

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННОЙ ОЦЕНКИ ПРИРАЩЕНИЯ РИСКА И УПРАВЛЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТЬЮ СОЦИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ульянов Сергей Викторович<sup>1</sup>, Тятюшкина Ольга Юрьевна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Доктор физико-математических наук, профессор;  
PronetLabs;  
117403 Москва ул. Булатниковская, 20, стр. 3  
e-mail: ulyanovsv@mail.ru.

<sup>2</sup> Старший преподаватель;  
ГОУ ВПО Международный университет природы, общества и человека «Дубна»,  
Институт системного анализа и управления;  
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19,  
e-mail: tyatyushkina@mail.ru.

*Описаны источники возникновения неопределенностей при управлении социотехническими системами. Рассмотрена математическая модель оценки приращения информационного риска для указанных условий функционирования социотехнических систем, приведены информационные оценки для риска в задачах обработки больших массивов информации и учета в производственных правилах интеллектуального управления.*

**Ключевые слова:** социотехническая система, оценка информационного риска, байесовский риск, робастное интеллектуальное управление.

## MATHEMATICAL MODEL OF THE INFORMATION ESTIMATION OF THE INCREMENT OF RISK AND CONTROL OF SAFETY OF SOCIOTECHNICAL SYSTEMS

Ulyanov Sergey<sup>1</sup>, Tyatyushkina Olga<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Doctor of Science in Physics and Mathematics, professor;  
PronetLabs;  
117403, Moscow, Bulatnikovskaya str., 20-3;  
e-mail: ulyanovsv@mail.ru.

<sup>2</sup> Senior teacher;  
Dubna International University of Nature, Society and Man,  
Institute of system analysis and management;  
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;  
e-mail: tyatyushkina@mail.ru.

*Uncertainty sources at control of sociotechnical systems are described. The mathematical model of an estimation of information risk increment for the specified operating conditions sociotechnical systems is considered. Information estimations for risk in tasks of handling of the large massivs of information and the embedding in control rules of intelligent control are considered.*

**Keywords:** sociotechnical system, an estimation of information risk, bayesian risk, robust intelligent control.

### Введение

Последствия деятельности человека-оператора (влияние человеческого фактора) на современном этапе приходится учитывать не только в традиционных «человеко-машинных» системах, но и в сложных системных социотехнических комплексах, где воедино увязаны технологический процесс с

человеко-машинными отношениями, природная экосистема и социокультурная среда, в рамках которой осуществляется реализация новой технологии.

Социотехнические системы (СТС) – это сложные производственные, технические и транспортные системы, которые включают технические и программные средства, физическое окружение, социальную среду, наборы внутренних и внешних по отношению к системе регламентов, а также согласованные потоки: информационные, знаний и данных.

В качестве характерных особенностей СТС отметим следующие особенности:

- представляет собой сложную систему, состоящую из взаимосвязанных технических, экономических и социальных объектов;
- обладает самоорганизацией и имеет многоуровневую иерархическую структуру;
- представляет собой часть системы хозяйства общества, состоит из огромного количества разнообразных объектов, число связей в них очень велико;
- на определенных этапах жизненного цикла является управляемой;
- устойчивое развитие СТС основано на использовании экономических, социальных, технических закономерностей в их неразрывном единстве (синергетизм);
- обладает свойствами целенаправленности;
- представляет собой динамическую, развивающуюся структуру, реализующую как долгосрочные стратегические цели, так и кратковременные, имеющие сравнительно частный характер.

Примером таких систем являются транспортные системы (РЖД), функционирующие в условиях усложнения эксплуатации парка вагонов и локомотивов (увеличение скорости движения поездов, расстояния их безостановочного следования, осевых нагрузок и т. п.), повышением требований к эксплуатационной надежности подвижного состава, стремлением обеспечить высокий уровень безопасности движения поездов.

Проблема социально-технического взаимодействия в современном обществе состоит в том, что высокий уровень развития техники, как продукта человеческой деятельности, не подкреплен столь же высокой степенью развития общества, самого человека в их взаимодействии с техническими системами. Нерациональное поведение и деструктивная деятельность человека (как человеческий фактор), включенного в контур управления подобной глобальной системы, может вызвать непредсказуемые последствия в различных частях системы, а в известных условиях вызвать и катастрофическую перестройку всего целого. Своевременное управление и правильное разрешение проблемных ситуаций обеспечивает эффективность системы, а в некоторых ситуациях предотвращает аварийные или иные нежелательные последствия за счет выявления и устранения предостерегающих рискованных ситуаций [1].

Решение задач планирования и управления такими ситуациями, как правило, осуществляется в условиях недостатка достоверной информации, как об активном поведении окружающей среды, так и о располагаемых полезных ресурсах для достижения поставленной цели в условиях противодействия этой среды. Отсутствие необходимой информации о происходящих в системе изменениях не позволяет качественно решать задачи контроля, идентификации и диагностики текущего состояния системы и ее элементов.

В качестве источников возникновения неопределенностей выступают дефицит информационных, энергетических, материальных и других видов ресурсов, непредсказуемость поведения внешней среды, непредвиденные изменения в структуре и поведении самой системы. В этих условиях является весьма проблематичным сформировать своевременное (и в то же время эффективное) управляющее воздействие на объект управления (ОУ).

При обнаружении сигналов, описывающих поведение ОУ, важен не только факт их наличия, но и величина необходимых информативных параметров, несущих данные об опасности, которая содержится в таких сигналах. Управляющее воздействие, формируемое при наличии сигнала, определяется степенью близости оценки и истинного значения параметра. Ошибки при этом могут порождаться как некорректностью идентификации сигнала, так и неточностью его оценивания.

Решение задачи совместной идентификации и оценивания параметров сигнала при параметрической априорной неопределенности и ограничении сверху возможного числа наблюдений можно получить за счет применения адаптивного байесовского подхода к наблюдениям. При этом общее и

доступное число наблюдений в практических задачах идентификации опасности риска и оценки ее наиболее информативных параметров всегда ограничено.

В связи с отмеченным, рассмотрим математическую модель оценки приращения информационного риска для указанных условий функционирования ОУ как задачи о различении сложных гипотез.

### **Информационные оценки для приращения среднего риска при изменении законов распределения вероятностей**

Рассмотрим типовую ситуацию идентификации слабо формализованной модели структуры ОУ в виде случайных параметров  $x = (x_1, \dots, x_n)$  в присутствии (мешающего или маскирующего) параметра  $\theta$ . Допустим, что экспериментально (в статистическом смысле) для вектора измеряемых случайных величин  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и неизвестного параметра  $\theta$  определена функция плотности распределения вероятностей параметров модели в виде  $\tilde{p}(x, \theta)$  (аппроксимирующая в общем случае неизвестную истинную функцию  $p(x, \theta)$ ). Информационное расхождение (дивергенция) между функциями распределения вероятностей определяется мерой Кульбака-Лейблера в виде (см. Приложение):

$$I(p : \tilde{p}) = \iint p(x, \theta) \ln \frac{p(x, \theta)}{\tilde{p}(x, \theta)} dx d\theta.$$

По заданным функциям потерь  $W(\tilde{W})$  и распределения вероятностей  $p(x, \theta)[\tilde{p}(x, \theta)]$  вычисляется усредненный риск в виде:

$$r(W^2)(\tilde{r}(\tilde{W}^2)) = \iint W^2 p(x, \theta) dx d\theta \left( \iint \tilde{W}^2 \tilde{p}(x, \theta) dx d\theta \right).$$

Тогда информационная оценка приращения риска (снижения точности определения параметров модели ОУ из-за редукции аппроксимации истинной функции плотности распределения вероятностей, как меры корректности модели) определяется следующим выражением:

$$-\sqrt{r(W^2)} 2I(\tilde{p} : p) \leq (\delta = \tilde{r} - r) \leq \sqrt{\tilde{r}(W^2)} 2I(p : \tilde{p}).$$

Таким образом, (верхняя и нижняя) оценка корректности модели в виде приращения риска  $(\delta = \tilde{r} - r)$  из-за редукции данных измерения при мешающих параметрах в процессах измерения носит *нелинейный* характер зависимости от информационной дивергенции – расхождения (меры информированности исследователя) оценок качества модели ОУ.

## **2. Информационные оценки для риска в задачах обработки больших массивов информации**

В задачах обработки больших массивов информации возникает проблема оценки потерь вследствие редукции данных, обусловленной ограничениями на «объем памяти» информационных систем (ИС) и требованиями простоты реализации. В данной работе постановка и анализ задачи рассматривается в рамках теории оптимальных статистических решений и теории информации. При этом одновременно получают оценки потенциальной точности принятого решения.

В байесовских задачах, если решение должно приниматься на основании фиксированного числа  $N$  наблюдений  $(x_1, \dots, x_N)$ , при редукции к достаточной статистике  $L(x_1, \dots, x_N)$  риск не возрастает. При этом достаточность определяется по Фишеру. Для случая редукции, нарушающей достаточность, ряд информационных оценок для возрастания риска получен в работах А. Переза [2].

В задачах последовательного анализа редукция наблюдаемых данных без возрастания риска имеет место в том случае, если статистика  $L(x_1, \dots, x_N)$ , значениями которой определяется решение о прекращении наблюдений и выбор окончательного решения, обладает, кроме достаточности по Фишеру, свойствами транзитивности. В [3] получены некоторые информационные оценки для изменения риска в задачах последовательного анализа при изменении распределения вероятностей или ре-

дукции результатов наблюдений. При этом потери информации при переходе от достаточной и транзитивной многомерной<sup>1</sup> статистики  $L(x_1, \dots, x_N)$  к другой статистике  $T(x_1, \dots, x_N) = T_m$  меньшей размерности можно охарактеризовать величинами

$$J(L_m, \theta) - J(T_m, \theta) = \Delta J_m^{(1)}, \quad (1)$$

$$J(L_{m+1}, L_m) - J(L_{m+1}, T_m) = \Delta J_m^{(2)}, \quad (2)$$

где  $J(x, y)$  обозначает Шенноновское количество информации связи между случайными величинами  $x$  и  $y$ ;  $\theta$  – параметр, о котором должно приниматься решение.

Для возрастания риска вследствие нарушений свойства транзитивности статистики при редукции можно получить [3] следующую оценку:

$$\Delta \rho \leq W_0 [2\Delta J^{(2)} + 10\sqrt{\Delta J^{(2)}}] \bar{n}, \quad (3)$$

где  $\bar{n}$  – среднее число наблюдений, требуемых для принятия решения последовательным решающим правилом;  $\forall \Delta J^{(2)} \leq \Delta J_m^{(2)}$ ;  $W_0$  – константа, ограничивающая математическое ожидание штрафа за неверное окончательное решение.

При нарушении (вследствие редукции) свойств достаточности (по Фишеру) статистики, по которой определяется окончательное решение, но при сохранении правила остановки процесса наблюдения, возрастание байесовского риска ограничивается неравенствами

$$\rho' - \rho \leq \sqrt{2\rho' M_0 \Delta \bar{J}}; \quad (4)$$

$$\Delta \bar{J} \geq \frac{1}{W_0} \left[ \rho \ln \frac{\rho}{\rho'} + (W_0 - \rho) \ln \frac{W_0 - \rho}{W_0 - \rho'} \right], \quad (5)$$

где  $\rho'$  обозначает байесовский риск в редуцированной задаче, а  $\rho$  – в исходной;  $\Delta \bar{J}$  – разность шенноновского количества информации о  $\theta$ , содержащейся в исходной и редуцированной последовательной выборке.

Как частный случай информационных неравенств для изменения риска при изменении законов распределения вероятностей получаются оценки для вероятностей ошибок при различении статистических гипотез. С использованием этих оценок основная теорема Шеннона о пропускной способности канала формулируется и доказывается как теорема о возможностях различения экспоненциально возрастающего (с ростом числа наблюдений) множества статистических гипотез [2].

При решении проблемы оптимизации процессов обработки и переработки больших объемов информации в ИС на практике приходится иметь дело как с однородными, так и с неоднородными ее массивами, для которых существуют, строго говоря, различные меры информации. Следовательно, в информационных оценках для изменения риска и для вероятностей ошибок при различении многих статистических гипотез с учетом неоднородности массивов информации могут использоваться меры информации, отличные от шенноновской.

Обобщенные  $j$ -энтропии (в которых вместо  $(t \ln t)$  используются другие выпуклые функции  $f(t)$ ) введены А. Реньи, который раскрыл также их статистический смысл). При использовании такого более широкого класса информационных расхождений между вероятностными распределениями при фиксированном числе наблюдений информационные оценки для риска и вероятностей ошибок классификации испытуемых гипотез могут быть улучшены. Таким образом, учет «внутренней» структуры обрабатываемых массивов информации позволяет получить более точные оценки принятия решения, сократить необходимое число наблюдений при заданной точности вычислений, а полученные информационные оценки (как граничные условия потенциальной точности) позволяют перейти к осуществлению идеи сжатия процесса обработки информации.

