационные условия:

$$\hat{F}_\alpha(\rho, \rho_\beta) \geq \hat{F}_\alpha(\rho', \rho_\beta) \text{ при } \alpha \geq \frac{1}{2} \text{ и}$$

$$\hat{F}_\alpha(\rho_\beta, \rho) \geq \hat{F}_\alpha(\rho_\beta, \rho') \text{ при } \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 \text{ и}$$

$$\tilde{F}_\alpha(\rho, \rho_\beta) \geq \tilde{F}_\alpha(\rho', \rho_\beta) \text{ при } 0 \leq \alpha \leq 2,$$

где, как и ранее, данные законы включают в себя переходы при изменении Гамильтониана с помощью вспомогательной системы. Условия монотонности $F_\alpha(\rho, \rho_\beta)$ достаточно для определения и выбора возможного вида преобразований состояний в квантовой шкале или для систем с дальностью [54-66, 76].

Выводы

- Показано, что работа, затраченная на извлечение квантовой информации, скрытой в классическом состоянии, на нано-уровне, дает возможность (на основе извлеченного количества информации) совершить на макроуровне работу, которая по количеству будет намного больше, чем количество затраченной работы на ее извлечение.
- В результате, в когнитивном регуляторе возможно выработать дополнительное полезное управляющее воздействие на основе извлеченной работы, а количество извлеченной скрытой в классических состояниях квантовой информации является ресурсом для данной совершаемой полезной работы.
- Вывод вторых законов термодинамики на основе информационного подхода не требует предположений необходимых при рассмотрении стандартной модели второго закона термодинамики.
- Данные формы составляют полное семейство квантовых моделей второго закона термодинамики, для которых выполняются необходимые, но не достаточные условия для преобразований состояний.

Список литературы

1. Френкель Я. И. Курс теоретической механики на основе векторного и тензорного анализа. — М. — Л.: ГТТИ. — 1940.
2. Ульянов С. В., Шоланов К. С. Релятивистская инерциальная навигация и интеллектуальное управление КЛА в римановых метрических пространствах при случайных возмущениях. Ч. 1: Параллельный перенос векторов и тензоров, девиация геодезических линий // Системный анализ в науке и образовании. — 2012. — № 1. — URL : <http://sanse.ru/download/115>.
3. Denman H. H., Buch L. H. Solution of the Hamilton-Jacobi equation for certain dissipative classical mechanical systems // J. Math. Phys. — 1973. — Vol. 14. — Pp. 326–329.
4. Ohsawa T., Bloch A. Nonholonomic Hamilton-Jacobi equation and integrability // J. Geometric Mechanics. — 2009. — Vol. 1, № 4. — Pp. 1–21.
5. Balseiro P., Marrero J. C., de Diego D. M., Padron E. A unified framework for mechanics: Hamilton-Jacobi equation and applications // arXiv: 1001.0482v1 [math-ph] 2010.
6. Benseny1 A., G. et al. Applied Bohmian mechanics // arXiv:1406.3151v1 [quant-ph] 12 Jun 2014.
7. Ulyanov S. V., Arai F., Feng M., Fukuda T. Stochastic analysis of time-invariant non-linear dynamic systems. Pts 1 and 2 // Prob. Eng. Mech. 1998. — Vol. 13, № 3. — Pp. 183–203; pp. 205–226.
8. Ульянов С. В. Модели квантовых волновых уравнений и приложения в компьютерных нанотехнологиях. Ч. 1: Квантовый постулат на основе характеристик обобщенного уравнения Гамильто-

