УДК 514.851

АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЕТАЛИ

Кашуба Леонид Анатольевич

Кандидат технических наук, доцент Института системного анализа и управления;
ГОУ ВПО «Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,
Институт системного анализа и управления;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: leonid-ak@mail.ru.

В работе представлено описание одного из возможных алгоритмов детерминированной модели детали с реальными поверхностями стохастического моделирования реальных поверхностей и объёма детали моделирования на основе номинальной геометрии детали и известных параметров отклонения формы и расположения реальной геометрии поверхностей деталей машин в системе координат базы.

Ключевые слова: номинальная геометрия поверхностей, номинальная система координат, система координат базы, модель номинальной поверхности в номинальной системе, модель поверхности реальной формы в системе координат базы, смещение номинальной поверхности, искривление номинальной поверхности, смещение и поворот системы координат реального элемента относительно системы координат номинального элемента, детерминированная модель детали с детерминированными реальными поверхностями, стохастическое моделирование вероятностной модели детали, метод Монте-Карло, закон распределения, доверительная вероятность, статистическая надёжность, число реализаций.

ALGORITHM FOR THE SIMULATION OF THE REAL GEOMETRY OF THE DETAILS

Kashuba Leonid

Candidate of Science in Engineering, associate professor of Institute of system analysis and management;
Dubna International University of Nature, Society and Man,
Institute of system analysis and management;
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;
e-mail: leonid-ak@mail.ru.

In the paper presents the description of one of the possible algorithms deterministic fashion-whether the details with real surfaces of stochastic modelling of real surfaces and volume details of modeling on the basis of nominal geometry details and known para-meters deviation of the form and location of the real geometry of surfaces of machine parts in the system of coordinates base.

Keywords: nominal geometry of surfaces, nominal system of coordinates, system of coordinates of base, model of a nominal surface in nominal system, model of a surface of the real form in system of coordinates of base, displacement of a nominal surface, a curvature of a nominal surface, displacement and turn of system of coordinates real an ale-cop concerning system of coordinates of the nominal element, the determined model of a detail with the determined real surfaces, stochastic modeling of likelihood model of a detail, a method of Monte-Carlo, the distribution law, confidential probability, statistical reliability, number of realizations.

Введение

Процесс изготовления деталей со случайными поверхностями носит случайный (вероятностный) характер, обусловленный множеством случайных событий, можно рассматривать как случайное событие.

Под ***случайным событием*** условимся понимать многомерную случайную величину, случайную или неслучайную функцию одного или нескольких переменных, значения которых определяется соответствующими вероятностными распределениями переменных.

Под ***реализацией случайного события*** подразумевается статистическая выборка одного элемента из множества, наделенного вероятностной мерой.

Всю рассматриваемую совокупность деталей партии можно анализировать на основе обработки результатов стохастического моделирования[1] их случайных реализаций по параметрам *детерминированной*[2] *модели*. Каждую реализацию геометрии детали, в свою очередь, можно рассматривать как совокупность реализаций их реальных поверхностей. Поэтому начнём с формирования реальной поверхности.

Основой моделирования реальной геометрии деталей машин является номинальная геометрия всех их поверхностей с привязкой их номинальных систем координат к системе координат базы.

Из проведенного анализа статьи [1] следует:

1. Отклонение формы реального элемента от номинальной имеет две компоненты:
- эквидистантное смещение относительно номинальной поверхности;
- искривление номинальной поверхности, аналогичное по смыслу волнистости и шероховатости.

2. Отклонение расположения системы координат реального элемента от его номинального расположения в системе координат элемента, принятого за базу, также имеет две компоненты:
- смещение системы координат реального элемента относительно системы координат номинального элемента,
- поворот системы координат реального элемента относительно системы координат номинального элемента.

Разработанная система представления реальной геометрии детали приемлема для любых форм номинальных элементов, ограничивающих объём деталей.

Выявленные геометрические параметры описания реальной геометрии деталей позволили наметить алгоритм[3] построения детерминированной модели детали, ограниченной реальными поверхностями с отклонениями формы и расположения поверхностей, а также вероятностного моделирования реальных деталей с реальными поверхностями.

Детерминированная модель реальной поверхности детали в номинальной системе координат

Основой моделирования реальной геометрии деталей машин является номинальная геометрия всех их поверхностей с привязкой их номинальных систем координат к системе координат базы.