В данном разделе приводятся результаты определения оценок нижних границ для вероятностей ошибок при различении многих гипотез для обобщенных мер информационных расхождений.

<sup>1</sup> Ее размерность может также возрастать с ростом числа наблюдений  $m$ .

Обозначим  $\alpha_{ij}$  вероятность принять гипотезу  $H_j$  при истинности  $H_i$  для данного решающего правила, которое может быть как правилом с фиксированным числом  $n$  наблюдений, так и последовательным. Пусть  $n$  обозначает момент остановки наблюдений.

Определение 1. Обобщенным информационным расхождением (порядка  $a$  и типа  $\{\beta_i\}$ ) между вероятностными распределениями  $p(x_1, \dots, x_n | H_i) = p_i(x_1, \dots, x_n)$  и  $p(x_1, \dots, x_n | H_k) = p_k(x_1, \dots, x_n)$  назовем величину условного математического ожидания

$$H_a^{(\beta_i)}(i : k) = M \left\{ \frac{(p_i(x_1, \dots, x_n))^{a+\beta_i-1}}{(p_k(x_1, \dots, x_n))^a} \middle| H_k \right\}. \quad (6)$$

С использованием расхождения (49) и неравенства Иенсена для функций нескольких переменных можно получить следующие оценки для вероятностей ошибок: если  $\beta_i > 2$ ,  $1 - \beta_i < a < 2 - \beta_i$ , то:

$$\begin{aligned} H_a^{(\beta_i)}(i : k) &\leq \left[ \alpha_{kk}^{1-a} \alpha_{ik}^{a+\beta_i-1} + (1 - \alpha_{kk})^{1-a} (1 - \alpha_{ik})^{a+\beta_i-1} \right] \\ H_a^{(\beta_i)}(i : k) &\leq \sum_{j=1}^N \alpha_{kj}^{1-a} \alpha_{ij}^{a+\beta_i-1}; \\ H_a^{(\beta_i)}(k : i) &\leq \left[ \alpha_{ik}^{1-a} \alpha_{kk}^{a+\beta_i-1} + (1 - \alpha_{ik})^{1-a} (1 - \alpha_{kk})^{a+\beta_i-1} \right] \\ H_a^{(\beta_i)}(k : i) &\leq \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}^{1-a} \alpha_{kj}^{a+\beta_i-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Неравенства (7) дополняют неравенства [2], полученные с использованием информационных расхождений Реньи и Кульбака. Неравенства (7) позволяют уточнить нижние границы для вероятностей ошибок при фиксированном числе наблюдений  $n$  (см. рис. 1).

Определение 2. Обобщенной аддитивной производящей функцией информационного расхождения порядка  $a$  и типа  $\{\beta_i\}$  называется функция вида

$$M_a^{\{\beta_i\}}(p_i \| p_k, m) = \left[ H_a^{\{\beta_i\}}(i : k) \right]^{m/(1-a)},$$

так как

$$\frac{\partial}{\partial m} M_a^{\{\beta_i\}}(p_i \| p_k, m) \Big|_{m=0} = I_a^{\{\beta_i\}}(p_i \| p_k) = \frac{1}{1-a} \ln \left[ H_a^{\{\beta_i\}}(i : k) \right]. \quad (8)$$

Неаддитивной мерой информационного расхождения порядка  $a$  и типа  $\{\beta_i\}$  называется мера [2]

$$I(p_i \| p_k; a, \{\beta_i\}) = (1 - H_a^{\{\beta_i\}}(i : k)) / (1 - e^{1-a}). \quad (9)$$

На рис. 1 показаны результаты вычислений по формулам (6), (7). Пунктиром и штрих-пунктиром показаны результаты для мер Кульбака и Реньи соответственно. При вычислениях были приняты следующие параметры:  $p_i(x) = k_i e^{k_i x}$ ,  $i = 1, 2$ ;  $k_1 = 1$ ;  $k_2 = 2$ ;  $a = -0,5$ ;  $\beta_1 = \beta_2 = 2,4$ ;  $\alpha_{12} = 0,15$ . Для меры Реньи  $a = 0,5$ .

Приведенные результаты показывают, что исходного количества информации и интуитивного представления в виде информированности исследователя может оказаться недостаточным для формирования корректной модели ОУ, а сформированная модель содержит структурные элементы неопределенности. Следовательно, интуитивный инженерный подход к разработке приближенных (расчетных) моделей ОУ, носящий зачастую вид линейной зависимости от количества извлекаемой информации о параметрах структуры ОУ, может привести к существенному расхождению в точности и с необходимым качеством формирования корректного описания ОУ.

Данный вывод усиливается при исследовании моделей квантовых и релятивистских ОУ. Такие модели для корректной интерпретации требуют привлечения нестандартных (квантовой и релятивистской) логик, обладают многими «парадоксами» логического вывода и суждений и связаны с решением т.н. проблемы Вундгейлера корректного описания моделей. На необходимость использования

таких видов нестандартных нечетких логик при исследовании вопроса корректности и физической реализуемости математических моделей ОУ было указано в [5].

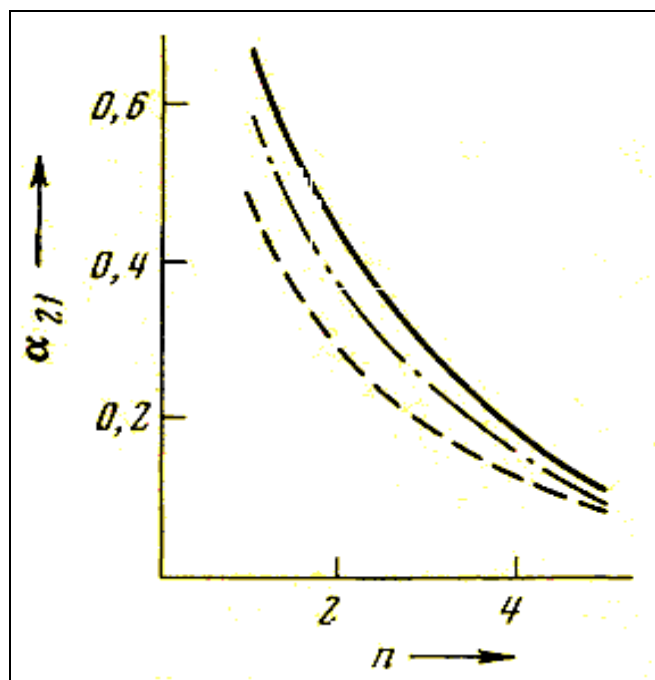


Рис. 1. Значения нижних границ для вероятностей ошибок при фиксированном числе наблюдений

Таким образом, помимо физических ограничений, на корректность описания и достоверность извлеченных знаний из модели ОУ существенное влияние оказывают также и информационные границы на применимость разработанной модели. В теории и систем управления одним из эффективных подходов снижения риска принятия решения (от неполноты описания модели ОУ) является разработка структур ИСУ.

### **Применение информационных оценок рисков в технологии проектирования робастных баз знаний в ИСУ**

В теории и систем управления одним из эффективных подходов снижения риска принятия решения (от неполноты описания модели ОУ) является разработка структур ИСУ.

Важной проблемой в создании интеллектуальных систем управления (ИСУ) является разработка методов и алгоритмов повышения надежности и качества управления исполнительского (нижнего) уровня САУ, основанного на традиционном ПИД-регуляторе. При этом выполняется принцип «не-разрушения исполнительского уровня», что приводит к эффективному использованию существующих отлаженных промышленных технологических процессов. Использование нечетких регуляторов (НР) совместно с ПИД-регулятором привело к созданию гибридных ИСУ с различными уровнями интеллектуальности в зависимости от полноты и корректности спроектированной базы знаний (БЗ) [5]. Под термином БЗ понимается стандартное для теории НР определение БЗ [5] в виде конечного множества продукционных правил определенной модели нечеткого вывода с конкретными типами и параметрами функций принадлежности, формирующих законы управления ОУ. Параметры и тип функции принадлежности хранятся в базе данных НР. Структура нечеткого самоорганизующегося ПИД-регулятора с определенным уровнем интеллектуальности была введена в [5] и используется в данной статье.

Одной из трудностей разработки ИСУ для непредвиденных ситуаций управления и условий риска является решение проблемы проектирования соответствующей БЗ, использующей объективные знания о поведении объекта управления (ОУ) и нечетких ПИД-регуляторов. Поэтому одной из сложных и ключевых проблем разработки основы информационной технологии проектирования ИСУ для такого широкого класса ОУ является создание процесса извлечения объективных знаний и этапов проектирования на их основе робастных БЗ в непредвиденных ситуациях управления для исполнительского уровня иерархической структуры управления, учитывающего в производственных правилах БЗ реальные физические и информационные ограничения.

В частности, в качестве информационных ограничений в данной статье рассматриваются информационные оценки приращения риска, которые учитываются в части посылки «Если...» производственных правил «Если ... То ...».

Например, рассмотрим традиционную структуру логического нечеткого вывода в виде производственных правил «Если  $A$  То  $B$ », где  $A$  и  $B$  нечеткие лингвистические переменные. В ИР, лингвистические переменные  $A$  и  $B$  описываются соответствующим набором функций принадлежности, вид и параметры которых задаются оптимизатором баз знаний на мягких вычислениях. При этом структура логической посылки  $A$  записывается в виде:

**Если** ошибка  $e$  *малая* величина, скорость ошибки  $\dot{e}$  *средняя* величина и накопление ошибки  $\int edt$  *средняя* величина,

**То** параметры регулятора  $k_p$  *большая* величина,  $k_d$  *малая* величина,  $k_i$  *средняя* величина.

Отметим, что в такой структуре информационный риск не учитывается.

В нашем случае структура логической посылки имеет следующий вид:

**Если** ошибка  $e$  *малая* величина, скорость ошибки  $\dot{e}$  *средняя* величина, накопление ошибки  $\int edt$  *средняя* величина, **и** степень риска  $\Delta p$  *средняя* величина,

**То** параметры регулятора  $k_p$  *средняя* величина,  $k_d$  *большая* величина,  $k_i$  *малая* величина.

При этом информационная оценка риска  $\Delta p = \tilde{r} - r$  и определяется верхней и нижней границей информационных расхождений в (20) (см. Приложение).

Следовательно, учет в производственных правилах «Если  $A$  То  $B$ » величины приращения информационного риска в виде лингвистической переменной позволяет применить методологию проектирования БЗ на основе мягких вычислений с учетом приращения информационных оценок риска.

### 3. Информационная технология и этапы проектирования объективных робастных БЗ

Рассмотрим следующую задачу: разработать методологию и алгоритмическую основу информационной технологии проектирования робастных ИСУ – алгоритм управления формированием активных (в реальном времени) знаний в виде робастных баз знаний (БЗ) в нечетких ПИД-регуляторах в условиях неопределенности исходной информации и непредвиденных ситуаций управления. Центральным моментом эффективного применения технологии процессов извлечения, обработки и сжатия ценной информации для формирования активных знаний в виде робастных БЗ является *структурированный* случайный поиск (на основе технологии мягких вычислений, Этап 1 – формирование конечного множества индивидуальных БЗ в конкретных ситуациях управления с обучением). Использование в разработанном алгоритме *квантовых стратегий управления самоорганизацией* знаний [4] составляет сущность Этапа 2, на котором на основе квантового нечеткого вывода (КНВ) и формируется робастная БЗ из реакций спроектированных индивидуальных БЗ на новую непредвиденную ситуацию управления.

Рисунок 2 представляет структурную схему и этапы информационной технологии проектирования объективных БЗ для робастных ИСУ, основанных на новых видах интеллектуальных вычислений [6, 7].