- на-Якоби // Системный анализ в науке и образовании. — 2012. — № 1. — URL : <http://sanse.ru/download/114>.
9. Гольденблат И. И., Ульянов С. В. Избранные лекции по теории относительности и квантовой механике. — М. : МО СССР, 1964.
 10. Аржаных И.С. Поле импульсов. — Ташкент : Наука, 1965.
 11. Петров Б. Н., Гольденблат И. И., Ульянов С. В. Проблемы управления квантовыми и релятивистскими динамическими системами. — М. : Наука, 1982.
 12. Qiao B. et al. Kinetic equations for quantum information // *Physica A*. — 2005. — Vol. 355. — Pp. 319–332. — DOI : 10.1016/j.physa.2005.02.023.
 13. Иванов М. К. Как понимать квантовую механику. — М.–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2012.
 14. Frieden B. R. *Science from Fisher information: A unification* — Cambridge Univ. Press. — 2004.
 15. Jungel A. *The Fisher information in Lagrangian mechanics on probability spaces* // Institute for Analysis and Scientific Computing, Vienna University of Technology, Wiedner Hauptstraße 8–10, 1040 Wien, Austria. 2003
 16. von Renesse Max-K. An optimal transport view on Schrodinger equation // arXiv:0804.4621v3 [math-ph] 12 Mar 2009.
 17. Zozor, S. On Generalized Stam Inequalities and Fisher–Rényi Complexity Measures // *Entropy*. — 2017. — Vol. 19, № 9. — Pp. 493. — DOI : 10.3390/e19090493.
 18. Berta M. et al. Rényi generalizations of the conditional quantum mutual information // *J. of Mathematical Physics*. 2015. — Vol. 56, № 2. — Pp. 022205. — DOI : <https://doi.org/10.1063/1.4908102>.
 19. Muller-Lennert M. et al. On quantum Rényi entropies: a new generalization and some properties // arXiv:1306.3142v4 [quant-ph] 27 Jan 2014.
 20. Dupuis F., Wilde M.M. Swiveled Rényi entropies // arXiv:1506.00981v4 [quant-ph] 18 Feb 2016.
 21. Ciaglia M.M. et al. A Pedagogical Intrinsic Approach to Relative Entropies as Potential Functions of Quantum Metrics: the q - z Family // arXiv:1711.09769v1 [quant-ph] 27 Nov 2017.
 22. Rodriguez M.A. Romaniega Á., Tempesta P. A new class of entropic information measures, formal group theory and information geometry// arXiv:1807.01581v1 [math-ph] 4 Jul 2018.
 23. Cheng H-C. et al. Properties of Noncommutative Rényi and Augustin Information // arXiv:1811.04218v1 [quant-ph] 10 Nov 2018.
 24. Gallager R. *Information Theory and Reliable Communication*. — Wiley, 1968.
 25. Burnashev M. V., Holevo A. S. On the reliability function for a quantum communication channel // *Problems of information Transmission*. — 1998. — Vol. 34, № 2. — Pp. 97–107.
 26. Jarzyna M., Kołodyński J. Geometric Approach to Quantum Statistical Inference // *IEEE J. on Selected Areas in Information THEORY*, Vol. 1, № 2, AUGUST 2020. — Pp. 367–385.
 27. Kim E. Investigating Information Geometry in Classical and Quantum Systems through Information Length // *Entropy*. — 2018. — Vol. 20. — Pp. 574. — DOI : 10.3390/e20080574.
 28. Ito, S. Thermodynamics of information geometry as a generalization of the Glansdoff-Prigogine criterion for stability // arXiv:1908.09446v1 [cond-mat.stat-mech] 26 Aug 2019.
 29. Ahmadi B., Salimi S., Khorashad A. S., Kheirandish F. The quantum thermodynamic force responsible for quantum state transformation and the flow and backflow of information // *SCIENTIFIC REPORTS*, 2019, 9 (8746). — DOI : <https://doi.org/10.1038/s41598-019-45176-1>.
 30. Ahmadi B., Salimi S., Khorashad A. S. Irreversible work and Maxwell demon in terms of quantum thermodynamic force // *SCIENTIFIC REPORTS*. — 2021. — Vol.11 (2301). — DOI : <https://doi.org/10.1038/s41598-021-81737-z>.