Все номинальные поверхности, имеющие кривизну, могут быть представлены в номинальной системе координат проекта *параметрическими кривыми* ***u*** и ***v*** на поверхности. Радиус-вектор ***r***, определяющий положение каждой точки, и координаты точки поверхности в некоторой системе координат *OXYZ* определяются уравнениями

[1] Стохастическое моделирование – моделирование неслучайной функции со случайными аргументами.

[2] Детерминированный – (от латин. Determine – определяю) обусловленный необходимой причинной связью.

3 Алгори́тм, от имени учёного аль-Хорезми (перс. خوارزمی [al-Khwārazmī]) – точный набор инструкций, описывающих порядок действий исполнителя для достижения результата решения задачи за конечное время.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}),$$

$$x = x\,(u, v),$$

$$y = y\,(u, v),$$

$$z = z\,(u, v).$$

В компьютерной графике номинальная поверхность с кривизной задаётся сеткой линий и узлов номинальной поверхности (рис. 1).

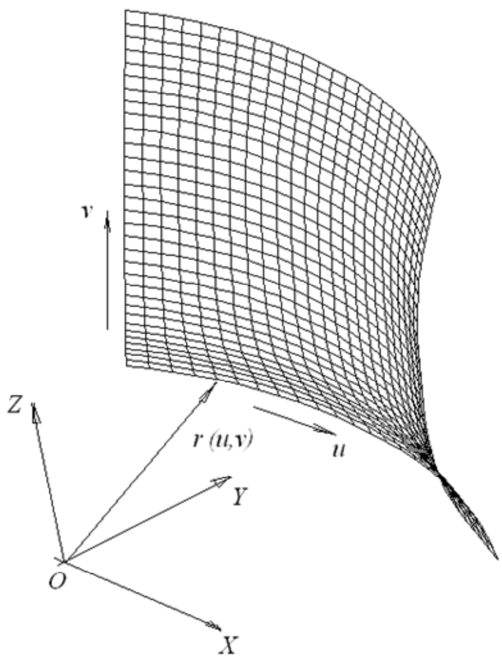


Рис. 1. Номинальная поверхность

Единственной поверхностью, не имеющей кривизны, является плоскость. Номинальное положение плоскости поверхности в некоторой системе координат *OXYZ* определяется координатами трёх точек, не лежащих на одной прямой. Представить плоскость сеткой uv достаточно сложно.

Детерминированная модель формы реальной поверхности детали в номинальной системе координат базы

Ранее было показано, что отклонение формы реального элемента от номинальной имеет две компоненты [1]:

– эквидистантное (систематическое) смещение отсчётной поверхности относительно номинальной поверхности,

– случайное искривление номинальной поверхности, аналогичное по смыслу шероховатости и волнистости.

На отклонение формы поверхности от номинальной задают поле допуска. Оно ограничивает пространство расположения реальной поверхности между эквидистантами к номинальной поверхности, проведенными по минимальной и максимальной границам отклонения формы реальной поверхности относительно номинальной поверхности [2].

Первой задачей является формирование детерминированной систематической модели отклонения формы поверхностей, выполненных одним технологическим методом.

Начнём с формирования модели номинальной поверхности, имеющей кривизну.

Первая компонента отклонения формы представляет собой эквидистантное (систематическое) смещение номинальной поверхности. Форму эквидистантной поверхности в номинальной системе координат, как и форму номинальной поверхности, можно представить сеткой ***uv*** линий и узлов. Узлы могут быть смещены по нормали как по одну сторону по отношению к номинальной поверхности, так и по другую (рис. 2).