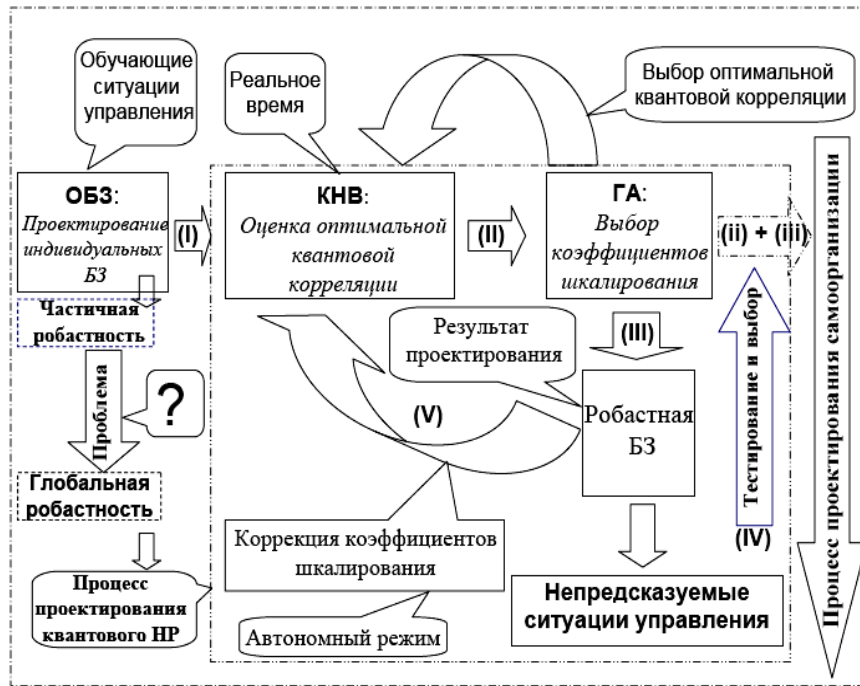


Рис. 2. Структура технологии и этапы проектирования робастных БЗ в условиях непредвиденных ситуаций управления

Структура робастных ИСУ, основанная на разработанной технологии проектирования робастных БЗ (см., рис. 2) и принципе самоорганизации, показана на рис. 3.

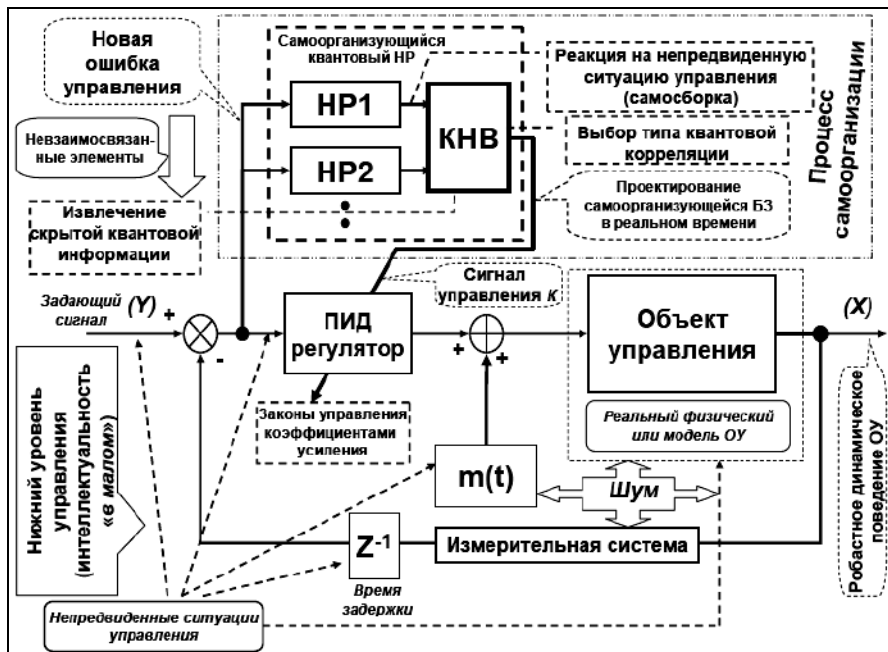


Рис. 3. Структура самоорганизующейся ИСУ с ОБЗ на КНВ

В непредвиденных ситуациях управления и условиях риска производные правила робастных БЗ проектируемого НР формируют законы управления (см. рис. 3) с учетом реальных нелинейных физических и информационных ограничений на условия функционирования ОУ. В результате робастность ИСУ формируется с помощью квантового нечеткого вывода (КНВ) в законах управления коэффициентами усиления ПИД-регулятора, включающих отмеченные особенности. В качестве инструментария моделирования производных правил БЗ используется технология мягких и квантовых вычислений [6 – 9].



#### **4. Структура самоорганизующейся ИСУ и программная реализация модели КНВ**

На Этапе 1 (см. рис. 2) проектируется конечное множество БЗ для заданных ситуаций управления (режим обучения без КНВ) в режиме off-line на основе оптимизатора баз знаний (ОБЗ) на мягких вычислениях (см. рис. 3). На Этапе 2 применяется модель КНВ в режиме on-line. Структура самоорганизующейся ИСУ, основанная на моделях ОБЗ и реализующая разработанный метод проектирования робастных БЗ, показана на рис. 3.

Подчеркнем принципиально важную особенность работы квантового алгоритма [4] (КА) (в модели КНВ) в процессе проектирования робастных законов управления коэффициентами усиления с использованием спроектированных индивидуальных БЗ на основе мягких вычислений. Робастные законы управления, проектируемые моделью КНВ, определяются в режиме самоорганизации знаний на выходных реакциях индивидуальных БЗ (с фиксированным набором продукционных правил – Этап 1) на текущую непредвиденную ситуацию управления в виде сигналов управления коэффициентами усиления ПИД-регулятора и реализуют процесс адаптации в реальном времени. Такой эффект достигается только за счет использования законов квантовой теории информации в разработанной структуре КНВ (см. описание законов и четырех фактов из квантовой теории информации в [9]). При этом для формирования робастной БЗ в реальном времени входом для КНВ могут служить любые сигналы обучения, полученные из индивидуальных БЗ независимо от используемого программного инструментария моделирования (или экспериментально полученных сигналов обучения).

На Этапе 2 проектирования с применением модели КНВ уже не требуется формирования новых продукционных правил. Достаточно в реальном времени получить реакцию продукционных правил в используемых НР на текущую непредвиденную ситуацию управления в виде выходных сигналов управления коэффициентами управления нечеткого ПИД-регулятора (см. рис. 3). В этом случае для работы модели КНВ знание сработанных в индивидуальных БЗ конкретных продукционных правил не требуется [8].

Спроектированные на Этапе 1 БЗ состоят из логических продукционных правил, которые по новой заданной ошибке управления формируют законы изменения коэффициентов усиления в используемых нечетких ПИД-регуляторах. КА в этом случае позволяет извлечь необходимую ценную информацию из реакции двух (или более) БЗ, спроектированных с учетом информационных рисков в заданных ситуациях управления, на непредвиденную ситуацию управления за счет устранения дополнительной избыточности информации в законах изменения коэффициентов усиления регуляторов.

Выходным сигналом КНВ являются новые законы изменения коэффициентов усиления ПИД-регулятора, обладающие меньшей алгоритмической сложностью для физической реализации.

Таким образом, сам КА в модели КНВ служит физическим прототипом формирования продукционных правил и реализует программным путем «виртуальную» робастную БЗ для нечеткого ПИД-регулятора (для текущей непредвиденной ситуации управления) и является проблемно независимым инструментарием.

#### **5. Пример применения ИСУ**

В качестве примера интеллектуального управления СТС с учетом информационного риска рассмотрим задачу управления рисками и безопасностью движения железнодорожного транспорта (ЖДТ) столь актуальную на современном этапе развития транспортных перевозок в условиях непредвиденных (нештатных) ситуаций.

##### **5.1. Интеллектуальное управление рисками и безопасностью движения ж/д транспорта (ЖДТ) в условиях риска и штатных ситуаций**

Одним из приоритетных направлений инновационного развития железнодорожной (ж/д) отрасли становятся разработка и широкое применение интеллектуальных железнодорожных систем (ИЖС). Они создаются для снижения риска и повышения безопасности движения и эффективности перево-

зочного процесса, совершенствования защиты объектов от несанкционированного вмешательства и вандализма, уменьшения отрицательного влияния «человеческого фактора» на качество управления, особенно в экстремальных ситуациях. Наличие факторов неопределенности в инфраструктуре ЖДТ, с одной стороны, несоблюдение технических регламентов безопасности и возникновение нештатных ситуаций на ЖДТ, с другой стороны, приводят к необходимости рассмотрения проблемы управления рисками и повышения безопасности ЖДТ. Попытка увеличения скорости перевозки снижает ее безопасность, а повышение безопасности может быть достигнуто снижением скорости перемещения грузов и пассажиров. Поэтому эти показатели следует учитывать и рассматривать одновременно при постановке и реализации целей управления ЖДТ системой страны, т.е. как сложной иерархической СТС. В этой связи обсуждаются также современные подходы к решению проблемы безопасности движения в условиях нештатных ситуаций.

Наиболее простым способом качественного предварительного анализа рисков, особенно когда отсутствуют необходимые данные или их очень мало, является применение диаграмм в системе координат *Вероятность (Частота) события / Последствия события* на основе составления так называемой *матрицы риска*.

Оценка и формирование матрицы рисков проводится по стандартным методикам Стандарт ГОСТ Р ИСО/МЭК 17799-2005 «Информационная технология. Практические правила управления информационной безопасностью», Risk Management Guide for Information Systems. NIST, Special publication 800-30, A Risk Management Standard © AIRMIC, ALARM, IRM: 2002, Risk Management Guide, December 11, 2009, Revision 1.8, Building a Risk Matrix, CPAC February 2009, Risk Management Overview: Whys and Hows, 2008 и др.

Стандартная идея и алгоритм формирования матрицы рисков показаны на рис. 4.

Пример сформированной матрицы рисков для нештатных ситуаций показан на рис. 5.

Возможны два вида оценок: количественная и качественная.

Количественная оценка риска выражает возможность осуществления угрозы (ее вероятность), воздействие и риск в числовых величинах. Качественная оценка используется для выражения того или иного значения шкалу оценок высокий, средний, низкий.

Если используемая количественная метрика оказывается недостаточно полной, точной или адекватной, то количественный подход имеет малые, либо вообще не имеет преимуществ перед качественным подходом, так как приходится использовать субъективную интерпретацию количественных характеристик. Для разрешения подобных ситуаций адекватно подходит теория нечётких множеств, применение которой упрощает принятие решения по сложно формализованным и неформализованным задачам. Поэтому большинство подходов к оценке риска начинают с использования качественных показателей ранжирования (высокий, средний, низкий) и присваивают диапазон значений каждому из трех показателей.

Пример формирования матрицы риска на шкале лингвистических переменных, качественные характеристики и их содержательные определения для каждого из уровней приведен на рис. 6.

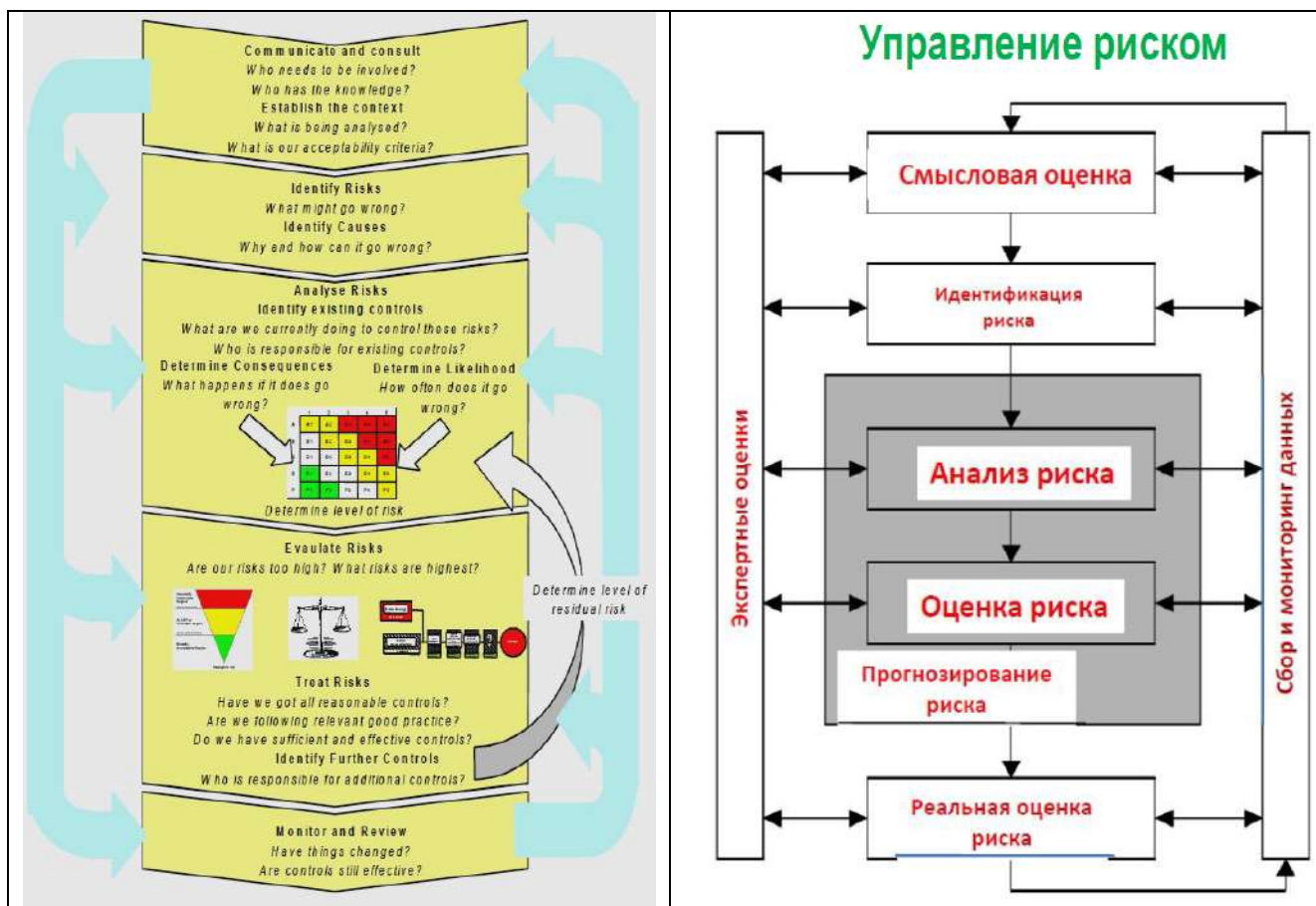


Рис. 4. Формирования матрицы рисков

**Example Risk Matrix (simplified description only)**

Hazard	Risks	Inherent Risk			Risk Controls		Residual Risk			Evaluation
		L'hood	Consq	Risk	Control 1	Control 2	L'hood	Consq	Risk	
Signal Passed at danger	Potential Train Collision	6	6	12	Driver training	Rule Book	5	5	10	High
Infrastructure defect	Derailment	6	6	12	Track Standards	Track Inspections	5	4	9	High
Smoking on train	Train on Fire	4	6	10	No Smoking Rules	Fire Extinguisher on train	3	3	6	Moderate