31. Zhang K., Wang X., Zeng Q. et al. Conditional Entropy Production and Quantum Fluctuation Theorem of Dissipative Information // arXiv:2105.06419v1 [quant-ph] 13 May 2021.
32. Nakamura T., Hasegawa H. H., Driebe D. J., Reconsideration of the generalized second law based on information geometry // J. Physics Communications. — 2019. — Vol. 3, № 1. — Pp. 015015. — DOI : <https://doi.org/10.1088/2399-6528/aafe1b>.
33. Bera M. L. et al. Quantum Heat Engines with Carnot Efficiency at Maximum Power // arXiv:2106.01193v1 [quant-ph] 2 Jun 2021.
34. Zhen Y. et al. Universal bound on energy cost of bit reset in finite time // arXiv:2106.00580v1 [quant-ph] 1 Jun 2021.
35. Sagawa T., Ueda M. Minimal Energy Cost for Thermodynamic Information Processing: Measurement and Information Erasure // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Vol. 102, № 25. — Pp. 250602. [Erratum: Phys. Rev. Lett. 106, 189901, 2011.].
36. Horowitz J. M., Sandberg H. Second-law-like inequalities with information and their interpretations // New Journal of Physics. — 2014. — Vol. 16. — Pp. 125007.
37. Sandberg H., et al. Maximum work extraction and implementation costs for nonequilibrium Maxwell's demon // Physical Review E. — 2014, № 4. — Pp. 042119.
38. Sieniutycz S., et al. Framework for optimal control in multistage energy systems // Physics Reports. — 2000. — Vol. 326, № 2.
39. Ulyanov S.V. Quantum Algorithm of Imperfect KB Self-organization Pt I: Smart Control - Information-Thermodynamic Bounds // Artificial Intelligence Advances. — 2021. — Vol. 3, № 2.
40. Sagawa T. Thermodynamic and logical reversibilities revisited // arXiv: 131П2.1886v1 [cond- mat.stat-mech] 8 Nov 2013.
41. Yamano T. Phase space gradient of dissipated work and information: A role of relative Fisher information // arXiv: 131П2.2176v1 [cond-mat.stat-mech] 9 Nov 2013.
42. Audenaert K.M.R., Datta N. $\alpha - z$ -Renyi relative entropies // Preprint. — 2018.
43. Carlen E.A. Frank R. L., Lieb E. H. Inequalities for quantum divergences and the Audenaert-Datta conjecture // <http://arxiv.org/abs/1806.03985v1>.
44. Ghosh A., Basu A. A Generalized Relative (α, β) - Entropy: Geometric Properties and Applications to Robust Statistical Inference // Entropy. — 2018. — Vol. 20, № 2. — Pp. 347. — DOI : 10.3390/e20050347.
45. Ульянов С.В. Обобщенные меры количества информации и энтропии // Итоги Науки и Техники. Сер. Техн. Кибернетика. — Т. 5. — ВИНТИ АН СССР. — 1973.
46. Petrov B.N., Dobrushin R.L., Pinsker M.S., Ulyanov S.V. On some interrelations between the theories of information and control // Problems of Control and Information Theory. — 1976. — Vol. 5, № 1. — Pp. 31–38.
47. Tsallis C. Possible generalization of the Boltzmann–Gibbs statistics // Journal of Statistical Physics. — 1988. — Vol. 52. — Nos. ½. — Pp. 479–487.
48. Jensen H.J., Tempesta P. Group Entropies: From Phase Space Geometry to Entropy Functionals via Group Theory // Entropy. — 2018. — Vol. 20. — Pp. 804. DOI:10.3390/e20100804.
49. Tempesta P. Formal Groups and Z-Entropies // arXiv:1507.07436v4 [math-ph] 4 Feb 2017.
50. Rodriguez M.A. et al. A new class of entropic information measures, formal group theory and information geometry // arXiv: 1807.01581 [math-ph]. 2018.
51. Ulyanov S. V. Quantum fast algorithm computational intelligence PT I: SW / HW smart toolkit // Artificial Intelligence Advances. — 2019. — Vol. 1, № 1. — Pp. 18–43.
52. Brandão F., et al. The second laws of quantum thermodynamics // PNAS. — 2015. — Vol. 112, № 11. — Pp. 3275–3279. — DOI : [doi/10.1073/pnas.1411728112](https://doi.org/10.1073/pnas.1411728112).