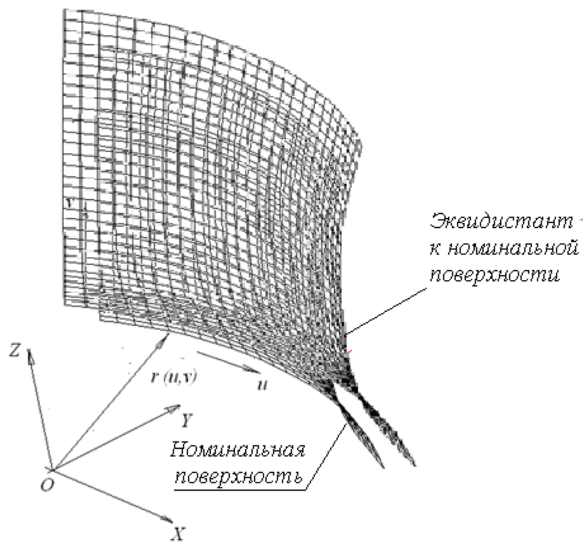


Рис. 2. Формирование эквидистанты к номинальной поверхности

Искривление эквидистантной поверхности осуществляется случайным смещением её узлов по нормали к эквидистантной поверхности в соответствии с особенностями технологии формирования. Случайные смещения узлов отражают, прежде всего, искривление номинальной поверхности, аналогичное по смыслу шероховатости и волнистости. Суммарное смещение вызвано эквидистантным отклонением формы и отклонением, обусловленным технологией формирования поверхности. Оно не должно превосходить по величине допустимое отклонение формы.

Здесь возникает первая проблема – проблема формирования исходных данных для моделирования случайных смещений узлов номинальной поверхности и алгоритма самого моделирования искривления реальной поверхности при формировании реальной поверхности *известным технологическим методом*.

Здесь же возникает вторая проблема – проблема разработки алгоритма формирования искривлённой поверхности со смещёнными узлами в номинальной системе координат элемента с учётом положения поля допуска реальной поверхности по отношению к номинальной.

Для номинальной плоскости, не имеющей кривизны, задача моделирования искажения формы поверхности начинается также, как и в случае с поверхностью, кривизна которой не равна нулю. Форму реальной поверхности в номинальной системе координат такого элемента можно представить поверхностью (плоскостью) в номинальной системе координат, дополнив его случайным набором смещений узлов номинальной поверхности по нормали к поверхности, в соответствии с особенностями технологии её формирования.

В соответствии с правилами привязки номинальной системы координат номинальных поверхностей [1] система координат реального элемента может быть отождествлена с системой координат эквидистантного элемента, прилегающего к реальному элементу.

Этим заканчивается формирование случайной реализации формы реальной поверхности в номинальной системе координат базы для номинальной поверхности.

Детерминированная модель отклонения расположения реальной поверхности детали в номинальной системе координат базы

Займёмся формированием детерминированной модели расположения реальной поверхности, имеющей только отклонения формы, в системе координат базы. Выберем базу (систему координат, в которой определяется система координат поверхности) и поместим в систему координат базы начало системы координат реальной поверхности, эквидистантно смещённую и искривлённую.

Отклонение расположения системы координат реального элемента от его номинального расположения в системе координат элемента, принятого за базу (системе координат базы), также имеет две компоненты:

- смещение системы координат реального элемента относительно системы координат номинального элемента в системе координат элемента, принятого за базу,
- поворот системы координат реального элемента относительно системы координат номинального элемента в системе координат элемента, принятого за базу.

Определение расположения реальных поверхностей детали в выбранной системе координат связано с векторно-матричным представлением положения системы координат в декартовой системе координат. Положение точки начала отсчета O_1 системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ в системе координат системы измерения $O_0X_0Y_0Z_0$ задают вектором $\boldsymbol{R}_{10}$, а направление осей последующей системы координат в предыдущей декартовой системе координат $O_0X_0Y_0Z_0$ задаётся матрицей $\boldsymbol{A}_{10.}$

Такое представление удобно для математических преобразований, но не наглядно, поскольку элементами матрицы являются направляющие косинусы.

Положение и ориентацию осей последующей системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$, задаваемой в предыдущей $O_0X_0Y_0Z_0$, более удобно определять измеряемыми унифицированными геометрическими параметрами (УГП) (рис. 3).