**Risk Evaluation Table**

		Consequence					
		1	2	3	4	5	6
Likelihood	6	7	8	9	10	11	12
	5	6	7	8	9	10	11
	4	5	6	7	8	9	10
	3	4	5	6	7	8	9
	2	3	4	5	6	7	8
	1	2	3	4	5	6	7

Рис. 5. Пример сформированной матрицы рисков для нештатных ситуаций

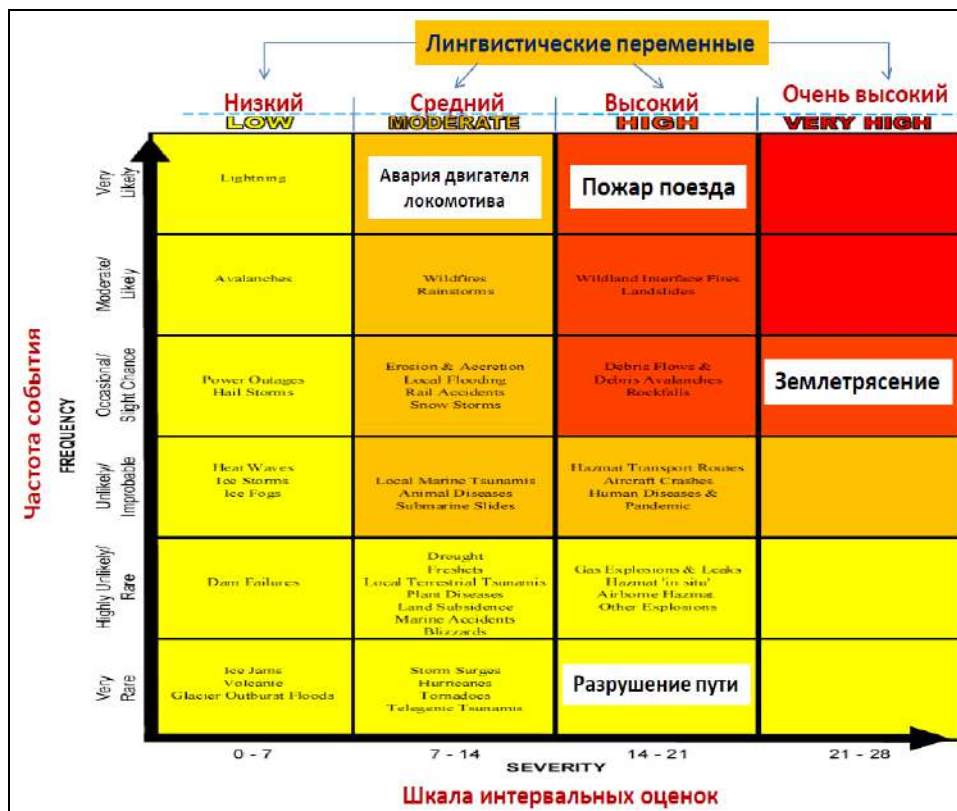


Рис. 6. Пример сформированной матрицы для нештатных ситуаций движения ЖДТ

Для формирования матрицы риска на шкале лингвистических переменных можно воспользоваться MatLab – программой типа SCOptKB™.

Данные программы позволяют оперировать лингвистическими переменными и создавать для них продукционные правила вывода. В интерактивном режиме можно наблюдать за показателями каждой из переменных, а также за уровнем истинности каждого из правил (см. рис.7). Сначала создадим две входных и одну выходную переменную, соответствующие лингвистическим переменным «Р», «U» и «RiskLevel» соответственно. Потом создадим блок правил, в которые занесём правила, описанные выше. Запустив интерактивный режим, можно изменять значения переменных «Р» и «U», наблюдать за степенью истинности правил и наблюдать за результатом переменной «RiskLevel» [10].

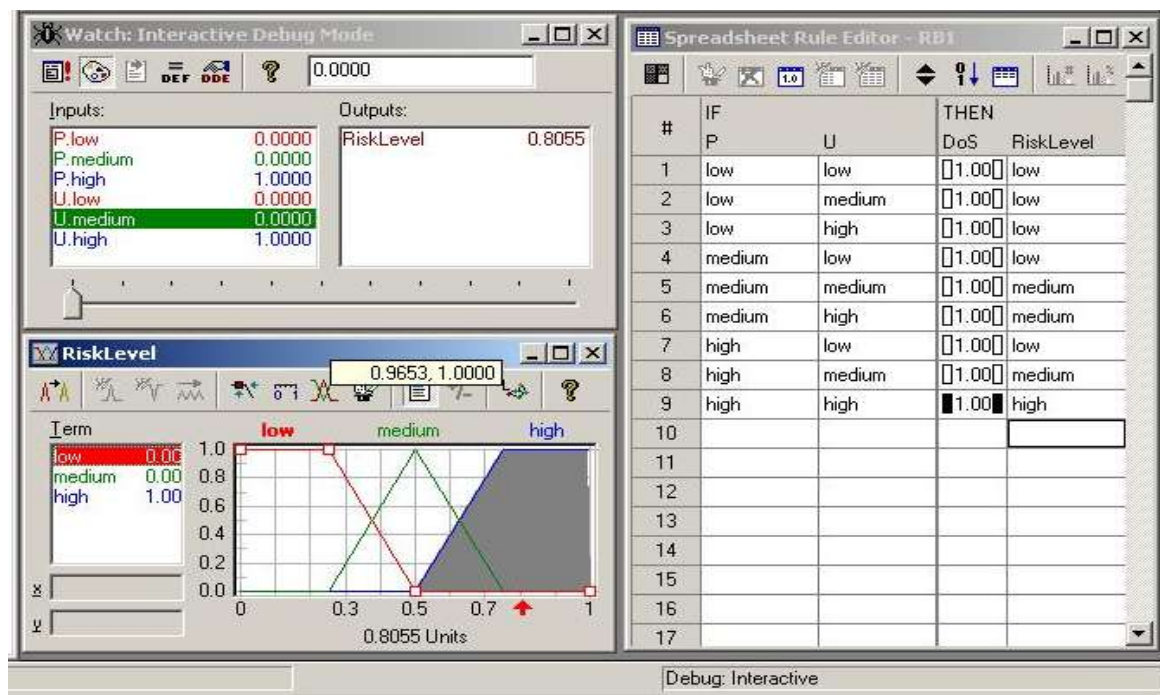


Рис. 7. Интерактивный режим программы описания лингвистических переменных

Использование теории нечётких множеств позволяет корректно получить оценку риска в условиях неопределённости значений показателей риска, а также при выборе из группы рисков нескольких, которые должны удовлетворять определённому критерию. Пользователь программы может предварительно выставить характерные значения для каждого из термов, либо пользоваться термами без численных значений для качественной оценки параметров.

### 5.2. Иерархическая интеллектуальная система управления оценки информационного риска и принятия решения в нестандартных ситуациях

Комплексные ИСУ в первую очередь ориентированы на получение независимой от персонала объективной исходной информации. Обработка этой информации осуществляется с помощью автоматизированных систем, имеющих в своем составе аналитические и экспертные модели, которые поддерживают работу персонала, отвечающего за безопасность движения.

На рис. 8 показана структура комплексной ИСУ ЖДТ с учетом условий риска и непредвиденных ситуаций.

В качестве примера ниже рассмотрена нестандартная ситуация «Авария двигателя локомотива» и обсуждается задача экстренного аварийного останова локомотива с использованием разработанной ИСУ.

В общем случае структура комплексной ИСУ ЖДТ включает ситуационный центр и ИСУ рисками и безопасностью движения. Ситуационный центр включает в себя логистическую информационно-аналитическую систему сбора, обработки данных для формирования факторов матрицы риска инфраструктуры ЖДТ и интеллектуальную систему принятия решения в условиях нестандартных и непредвиденных ситуаций управления. Матрица риска, сформированная в ситуационном центре на основе требований технического регламента к безопасности и текущей информации, по запросу из интеллектуальной системы принятия решений выдает оценку уровня риска текущей нестандартной ситуации. Выходной сигнал интеллектуальной системы принятия решений описывает требования к необходимому уровню робастности ИСУ движением в условиях нестандартных ситуаций. Установка требуемого уровня интеллектуальности отвечает уровню требуемой робастности ИСУ движением и поступает в блок самоорганизации БЗ в нестандартных ситуациях. ОУ получает управляющее воздействие для устранения нестандартной ситуации из ИСУ движением на основе производственных правил, сформированных в самоорганизующейся БЗ. Блок моделирования нестандартных ситуаций на основе базы данных и собственной

БЗ формирует для блока самоорганизации БЗ рекомендации на выбор вида управления с учетом запроса из базы данных контроля показателей безопасности.