53. Gómez A. Complexity and time // *Phys. Rev. D.* — 2020. — Vol. 101, № 6. — Pp. 065016. — DOI : 10.1103/PhysRevD.101.065016.
54. Sagawa T., Masahito U. Generalized Jarzynski Equality under Nonequilibrium Feedback Control // *Phys. Rev. Lett.*, 2010, 104: 090602. — DOI : 10.1103/PhysRevLett.104.090602.
55. Goold J. The role of quantum information in thermodynamics—a topical review // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2019. — Vol. 49., № 14. — Pp. 143001 (50pp). — DOI : 10.1088/1751-8113/49/14/143001.
56. Vanchurin V. The World as a Neural Network // *Entropy.* — 2020. — Vol. 22 (1210). —DOI : 10.3390/e22111210.
57. Sagawa T. Thermodynamic and logical reversibilities revisited // arXiv: 1311.2188v1 [cond- mat.stat-mech] 8 Nov 2013.
58. Yamano T. Phase space gradient of dissipated work and information: A role of relative Fisher information // arXiv: 1311.2176v1 [cond-mat.stat-mech] 9 Nov 2013.
59. Ilgin I., Yang I-Sh. Energy carries information // arXiv:1402.0878v1 [hep-th] 4 Feb 2014.
60. Horowitz J. M., Esposito M. Thermodynamics with continuous information flow // arXiv:1402.3276v2 [cond-mat.stat-mech] 14 Feb 2014.
61. Renes J. M. Work Cost of thermal operations in quantum and nano thermodynamics // arXiv:1402.3496v1 [math-ph] 14 Feb 2014.
62. Horowitz J. M., Sagawa T. Equivalent definitions of the quantum nonadiabatic entropy production // arXiv:1403.7778v1 [quant-ph] 30 Mar 2014.
63. Lang A.H., Fisher Ch.K., Mehta P. Thermodynamics of statistical inference by cells // arXiv:1405.4001v1 [physics.bio-ph] 15 May 2014.
64. Apollaro T. J. G., Francica G., Paternostro M., Campisi M. Work statistics, irreversible heat and correlations build-up in joining two spin chains // arXiv: 1406.0648v1 [cond-mat.stat-mech] 3 Jun 2014.
65. Gomez C. Complexity and time // *Phys. Rev.* — 2020 D., № 101. — Pp. 065016.
66. Funo K., Watanabe Yu., Ueda M. Thermodynamic work gain from entanglement // *Phys. Rev.* — 2013. — Vol. A88, № 5. — Pp. 052319.
67. Toyabe S., Sagawa T., Ueda M., Muneyuki E., Sano M. Experimental demonstration of information-to-energy conversion and validation of the generalized Jarzynski equality // *Nature Physics.* — 2010. — Vol. 6. — Pp. 988—992.
68. Geiger D., Kedem Z.V. Quantum-Entropy Physics // arXiv:2103.07996v1 [quant-ph] 14 Mar 2021.
69. Geiger D., Kedem Z.V. Quantum Entropy // arXiv:2106.15375v1 [quant-ph] 29 Jun 2021.
70. Geiger D., Kedem Z.V. Quantum Entropy Evolution // arXiv:2106.15378v1 [quant-ph] 29 Jun 2021.
71. Belenchia A. et al. Informational steady-states and conditional entropy production in continuously monitored systems: the case of Gaussian systems // arXiv:2105.12518v1 [quant-ph] 26 May 2021.
72. Ulyanov S.V. Intelligent self-organized robust control design based on quantum/soft computing technologies and Kansei Engineering // *Computer Science J. of Moldova.* – 2013. – Vol. 21, № 2(62) 242. — Pp. 279—291.
73. Ulyanov S.V. Self-organizing quantum robust control methods and systems for situations with uncertainty and risk. — Patent US 8788450 B2, 2014.
74. Ulyanov S. V. Self-organized robust intelligent control. Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2015. — 412 p.
75. Ulyanov S.V. Quantum relativistic informatics. LAP LAMBERT Academic Publishing, OmniScriptum GmbH & Co. KG, 2015.
76. Doronina I. et al. Multiple quantum NMR in solids as a method of determination of Wigner–Yanase skew information // arXiv:2106.01017v1 [quant-ph] 2 Jun 2021.