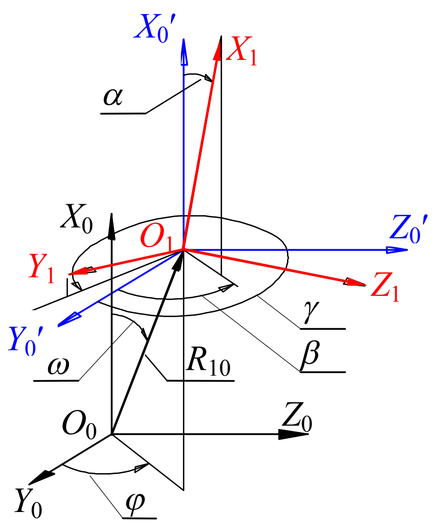


Рис. 3. Унифицированные геометрические параметры

Положение точки начала отсчета O_1 системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ в системе координат системы измерения $O_0X_0Y_0Z_0$ задают модулем радиус-вектора $\boldsymbol{R}_{10}$ и двумя углами ω и φ сферической системы координат или проекциями радиус-вектора $\boldsymbol{R}_{10}$ X_{01}, Y_{01}, Z_{01}. Направление осей системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ в системе координат $O_1X'_0Y'_0Z'_0$, параллельной предыдущей, задаётся: углом «перекоса» α оси X_1 относительно оси X'_0 , углом направления перекоса β между осью Y'_0 системы координат $X'_0Y'_0Z'_0$, параллельной базовой $X_0Y_0Z_0$, и проекцией оси X_1 на плоскость ($X'_0Y'_0$), углом γ «закрутки» между осью Y'_0 базовой системы координат $X_0Y_0Z_0$ и проекцией оси Y_1 на плоскость ($X'_0Y'_0$). Углы α и ω отсчитываются от положительного направления оси X_0, соответственно, и изменяются в пределах от 0 до π. Углы φ, β и γ отсчитываются в направлении против часовой стрелки от оси Y_0 к проекциям вектора R и осей X_1, Y_1, соответственно, и изменяются в интервале от 0 до 2π.

Переход от измеряемых УГП к векторно-матричным параметрам R_{10} и A_{10} в декартовой системе координат выполняется по соотношениям

$$R_{10} = \begin{vmatrix} X_{O1} \\ Y_{O1} \\ Z_{O1} \end{vmatrix} \text{ и } A_{10} = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix},$$

где X_{01}, Y_{01}, Z_{01} – декартовы координаты точки начала отсчета СК X_1 Y_1 Z_1,

$$X_{01} = R_{10} \cdot cos\ \omega,$$

$$Y_{01} = R_{10} \cdot sin\ \omega \cdot cos\ \varphi,$$

$$Z_{01} = R_{10} \cdot sin\ \omega \cdot sin\ \varphi,$$

l_i, m_i, n_i – элементы матрицы $\boldsymbol{A}_{10}$ направляющих косинусов осей X_1, Y_1, Z_1 относительно осей X_0,Y_0, Z_0

$l_1 = cos\ \gamma / K,\qquad l_2 = m_3 \cdot n_1 - m_1 \cdot n_3,\qquad l_3 = sin\ \alpha \cdot cos\ \beta,$

$m_1 = sin\ \gamma / K,\qquad m_2 = n_3 \cdot l_1 - l_3 \cdot n_1,\qquad m_3 = sin\ \alpha \cdot sin\ \beta,$

$n_1 = -K_1 / K,\qquad n_2 = l_3 \cdot m_1 - l_1 \cdot m_3,\qquad n_3 = cos\ \alpha,$

$K = [1 + K1^{2}]^{0,5},$

$K_1 = tg\ \alpha \cdot cos(\beta - \gamma).$

Обратный переход из векторно-матричной формы к УГП выполняется по следующим соотношениям:

$$R_{10} = \sqrt{X_{01}^2 + Y_{01}^2 + Z_{01}^2},$$

$$\omega = arccos\ (\frac{Z_{O1}}{\sqrt{X_{01}^2 + Y_{01}^2 + Z_{01}^2}}),$$

$$\varphi = arctg\ (Y_{10}/X_{10}),$$

$$\alpha = arccos\ n_{3,}$$

$$\beta = arctg\ (m_3 / l_3).$$

$$\gamma = arctg\ (m_1 / l_1).$$

В практической деятельности используется смешанная система параметров: координаты точки начала отсчёта O_1 системы координат $O_1\ X_1\ Y_1\ Z_1$ задают в декартовой системе координат, а положение осей X_1, Y_1, Z_1 – в УГП.

На отклонение расположения системы координат реального элемента от его номинального расположения в системе координат элемента, принятого за базу, также желательно задать поля допусков как на величину смещения от номинального положения, так и на величину поворота системы координат реального элемента относительно их номинальных значений в системе координат проекта.