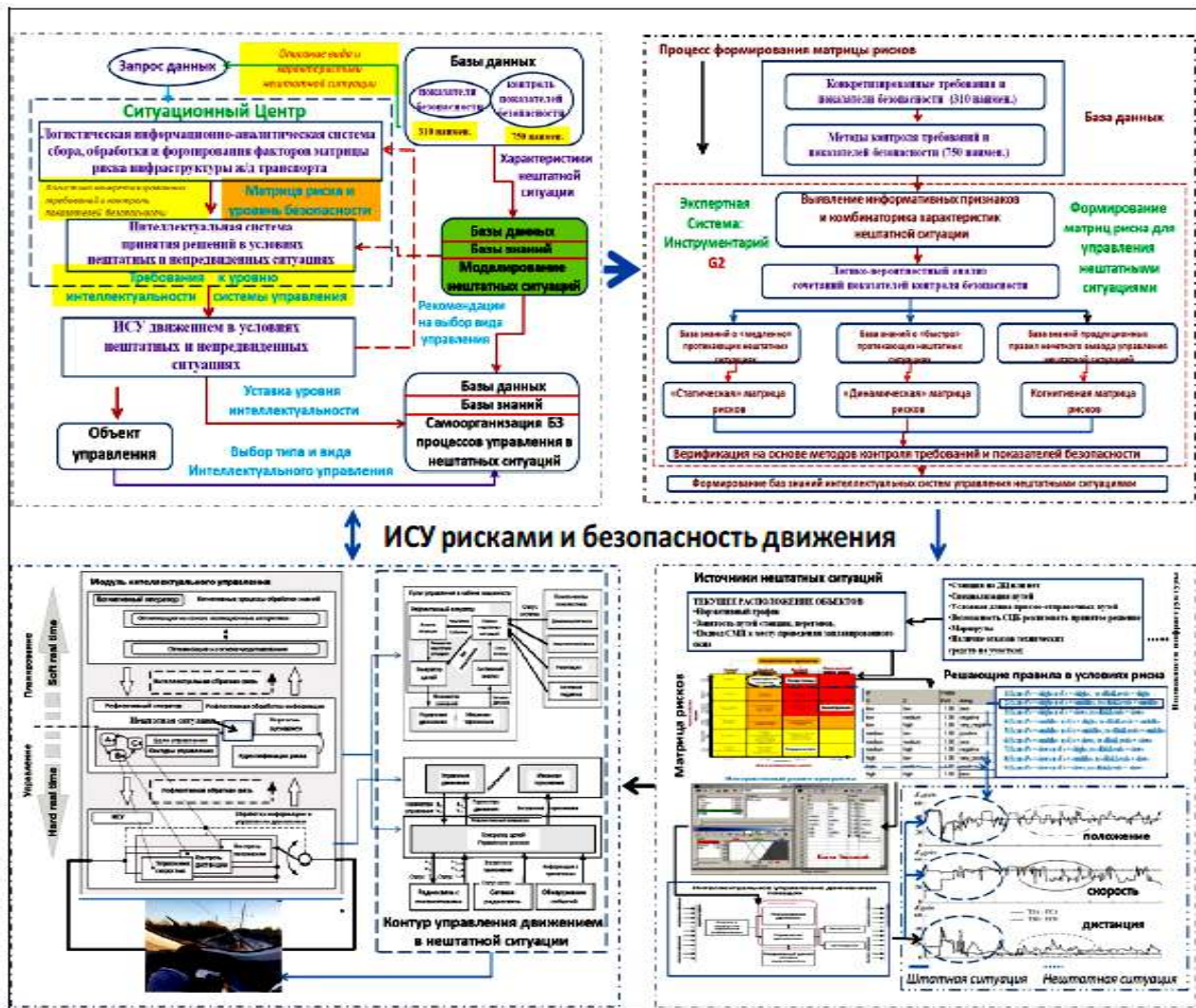


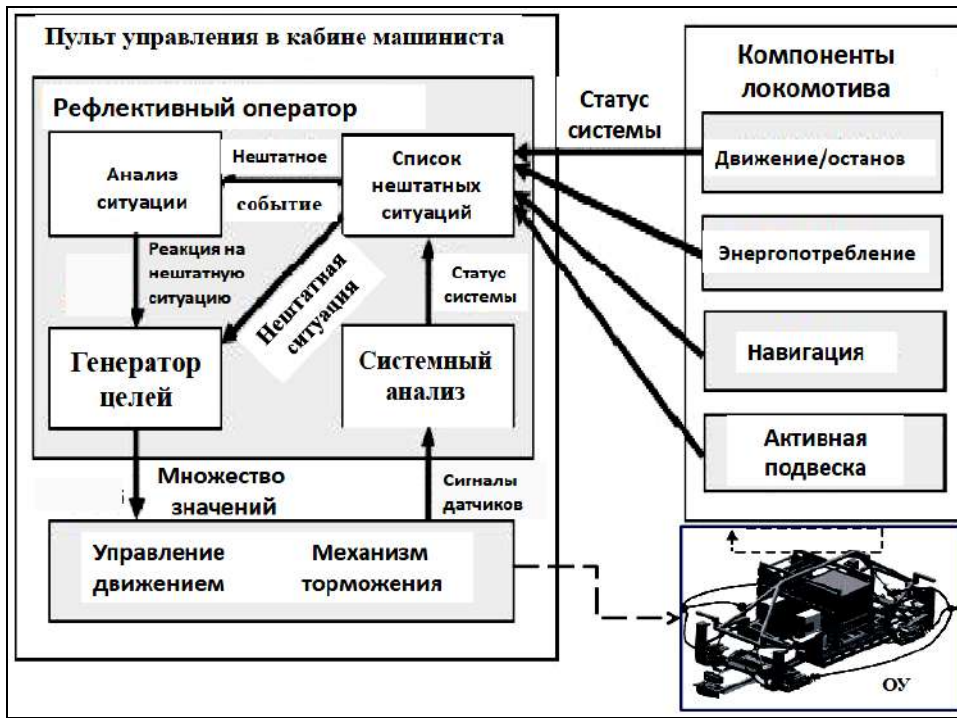
Рис. 8. Структура комплексной ИСУ ЖДТ с учетом условий риска и непредвиденных ситуаций

В данном разделе статьи кратко описывается работа ИСУ безопасностью движением в условиях риска и нештатных ситуаций. Методика формирования матрицы риска была рассмотрена выше в п. 5.1.

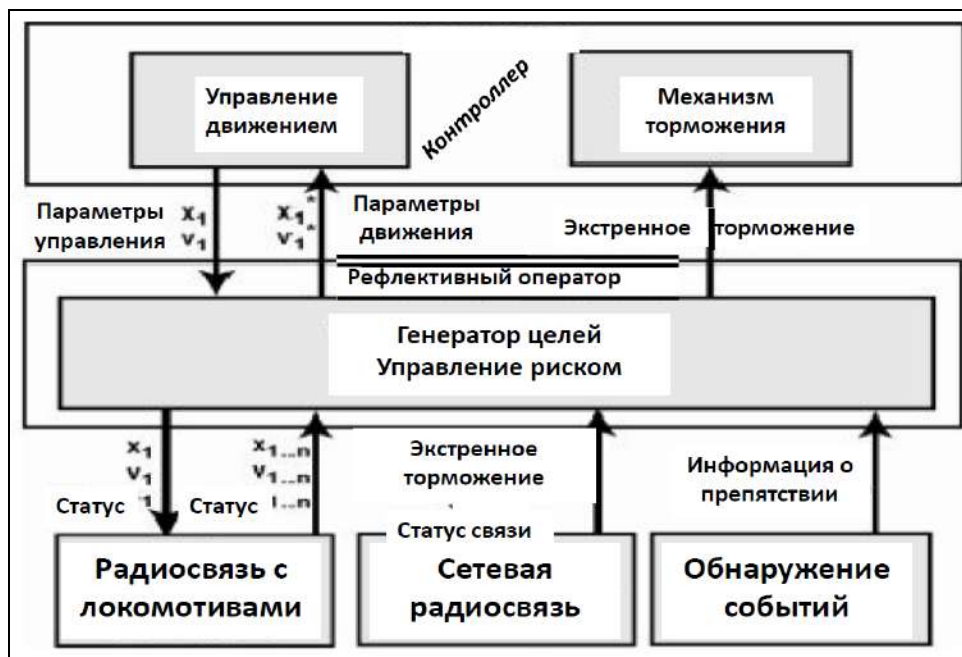
На рис. 9 а, б, в показано принципиальное решение структурной реализации ИСУ движением в нештатной ситуации для автомашиниста.

Согласно рис. 9, а пульт управления в кабине машиниста оснащен блоком рефлективного оператора, состоящего из подблока «Анализ ситуации», подблока «Генератор целей», подблока «Список нештатных ситуаций» и подблока «Системный анализ».

Сам блок рефлективного оператора работает в интерактивном режиме обмена информацией. Это означает, что в случае возникновения нештатной ситуации из подблока «Список нештатных ситуаций» в подблок Анализ ситуаций поступает сигнал «Нештатное событие». В результате работы подблока Анализ ситуации выдается выходной сигнал – реакция на нештатную ситуацию, который является входным сигналом для подблока «Генератор цели». В результате подблок «Генератор цели» по входному сигналу из подблока «Анализ ситуации» и по идентифицирующему сигналу из подблока «Список нештатных ситуаций» вырабатывает множество значений управляющих сигналов, подаваемых в подблок «Управление движением».



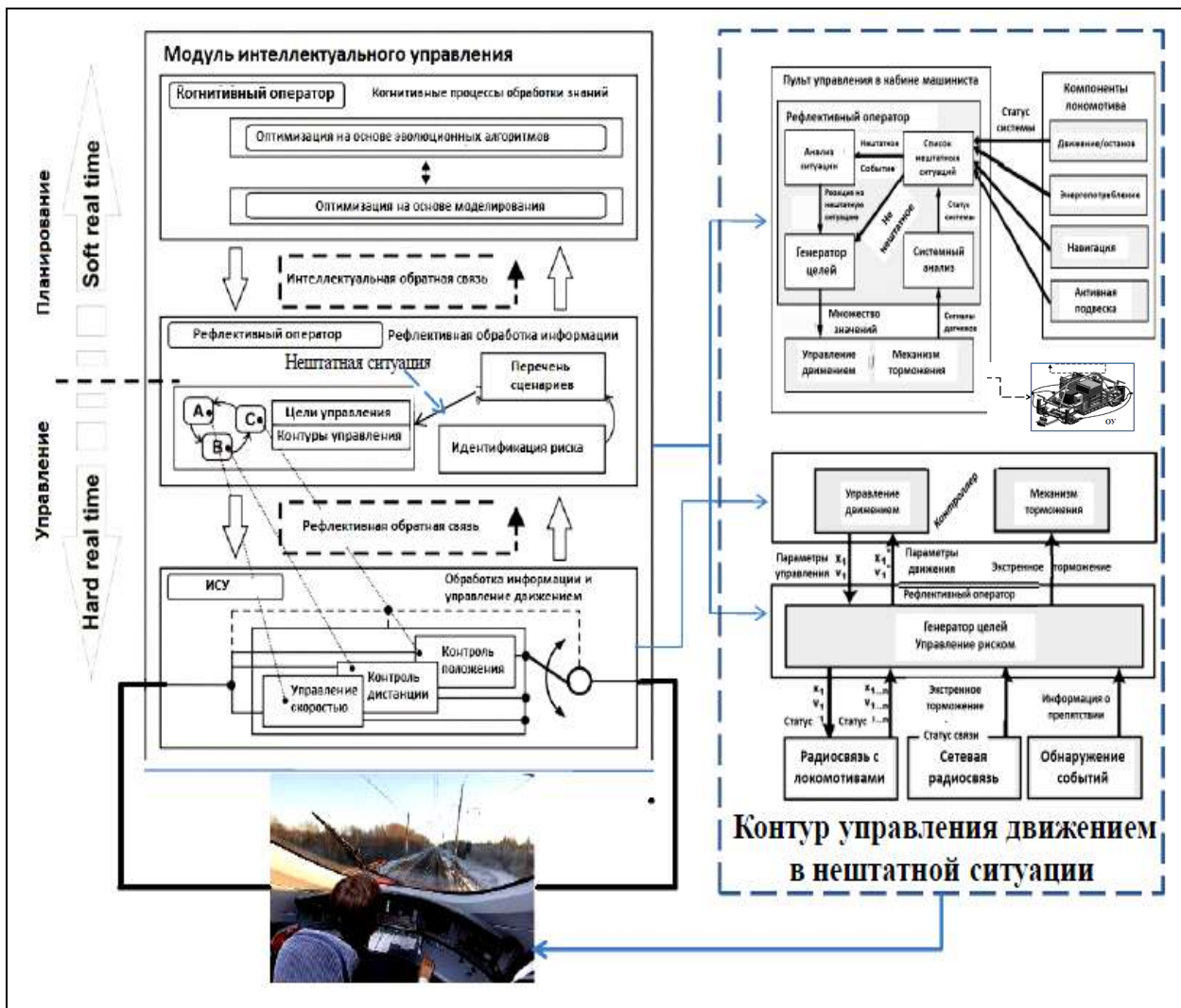
а)



б)

В результате в подблоке «Системный анализ» по входным сигналам датчиков обнаружения нештатных ситуаций определяется статус системы в непредвиденной ситуации управления, с помощью которого формируется управление компонентами локомотива. При этом сам интеллектуальный контроллер содержит подблок «Управление движением» и подблок «Механизм торможения».

В случае обнаружения нештатной ситуации в модуль Интеллектуальное управление из ситуационного центра, деятельность которого связана с задачами реагирования на чрезвычайные ситуации, их прогнозирования и предупреждения, поступает информация о текущей непредвиденной ситуации управления. Обнаруженная нештатная ситуация оценивается с помощью матрицы рисков и информация передается на «Рефлективный оператор».



в)

Рис. 9 Принципиальное решение реализации автомашиниста с интеллектуальным управлением движения локомотива в нештатных ситуациях

В результате после анализа и обработки принятое решение поступает в виде управляющих параметров движения на интеллектуальный контроллер. Интеллектуальный контроллер с заложенными в него алгоритмами нечеткой логики на основе поступившей информации выдает сигнал «Экстренное торможение».