Начало системы координат эквидистантно смещённой и искривлённой реальной поверхности в системе координат базы случайно сместим от номинального положения на величину погрешности расположения, находящуюся в пределах поля допуска, определённого сферой радиуса $\boldsymbol{r}_0$. Слегка (случайно) повернём оси системы координат реальной поверхности на углы УГП α, β и γ, равные погрешностям поворота системы координат реальной поверхности относительно базы (рис. 4).

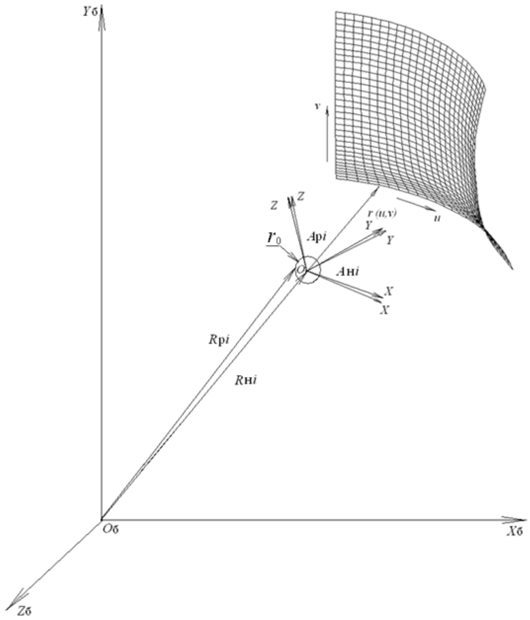


Рис. 4. Формирование отклонения расположения реальной поверхности

Полученные параметры формы номинальной поверхности с изменённой случайной кривизной и случайным эквидистантным положением поверхности, а также случайными параметрами положения $R\text{р}i$ и $A\text{р}i$ дают нам случайную реализацию формы и расположения одной из поверхностей детали в системе координат базы.

Для моделирования формы реальных поверхностей необходима разработка двух алгоритмов отклонения формы реальной поверхности (эквидистантное отклонение и отклонение, обусловленное принятой технологией) и шести случайных координат положения системы координат реальной поверхности в системе координат базы (три координаты положения начала координат и три угла поворота системы координат реальной поверхности). Моделирование отклонений формы и расположения поверхностей связано с аналогичными параметрами технологического процесса и включается на ранних этапах моделирования геометрии изделия.

Этим заканчивается формирование случайной реализации формы реальной поверхности в номинальной системе координат базы для номинальной поверхности.

Детерминированная модель детали с реальными поверхностями

Теперь можно перейти к моделированию реальных деталей с реальными поверхностями детали.

В качестве примера рассмотрим моделирование реальной детали, ограниченной цилиндрической поверхностью с двумя плоскими (в номинальной форме) торцами, аналогичной использованной в работе [1] (рис. 5).

а б

Рис. 5. Номинальная геометрия детали в номинальной системе координат:
а – проекция детали на плоском чертёже, б – её изображение в пространстве

Модель детали с реальными поверхностями будем строить от известной формы и расположения поверхностей номинальной геометрии детали.

Задача формирования собственных систем координат номинальных поверхностей решается различно для поверхностей, имеющих кривизну, отличную от нуля (несимметричных поверхностей и осесимметричных поверхностей) и для поверхностей, не имеющих кривизны (плоскостей).

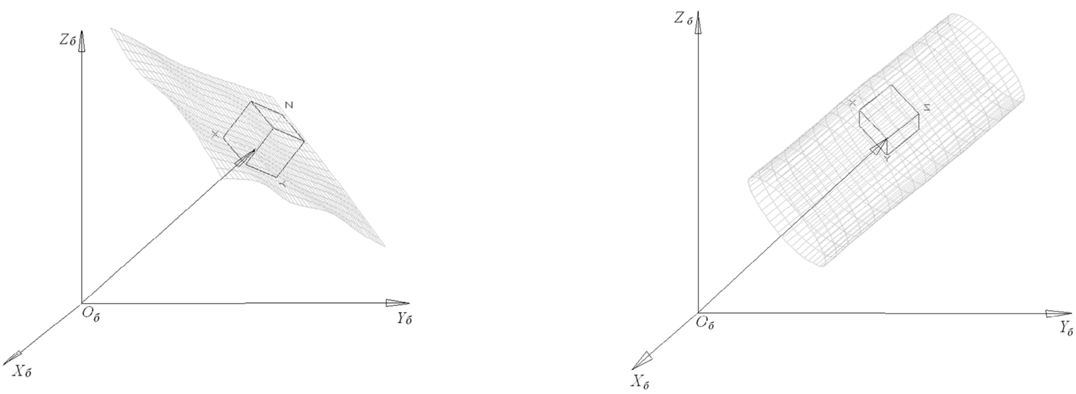
Номинальные системы координат номинальных поверхностей могут быть сформированы двумя способами:

- на трёх произвольных точках, не лежащих на одной прямой;
- на направлении и двух точках, одна из которых лежит на направлении.

Номинальная система координат номинальной несимметричной поверхности определена координатами её точек (если заданы координаты точек номинальной поверхности в номинальной системе координат, то тем самым определено положение самой номинальной системы координат). Номинальная система координат номинальной осесимметричной поверхности (рис. 5, *б*) определена координатами точки O_1, через которую проходит её ось, направлением оси осесимметричной поверхности и координатами произвольной точкой (1) на образующей осесимметричной поверхности.

Номинальные системы координат номинальных плоскостей определены направлениями нормалей к номинальным плоскостям, центрами симметрии номинальных торцовых плоскостей O_2 и O_3 и реперными точками 2 и 3, принадлежащими этим плоскостям.

Произведём моделирования отклонение формы и расположения каждой поверхности в произвольно выбранной реальной базе по описанному выше алгоритму и определим положение систем координат реальных поверхностей в реальной базе. На рисунках (рис. 6 *а* и *б*) представлено поверхностное (surfase) моделирование сеток ***uv*** линий.

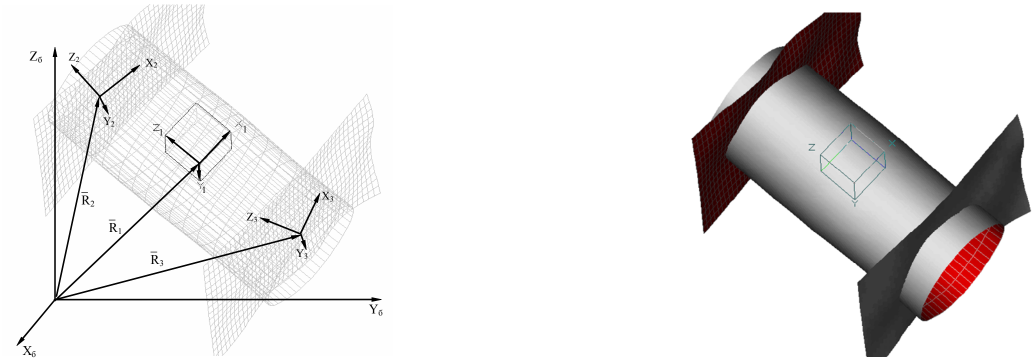


а б

Рис. 6. Моделирование реальных поверхностей:
а – модель реальной плоскости; б – модель реального цилиндра

После моделирования каждой из поверхностей по предложенным выше алгоритмам к каждой смоделированной поверхности по разработанным в [1] правилам можно привязать систему координат реальной поверхности.

Процедуру моделирования всех поверхностей детали можно провести относительно номинальной геометрии детали в системе координат произвольно расположенной реальной базы, привязав к реальным поверхностям системы координат реальных поверхностей (рис. 7, *а*).



а *б*

Рис 7. Моделирование реальной поверхности детали:
*а – сетки **uv** линий; б – после «окрашивания» наружной поверхности*

Положение номинальной системы координат поверхности в системе координат базы определяется вектором $\boldsymbol{R_i}$ положения начала номинальной системы координат поверхности и матрицей $\boldsymbol{A_i}$ направляющих косинусов её осей.

Для обеспечения пересечения поверхностей их величина должна быть несколько больше, чем у номинальной геометрии. После пересечения, «обрезки» лишнего материала и «окрашивания» поверхностей (рис. 5, б), что легко осуществляется в современных CAD-системах, получим геометрию реальной детали с реальными поверхностями в системе координат базы. Такой способ формирования реальной геометрии деталей пересечением реальных поверхностей (surfase) отличается от традиционного твёрдотельного (solid).