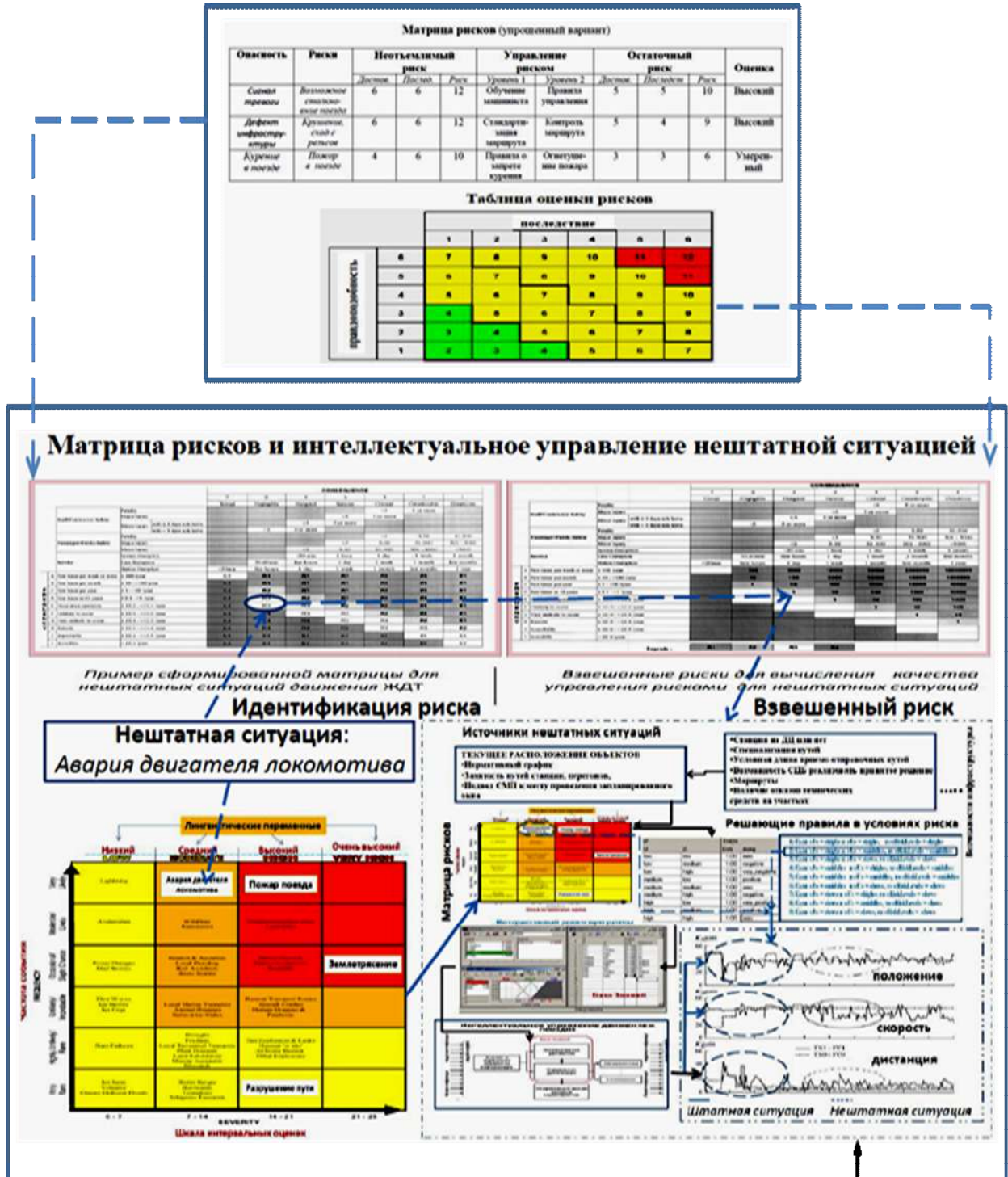
При обнаружении другого события (потенциально опасного объекта, например, препятствия) «Рефлективный оператор» посредством сетевой радиосвязи с локомотивом получает параметры движения локомотива и также передает их в интеллектуальный контроллер. Подблок интеллектуального контроллера «Управление движением» на основе полученных от «Рефлективного оператора» параметров движения формирует параметры управления и возвращает их на блок «Рефлективный оператор». Интеллектуальный контроллер (см. рис. 9) с заложенными в него алгоритмами нечеткой логики на основе поступившей информации выдает сигнал «Экстренного торможения» и подает его на механизм торможения и активную подвеску локомотива.

Машинист локомотива может данное решение системы упредить, но если он этого не сделает, тормозная система срабатывает автоматически от управляющего сигнала интеллектуального контроллера. Система срабатывает точнее, чем это сделал бы машинист, т.к. использует такие информационные переменные, которые машинист учитывает лишь приблизительно (контроль скорости, контроль дистанции, контроль положения) или не способен учесть в силу объективных причин.

Методология погружения матрицы рисков в систему безопасности инфраструктуры и управления движением ЖДТ показана на рис.10. В качестве примера рассмотрена нештатная ситуация –



«Авария двигателя локомотива» и экстренный аварийный останов локомотива. На основе информации об источниках нештатных ситуаций и возможностях инфраструктуры формируется матрица рисков. Для создания матрицы риска на шкале лингвистических переменных используем готовые системы, отмеченные ранее. На основе заданных продукционных правил формируются нечеткие алгоритмы управления, которые и определяют функционирование интеллектуального контроллера.



Экстренный останов поезда

Рис. 10. Методология погружения матрицы рисков в систему контроля инфраструктуры и управления движением ЖДТ

Таким образом, с помощью разработанной структуры ИСУ возможно достичь эффективного управления в нештатной ситуации с минимальной потерей полезного ресурса и максимальным уровнем безопасности движения ЖДТ.

## **Заключение**

Разработана структура ИСУ безопасностью движением ЖДТ в условиях информационного риска и нештатных ситуаций. Разработанная модель информационной оценки риска нештатной ситуации позволяет повысить робастность БЗ за счет включения описания параметров риска нештатной ситуации в продукционные правила управления.

## **Список литературы**

1. Караткевич С.Г., Добрынин В.Н., Ульянов С.В. Интеллектуальное управление социотехническими системами. – М.: ВНИИ Геосистем. – 2011.
2. Петров Б.Н., Уланов Г.М., Ульянов С.В., Хазен Э.М. Информационно-семантические пролемы в процессах управления и организации. – М.: Наука. – 1977.
3. Петров Б.Н., Уланов Г.М., Гольденблат И.И., Ульянов С.В. Теория моделей процессов управления: Термодинамические и информационные аспекты. – М.: Наука. – 1978.
4. Ульянов С.В. Модели квантово-релятивистских нечетких логик в интеллектуальных системах // Труды второй Всесоюзной конференции по искусственному интеллекту. – М.: ВЦ АН СССР, 1990. – Т.2. – С. 170-173.
5. Ulyanov S.V., Litvintseva L.V., Ulyanov S.S., Quantum information and quantum computational intelligence: Quantum optimal control and quantum filtering - Stability, robustness, and self-organization models in nanotechnologies. – Milan: Note del Polo (Ricerca), Universita degli Studia di Milano, 2005. – Vol. 82.
6. Мишин А.А., Добрынин В.Н., Литвинцева Л.В. Технология мягких вычислений в проектировании интеллектуальных систем управления // ППС, 2010. – № 1.
7. Литвинцева Л.В., Ульянов С.В. Интеллектуальные системы управления. Ч. I. // Изв. РАН. ТиСУ, 2009. – № 6.
8. Караткевич С.Г., Литвинцева Л.В., Ульянов С.В. Интеллектуальные системы управления. Ч. II. // Изв. РАН. ТиСУ, 2010. – № 6.
9. Литвинцева Л.В., Ульянов С.В., Ульянов С.С. Квантовый нечеткий вывод для создания баз знаний в робастных интеллектуальных регуляторах // Изв. РАН. ТиСУ, 2007. – № 6.
10. Минзов А.С., Шевяхов М.Ю. Некоторые подходы к оценке информационного риска с использованием нечетких множеств // Системный Анализ в Науке и Образовании: электрон. науч. журнал. – 2011. – №1. – [Электронный ресурс]. URL: <http://www.sanse.ru/archive/19>.

## Приложение

Пусть пространство  $\Omega$  функционирования ОУ состоит из плотностей распределения вероятностей  $p(x; a; \theta)$ , зависящих от параметров  $a; \theta$  (быть может, являющихся векторными). Таким образом, физическая интерпретация целенаправленного поведения ОУ определяется плотностью распределения вероятностей  $p(x; a; \theta)$ , а значения информативных параметров  $a$ , характеризующие текущее состояние  $x$  ОУ, зависят от параметра  $\theta$ , описывающего возможные помехи оценки состояния ОУ. Следовательно, задачу можно рассматривать как задачу о различении сложных гипотез.

В задачах о различении сложных гипотез, касающихся значения параметра  $a$ , в то время как  $\theta$  может принимать всевозможные значения из некоторых множеств, параметры  $\theta$  называются *мешающими*.

Если  $T_1(x_1, \dots, x_m), \dots, T_k(x_1, \dots, x_m)$  – такие функции от выборочной точки  $(x_1, \dots, x_m)$ , не зависящие от  $a, \theta$ , что условная плотность вероятности  $P(x_1, \dots, x_m | a, \theta)$  имеет вид:

$$P(x_1, \dots, x_m | a, \theta) = g(T_1(x_1, \dots, x_m); \dots; T_k(x_1, \dots, x_m); a, \theta) \times h(x_1, \dots, x_m), \quad (1)$$

(где  $g, h$  – некоторые функции), то статистика  $\mathbf{L} = (T_1, \dots, T_k)$  является *достаточной*. Действительно, тогда условная плотность вероятности  $P(a, \theta | x_1, \dots, x_m)$  зависит только от  $T_1(x_1, \dots, x_m), \dots, T_k(x_1, \dots, x_m)$ .

$$P(a, \theta | x_1, \dots, x_m) = \frac{P(x_1, \dots, x_m | a, \theta) P_0(a, \theta)}{\int P(x_1, \dots, x_m | a, \theta) P_0(a, \theta) da d\theta} = \frac{g(T_1, \dots, T_k; a, \theta) P_0(a, \theta)}{\int g(T_1, \dots, T_k; a, \theta) P_0(a, \theta) da d\theta}. \quad (2)$$

Функции  $\{T_1, \dots, T_k\}$ , удовлетворяющие условию (1), в математической статистике принято называть *достаточными статистиками для оценки параметров  $a, \theta$* . Они хорошо изучены и известны для ряда семейств распределений. Приведем некоторые примеры.

Экспонентные семейства:

$$P(x; \theta) = c(\theta) \exp \left\{ \sum_{j=1}^s Q_j(\theta) T_j(\mathbf{x}) \right\} h(\mathbf{x})$$

или

$$P(x; \theta) = c(\theta_1, \dots, \theta_k) \exp \left\{ \sum_{j=1}^s Q_j(\theta_1, \dots, \theta_k) T_j(\mathbf{x}) \right\} h(\mathbf{x}),$$

где  $Q_j(\theta), h(x)$  – произвольные функции;  $c(\theta)$  – постоянная нормировки. Пусть  $(x_1, \dots, x_m)$  – выборочная точка; тогда  $s$  функций  $\sum_{i=1}^m T_j(x_i), j = 1, 2, \dots, s$ , образуют достаточную статистику.

Для гауссовского распределения  $(2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$  при известной дисперсии  $\sigma^2$  статистика  $\sum_{i=1}^m x_i$  является достаточной для оценки  $a$ ; при неизвестной дисперсии достаточными статистиками для оценки параметров  $a, \sigma^2$  будут  $\sum_{i=1}^m x_i, \sum_{i=1}^m x_i^2$ .

В схеме испытаний Бернулли для оценки параметра  $p$  — вероятности успеха ( $x = 1$ ) в одном испытании — достаточной статистикой является  $T_1(x_1, \dots, x_n) = m/n$ , где  $\sum_{i=1}^n x_i = m$ ;  $x_i = 0; 1$ .

Рассмотрим вначале случай, когда число наблюдений  $n$  фиксировано.

Пусть  $\theta$  — неизвестный параметр,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  — наблюдаемые значения, а  $\tilde{p}(\mathbf{x}|\theta)$  — условная плотность распределения для  $\mathbf{x}$  при значении  $\theta$  параметра,  $\tilde{p}_0(\theta)$  — плотность априорного распределения для  $\theta$ . Допустим, что функция  $b(\mathbf{x})$  представляет собой выбранную оценку для  $\theta$  по результатам наблюдения  $\mathbf{x}$ ,  $W(\theta; b(\mathbf{x}))$  — весовая функция «потерь» при истинном значении параметра  $\theta$  и значении  $b(\mathbf{x})$  оценки параметра ( $\hat{\theta} = b(\mathbf{x})$ ). Средний риск, соответствующий плотности вероятностей

$$\tilde{p}(\mathbf{x}|\theta) = \tilde{p}(\mathbf{x}|\theta)\tilde{p}_0(\theta) \tag{3}$$

равен

$$\tilde{r} = \int W(\theta; b(\mathbf{x}))\tilde{p}(\mathbf{x}, \theta)d\mathbf{x}d\theta. \tag{4}$$

Рассмотрим другую плотность распределения вероятностей  $p(\mathbf{x}, \theta)$  для  $\mathbf{x}$  и  $\theta$ . Пусть тогда при применении той же решающей функции  $b(\mathbf{x})$  риск равен

$$r = \int W(\theta; b(\mathbf{x}))p(\mathbf{x}, \theta)d\mathbf{x}d\theta. \tag{5}$$

Пусть  $p(\mathbf{x}, \theta) = 0$  в точках, где  $\tilde{p}(\mathbf{x}|\theta) = 0$ . Положим  $u(\mathbf{x}, \theta) = p(\mathbf{x}, \theta) / \tilde{p}(\mathbf{x}, \theta)$ . Определим «информационное расхождение» между  $\tilde{p}(\mathbf{x}|\theta)$  и  $p(\mathbf{x}, \theta)$  при помощи соотношения

$$I(p : \tilde{p}) = \int p(\mathbf{x}, \theta) \ln \frac{p(\mathbf{x}, \theta)}{\tilde{p}(\mathbf{x}, \theta)} d\mathbf{x}d\theta = \int [u(\mathbf{x}, \theta) \ln u(\mathbf{x}, \theta)] \tilde{p}(\mathbf{x}, \theta) d\mathbf{x}d\theta. \tag{6}$$

Можно оценить изменение среднего риска  $|r - \tilde{r}|$  при замене плотности распределения вероятностей  $\tilde{p}(\mathbf{x}|\theta)$  на  $p(\mathbf{x}, \theta)$  в зависимости от величины  $I(p : \tilde{p})$ . Такие оценки позволяют судить об устойчивости решающего правила по отношению к изменению законов распределения вероятностей.

Рассмотри случай, когда  $W(\theta; b(x)) \leq W_0 = const$ . Тогда:

$$I(p : \tilde{p}) \geq \frac{1}{W_0} \left[ r \ln \frac{r}{\tilde{r}} + (W_0 - r) \ln \frac{W_0 - r}{W_0 - \tilde{r}} \right]. \tag{7}$$

Вывод этой и некоторых других ниже приведенных оценок основан на решении следующей задачи на условный экстремум.

Найти функцию  $u_0(\mathbf{x}, \theta)$  ( $p_0(\mathbf{x}, \theta) = u_0(\mathbf{x}, \theta)\tilde{p}(\mathbf{x}, \theta)$ ), для которой

$$I(p : \tilde{p}_0) = \int [u_0(\mathbf{x}, \theta) \ln u_0(\mathbf{x}, \theta)] \tilde{p}(\mathbf{x}, \theta) d\mathbf{x}d\theta = \min \tag{8}$$

при условиях

$$\int u_0(\mathbf{x}, \theta) \tilde{p}(\mathbf{x}, \theta) d\mathbf{x}d\theta = 1 \tag{9}$$

$$\int u_0(\mathbf{x}, \theta) W(\theta; b(\mathbf{x})) \tilde{p}(\mathbf{x}, \theta) d\mathbf{x}d\theta = r. \tag{10}$$

Используя метод множителей Лагранжа для решения задачи на условный экстремум, находим, что

$$u_0(\mathbf{x}, \theta) = e^{\lambda W(\theta, b(x)) + \mu}, \tag{11}$$

где константы  $\lambda$  и  $\mu$  следует определить из условий

$$\int e^{\lambda W(\theta; b(\mathbf{x})) + \mu} \tilde{p}(\mathbf{x}, \theta) d\mathbf{x} d\theta = 1, \quad (12)$$

$$\int W(\theta; b(\mathbf{x})) e^{\lambda W(\theta; b(\mathbf{x})) + \mu} \tilde{p}(\mathbf{x}, \theta) d\mathbf{x} d\theta = r. \quad (13)$$

Предполагая, что  $\lambda$  и  $\mu$  как функции от  $r$  дифференцируемы, получим из (12), (13):

$$\lambda'(r) = \frac{1}{r(W^2) - r^2}; \quad \mu'(r) = \frac{r}{r(W^2) - r^2}, \quad (14)$$

где

$$r(W^2) = \int W^2(\theta; b(\mathbf{x})) p_0(\mathbf{x}, \theta) d\mathbf{x} d\theta.$$

Имеем также

$$I(p_0 : \tilde{p}) = \int (\lambda W + \mu) e^{\lambda W + \mu} \tilde{p}(\mathbf{x}, \theta) d\mathbf{x} d\theta = \lambda r + \mu.$$

Обозначим  $I(p_0 : \tilde{p}) = I_0(r)$ ; с учетом (14) находим

$$\frac{d}{dr} I_0(r) = \lambda(r); \quad I_0(r) = \lambda(\tilde{r}) = \mu(\tilde{r}) = 0. \quad (15)$$

Разлагая  $I_0(r)$  по степеням  $r - \tilde{r}$ , получим

$$I_0(r) = \frac{1}{2} \lambda'(\tilde{r})(r - \tilde{r})^2 + \frac{1}{6} \lambda''(h)(r - \tilde{r})^3 \quad (16)$$

при некотором  $h \in (r, \tilde{r})$ . Из (16) следует оценка

$$|r - \tilde{r}| \leq \sqrt{2[\tilde{r}(W^2) - \tilde{r}^2] I(p : \tilde{p})} \quad (17)$$

если  $(r - \tilde{r})\lambda''(h) > 0$  при  $h \in [r, \tilde{r}]$ .

Если  $W(\theta; b(\mathbf{x})) \leq W_0$ , то  $r(W^2) - r^2 \leq W_0 r - r^2$ , и поэтому

$$\lambda'(r) = \frac{1}{r(W^2) - r^2} \geq \frac{1}{r(W_0 - r)}.$$

Отсюда с учетом (15) получаем

$$I_0(r) \geq \frac{1}{W_0} \left[ r \ln \frac{r}{\tilde{r}} + (W_0 - r) \ln \frac{W_0 - r}{W_0 - \tilde{r}} \right],$$

что и доказывает оценку (7).

В частном случае, когда  $W(\theta; b(\mathbf{x}))$  принимает значения 0 и 1, неравенство (7) (при  $W_0 = 1$ ) позволяет оценить вероятность ложного решения.

Отметим, что в частном случае, когда  $\theta$  принимает два значения,  $\theta_1$  и  $\theta_2$  (гипотезы  $H_1$  и  $H_2$ ),  $b(\mathbf{x})$  принимает два значения  $\theta_1$  и  $\theta_2$ ,  $W(\theta; b(\mathbf{x})) = 1$  при  $x \in E_1$ , (где  $E_1$  – область применения гипотезы  $H_1$ ),  $W(\theta; b(\mathbf{x})) = 0$  при  $x \notin E_1$ , и  $\tilde{p}(\mathbf{x}, \theta) = p(\mathbf{x}|\theta_1)$ ,  $p(\mathbf{x}, \theta) = p(\mathbf{x}|\theta_2)$  имеем  $\tilde{r} = 1 - \beta$  и  $r = \alpha$ , и неравенство (7) совпадает с неравенствами

$$I(1:2) \geq \beta \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + (1-\beta) \ln \frac{1-\beta}{\alpha},$$

$$I(2:1) \geq \alpha \ln \frac{\alpha}{1-\beta} + (1-\alpha) \ln \frac{1-\alpha}{\beta},$$

где  $I(1:2) = \int p(\mathbf{x}|\theta_1) \ln[p(\mathbf{x}|\theta_1)/p(\mathbf{x}|\theta_2)]d\mathbf{x}$ ; аналогично  $I(2:1)$ .

Аналогично в случае  $N$  гипотез  $((\theta = \theta_1, \dots, \theta_N))$ , обозначая через  $\alpha_{ik}$  вероятность принять гипотезу  $H_k$  при истинности  $H_i$ , полагая  $W(\theta; b(\mathbf{x})) = 1$  при  $x \in E_j$ ,  $0$  при  $x \notin E_j$ , где  $E_j$  – область применения  $j$ -й гипотезы,  $\tilde{p}(\mathbf{x}, \theta) = p(\mathbf{x}|\theta_i)$ ,  $p(\mathbf{x}, \theta) = p(\mathbf{x}|\theta_k)$ , находим  $r = \alpha_{kj}$ ,  $\tilde{r} = \alpha_{ij}$ , и неравенство (7) дает

$$I(i:k) \geq \left[ \alpha_{kj} \ln \frac{\alpha_{kj}}{\alpha_{ij}} + (1 - \alpha_{kj}) \ln \frac{1 - \alpha_{kj}}{1 - \alpha_{ij}} \right] \quad (j=1, \dots, N). \tag{18}$$

При  $j=k$ , обозначая  $\alpha_{kk} = 1 - \beta_k$ , находим

$$I(i:k) \geq \left[ (1 - \beta_k) \ln \frac{1 - \beta_k}{\alpha_{ik}} + \beta_k \ln \frac{\beta_k}{1 - \alpha_{ik}} \right], \tag{19}$$

$$I(i:k) \geq \left[ \alpha_{ki} \ln \frac{\alpha_{ki}}{1 - \beta_i} + (1 - \alpha_{ki}) \ln \frac{1 - \alpha_{ki}}{\beta_i} \right].$$

В [2] получена следующая оценка для приращения среднего риска:

$$-\sqrt{r(W^2)2I(\tilde{p}:p)} \leq \tilde{r} - r \leq \sqrt{\tilde{r}(W^2)2I(p:\tilde{p})}. \tag{20}$$

Вывод ее несложен. Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{r} - r &= \int W(\theta; b(\mathbf{x}))[\tilde{p}(\mathbf{x}, \theta) - p(\mathbf{x}, \theta)]d\mathbf{x}d\theta \\ &= \int W(\theta; b(\mathbf{x}))[1 - u(\mathbf{x}, \theta)]\tilde{p}(\mathbf{x}, \theta)d\mathbf{x}d\theta \\ &\leq \int_B W(\theta; b(\mathbf{x}))[1 - u(\mathbf{x}, \theta)]\tilde{p}(\mathbf{x}, \theta)d\mathbf{x}d\theta \\ &\leq \sqrt{\int_B W^2(\theta; b(\mathbf{x}))\tilde{p}(\mathbf{x}, \theta)d\mathbf{x}d\theta} \\ &\leq \sqrt{\int_B (1 - u(\mathbf{x}, \theta))^2 \tilde{p}(\mathbf{x}, \theta)d\mathbf{x}d\theta}, \end{aligned} \tag{21}$$

где  $u(\mathbf{x}, \theta)$ , как и выше, равно  $p(\mathbf{x}, \theta)/\tilde{p}(\mathbf{x}, \theta)$ ;  $B$  – множество точек  $(\mathbf{x}, \theta)$ , в которых  $u(\mathbf{x}, \theta) < 1$ .

Имеем также

$$\begin{aligned} I(p:\tilde{p}_0) &= \int [u(\mathbf{x}, \theta) \ln u(\mathbf{x}, \theta)]\tilde{p}(\mathbf{x}, \theta)d\mathbf{x}d\theta = \\ &= \int \left\{ [u(\mathbf{x}, \theta) - 1] + \frac{1}{2h(\mathbf{x}, \theta)} (u(\mathbf{x}, \theta) - 1)^2 \right\} \tilde{p}(\mathbf{x}, \theta)d\mathbf{x}d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(u(\mathbf{x}, \theta) - 1)^2}{h(\mathbf{x}, \theta)} \tilde{p}(\mathbf{x}, \theta)d\mathbf{x}d\theta, \end{aligned} \tag{22}$$

где значение  $h(\mathbf{x}, \theta)$  лежит между  $u(\mathbf{x}, \theta)$  и  $1$ . При записи соотношения (22) использовано представление функции  $u \ln u$  отрезком ряда Тейлора в окрестности точки  $u = 1$ :

$$u \ln u = (u - 1) + (u - 1)^2 / 2h.$$

Имеем далее

$$I(p:\tilde{p}) \geq \frac{1}{2} \int_B \frac{(u(\mathbf{x}, \theta) - 1)^2}{h(\mathbf{x}, \theta)} \tilde{p}(\mathbf{x}, \theta)d\mathbf{x}d\theta$$

$$\geq \frac{1}{2} \int_B (u(\mathbf{x}, \theta) - 1)^2 \tilde{p}(\mathbf{x}, \theta) d\mathbf{x}d\theta, \quad (23)$$

так как на множестве  $B$   $u(\mathbf{x}, \theta) < 1$  и  $h(\mathbf{x}, \theta) < 1$ . Отсюда и следует второе неравенство (20); вывод первого неравенства аналогичен.

Если функция потерь ограничена, то  $W(\theta; b(\mathbf{x})) \leq W_0$ , оценку (20) можно записать в виде

$$-\sqrt{2W_0 r I(\tilde{p} : p)} \leq \tilde{r} - r \leq \sqrt{2W_0 \tilde{r} I(p : \tilde{p})}. \quad (24)$$

### Оценки для приращения байесовского риска

Полученные выше неравенства (7), (20), (24) можно использовать также для оценки изменения байесовского риска при переходе от плотности  $\tilde{p}(\mathbf{x}, \theta)$  к  $p(\mathbf{x}, \theta_1)$ . При этом, как и выше, число наблюдений фиксировано; под байесовским риском понимается

$$r_0(p) = \inf_{b \in \xi} \int W(\theta; b(\mathbf{x})) p(\mathbf{x}, \theta) d\mathbf{x}d\theta, \quad (25)$$

где  $\xi$  – множество всех возможных решающих функций.

Пусть  $b^*$  – байесовское решающее правило, на котором достигается нижняя грань в (25), а  $r_0(p) > r_0(\tilde{p})$ . Имеем

$$\frac{r_0(p) - r_0(\tilde{p}, b^*)}{\sqrt{r_0(\tilde{p}, b^*)}} \leq \sqrt{2W_0 I(p : \tilde{p})}.$$

Так как  $r_0(\tilde{p}) \leq r(\tilde{p}; b^*)$  и функция  $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - a) / \sqrt{\mathbf{x}}$  ( $\mathbf{x} > 0, a > 0$ ) убывает при уменьшении  $\mathbf{x}$ , то

$$r_0(p) - r_0(\tilde{p}) \leq \sqrt{2W_0 r_0(\tilde{p}) I(p : \tilde{p})}.$$

Аналогично в случае оценки (7): пусть, например,  $r_0(p) > r_0(\tilde{p})$  и  $\tilde{b}^*$  – байесовская решающая функция для случая плотности  $\tilde{p}(\mathbf{x}, \theta)$ . Тогда

$$\frac{1}{W_0} \left[ r(p; \tilde{b}^*) \ln \frac{r(p; \tilde{b}^*)}{r_0(\tilde{p})} + (W_0 - r(p; \tilde{b}^*)) \ln \frac{W_0 - r(p; \tilde{b}^*)}{W_0 - r_0(\tilde{p})} \right] \leq I(p; \tilde{p}).$$

Значение  $r_0(p) \leq r(p; \tilde{b}^*)$ . При  $r > \tilde{r}$  функция

$$r \ln \frac{r}{\tilde{r}} + (W_0 - r) \ln \frac{W_0 - r}{W_0 - \tilde{r}} \quad (26)$$

убывает при уменьшении  $r$ . Следовательно, оценка (7) выполняется для байесовских рисков при  $r_0(p) > r_0(\tilde{p})$ . При  $r_0(p) < r_0(\tilde{p})$  возьмем в качестве решающей функции байесовское правило  $b^*$ , соответствующее плотности  $p(\mathbf{x}, \theta)$ . Если  $r < \tilde{r}$ , то функция (26) убывает с уменьшением  $\tilde{r}$ , и оценка (7) снова выполняется для байесовских рисков.

Для определения «информационных расхождений» между  $p$  и  $\tilde{p}$  можно использовать и другие выпуклые функции  $\varphi(u)$ , кроме функции  $\varphi(u) = u \ln u$ , введенной выше. Обозначим

$$H_\varphi(p : \tilde{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \tilde{p}(\mathbf{x}, \theta) d\mathbf{x}d\theta. \quad (27)$$

Вывод оценок, связывающих значения  $r, \tilde{r}$  и  $H_\varphi(p : \tilde{p})$ , основан на решении следующей задачи на условный экстремум. Найти функцию  $u_0(\mathbf{x}, \theta)$  ( $p_0(\mathbf{x}, \theta) = u_0(\mathbf{x}, \theta) \tilde{p}(\mathbf{x}, \theta)$ ), для которой

$$H_\varphi(p_0 : \tilde{p}) = \int \varphi(u_0(\mathbf{x}, \theta)) \tilde{p}(\mathbf{x}, \theta) d\mathbf{x} d\theta = \min \tag{28}$$

при условиях

$$\int u_0(\mathbf{x}, \theta) \tilde{p}(\mathbf{x}, \theta) d\mathbf{x} d\theta = 1; \tag{29}$$

$$\int u_0(\mathbf{x}, \theta) W(\theta; b(\mathbf{x})) \tilde{p}(\mathbf{x}, \theta) d\mathbf{x} d\theta = r. \tag{30}$$

Решение удается найти в явном виде для случая функций  $\varphi(u) = u^2$  функции  $\varphi(u) = u \ln u$ .

При использовании функции  $\varphi(u) = u^2$  получается оценка

$$\tilde{r} - r \leq \sqrt{[\tilde{r}(W^2) - \tilde{r}^2][H_{u^2}(p : \tilde{p}) - 1]}. \tag{31}$$

Выполняются также следующие оценки, в которых не предполагается ограниченность функции потерь:

$$-\sqrt{[r(W^2) - r^2]2I(\tilde{p} : p)} \leq \tilde{r} - r \leq \sqrt{[\tilde{r}(W^2) - \tilde{r}^2]2I(p : \tilde{p})}. \tag{32}$$

Оценка (32) выполняется и для байесовских рисков  $\rho$  и  $\tilde{\rho}$ .

Отметим, что в общем случае, если существует функция  $u_0$ , доставляющая решение задачи (28)-(30), то она удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} d\varphi(u_0)/dr &= \lambda(r)W + \mu(r); \text{ обозначим } H(\varphi(u_0)) = H_\varphi^0(r); \\ dH_\varphi^0(r)/dr &= \lambda(r); \quad d^2H_\varphi^0(r)/dr^2 = d\lambda(r)/dr; \\ d^3H_\varphi^0(r)/dr^3 &= d^2\lambda(r)/dr^2. \end{aligned} \tag{33}$$

Полученные выше неравенства позволяют оценивать «устойчивость» решающих правил по отношению к изменениям распределений вероятностей. Они также позволяют находить нижние и верхние границы для риска.

### **Информационные оценки устойчивости последовательного решающего правила при изменении законов распределений вероятностей**

Рассмотрим некоторое последовательное решающее правило. Пусть  $Q_n$  обозначает множество всех выборок  $(x_1, \dots, x_n)$ , при которых решение принимается на  $n$ -м шаге. Пусть  $(x_1, \dots, x_m, \theta)$  – совместная плотность распределения вероятностей для результатов  $m$  наблюдений  $x_1, \dots, x_m$  и величины  $\theta$ , о которой должно приниматься решение;  $b(x_1, \dots, x_n)$  – решающая функция для выбора окончательного решения после остановки процесса наблюдения;  $W(b(x_1, \dots, x_n); \theta)$  – штраф при принятом решении  $b(x_1, \dots, x_n)$  и истинном значении  $\theta$ . Рассмотрим, в частности, математическое ожидание штрафа за выбор неверного решения при истинном значении  $\theta$ :

$$R(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{Q_n} \dots \int W(b(x_1, \dots, x_n); \theta) p(x_1, \dots, x_n | \theta) dx_1 \dots dx_n.$$

Рассмотрим также математическое ожидание штрафа за выбор неверного решения при истинном значении  $\theta$  плюс стоимость наблюдений:

$$r(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{Q_n} \dots \int (W(b(x_1, \dots, x_n); \theta) + c(n)) p(x_1, \dots, x_n | \theta) dx_1 \dots dx_n. \tag{34}$$

Пусть тоже самое решающее правило реализуется при другой плотности вероятностей  $\tilde{p}(x_1, \dots, x_n | \theta)$ . Тогда

$$\tilde{R}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{Q_n} \dots \int W(b(x_1, \dots, x_n); \theta) \tilde{p}(x_1, \dots, x_n | \theta) dx_1 \dots dx_n. \tag{35}$$



Оценим разность  $R(\theta)$  и  $\tilde{R}(\theta)$ . Можно получить оценки, аналогичные (7), (32).

Пусть  $W(b(x_1, \dots, x_n); \theta) \leq W_0$ . Рассмотрим множество всевозможных выборочных точек  $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \dots) = \{x_i; i = 1, 2, \dots, \infty\}$ . Определим на этом множестве плотность вероятностной меры таким образом:

$$p(\mathbf{x}|\theta) = p(x_1, \dots, x_n|\theta) \prod_{j=n+1}^{\infty} q(x_j). \quad (36)$$

Здесь  $q(x_j)$  – некоторая плотность распределения вероятностей;  $(x_1, \dots, x_n) \in Q_n$ , где  $(x_1, \dots, x_n)$  – начало последовательности  $\bar{\mathbf{x}}$  ( $n$  – момент окончания наблюдений). Аналогично положим:

$$\tilde{p}(\mathbf{x}|\theta) = \tilde{p}(x_1, \dots, x_n|\theta) \prod_{j=n+1}^{\infty} q(x_j). \quad (37)$$

Определим функцию  $W(\bar{\mathbf{x}})$  равенством

$$W(\bar{\mathbf{x}}) = W(b(x_1, \dots, x_n); \theta)$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in Q_n$ . Тогда  $R(\theta)$  совпадает с математическим ожиданием  $W(\bar{\mathbf{x}})$  при действии распределения (36),  $\tilde{R}(\theta)$  – при действии распределения (37). Имеем, используя оценки (7), (24), следующие выражения:

$$-\sqrt{2W_0 R(\theta) I(\tilde{p} : p|\theta)} \leq \tilde{R}(\theta) - R(\theta) \leq \sqrt{2W_0 \tilde{R}(\theta) I(p : \tilde{p}|\theta)}, \quad (38)$$

$$I(p : \tilde{p}|\theta) \geq \frac{1}{W_0} \left[ R(\theta) \ln \frac{R(\theta)}{\tilde{R}(\theta)} + (W_0 - R(\theta)) \ln \frac{W_0 - R(\theta)}{W_0 - \tilde{R}(\theta)} \right], \quad (39)$$

где  $I(p : \tilde{p}|\theta)$  – «информационное направленное расхождение» между распределениями (36) и (37). Величина

$$\overline{I(p : \tilde{p}|\theta)} = \int p(\bar{\mathbf{x}}|\theta) \ln \frac{p(\bar{\mathbf{x}}|\theta)}{\tilde{p}(\bar{\mathbf{x}}|\theta)} d\bar{\mathbf{x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{Q_n} p(x_1, \dots, x_n|\theta) \ln \frac{p(x_1, \dots, x_n|\theta)}{\tilde{p}(x_1, \dots, x_n|\theta)} dx_1 \dots dx_n \quad (40)$$

равна среднему значению «информационного расхождения» по результатам  $n$  наблюдений. Если

$$p(x_1, \dots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i|\theta), \tilde{p}(x_1, \dots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^n \tilde{p}(x_i|\theta),$$

то можно доказать, что

$$\overline{I(p : \tilde{p}|\theta)} = \bar{n}(\theta) I_1(p : \tilde{p}|\theta), \quad (41)$$

где  $\bar{n}(\theta)$  – среднее число наблюдений при истинности  $p(x_1, \dots, x_n|\theta)$ ,  $I(p : \tilde{p}|\theta)$  – количество информации в одном наблюдении для различения распределения  $p(\mathbf{x}|\theta)$  против  $\tilde{p}(\mathbf{x}|\theta)$ .

В этом случае окончательно получаем:

$$-\sqrt{2W_0 R(\theta) I_1(\tilde{p} : p|\theta) \bar{n}(\theta)} \leq \tilde{R}(\theta) - R(\theta) \leq \sqrt{2W_0 \tilde{R}(\theta) \bar{n}(\theta) I_1(\tilde{p} : p|\theta)} \quad (42)$$

$$\bar{n}(\theta) I_1(p : \tilde{p}|\theta) \geq \frac{1}{W_0} \left[ R(\theta) \ln \frac{R(\theta)}{\tilde{R}(\theta)} + (W_0 - R(\theta)) \ln \frac{W_0 - R(\theta)}{W_0 - \tilde{R}(\theta)} \right]. \quad (43)$$

Аналогичным образом на последовательные решающие правила переносятся информационные оценки (20), (32), в которых не требовалось ограниченности функции потерь.

Известно, что для суммы взаимно независимых случайных величин  $\zeta_i$  с одинаковыми функциями распределения и конечными математическими ожиданиями  $M\zeta_i = M\zeta$  выполняется равенство:

$$M \sum_{i=1}^n \zeta_i = MnM\zeta .$$

Если  $n$  – целочисленная случайная величина, обладающая тем свойством, что при любом  $k$  условие  $n \geq k$  является условием, наложенным только на первые  $k-1$  из величин  $\zeta_1, \dots, \zeta_m, \dots$ , и если  $Mn < \infty$ .

При независимых наблюдениях имеем:

$$\overline{I(p : \tilde{p}|\theta)} = M \left\{ \sum_{i=1}^n \ln \frac{p(x_i|\theta)}{\tilde{p}(x_i|\theta)} - \text{"истинно\_распределение\_p"} \right\},$$

откуда и следует (41).

Если слагаемые  $\zeta_i$  имеют разные законы распределения, независимы и величина  $n$  удовлетворяет приведенному выше условию, тогда

$$M \sum_{i=1}^n \zeta_i = \sum_{k=1}^{\infty} P(n \geq k) M\zeta_k .$$

Эти вычисления можно использовать для вычисления расхождения (40).