Объем детали, заключенный внутри наружной поверхности, представляет собой систему материальных точек (частиц), в которой расстояния между двумя любыми точками остаются постоянными:

$$V = \iiint f(x, y, z)dxdydz,$$

где $f(x, y, z)$ – границы объема детали.

Такую систему называют *неизменяемой системой*. Если же, кроме того, точки системы расположены непрерывно, т. е. заполняют область пространства, занятую системой, сплошным образом, то такую неизменяемую систему называют *абсолютно твердым телом*. Абсолютно твердое тело, согласно определению, не может быть подвержено никаким деформациям и представляет собой идеальный образ, который тем ближе подходит к реальному твердому телу, чем меньше последнее способно деформироваться под действием сил.

Твердое тело позволяет с достаточной достоверностью сформировать представление модели детали с учетом погрешностей формы и расположения всех ее поверхностей.

Для объема твердого тела справедливы положения геометрии масс:

координаты центра масс:

$$x_C = \int f(x, y, z)dx \quad y_C = \int f(x, y, z)dy \quad z_C = \int f(x, y, z)dz\ ,$$

параметры тензора инерции (J):

$$(J) \equiv \begin{Bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{Bmatrix},$$

где $J_{xx} = \int(y^2 + z^2)$, $J_{yy} = \int(z^2 + x^2)$, $J_{zz} = \int(x^2 + y^2)$, $J_{xy} = \int xy$, $J_{yz} = \int yz$, $J_{zx} = \int zx$.

В современных CAD-системах производится расчёт всех геометрических параметров и геометрии масс детали (рис. 8).

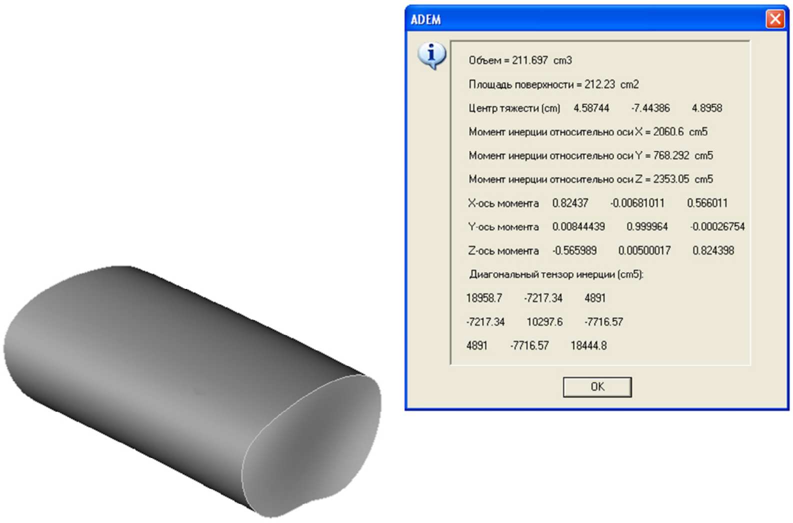


Рис. 8. Результат одной детерминированной точной модели сборки реальной детали из реальных поверхностей

Линии пересечения поверхностей могут быть дополненными фасками и скруглениями, и параметры объёма, площади поверхности и тензора инерции могут быть уточнены.

На этом завершается формирование детерминированной модели детали с реальными поверхностями.

Вероятностная модель детали

Процесс изготовления деталей со случайными поверхностями носит случайный (вероятностный) характер, обусловленный множеством случайных событий, который можно рассматривать как случайное событие.

Всю рассматриваемую совокупность деталей партии можно анализировать на основе обработки результатов моделирования их случайных реализаций по параметрам *детерминированной модели.* Каждую реализацию геометрии детали, в свою очередь, можно рассматривать как совокупность реализаций их реальных поверхностей. Поэтому начнём с формирования реальной поверхности.

Повторяя предложенную процедуру для всех поверхностей, продляя и пересекая поверхности, получим случайную **реализацию всех реальных поверхностей детали в системе координат базы**.

Аппарат моделирования вероятностных оценок – метод Монте-Карло

Ме́тод Мо́нте-Ка́рло (методы Монте-Карло, ММК) – общее название группы численных методов, основанных на получении большого числа реализаций стохастического (случайного) процесса, который формируется таким образом, чтобы его вероятностные характеристики совпадали с аналогичными величинами решаемой задачи.

Проблемы метода Монте-Карло:

1. Выбор законов распределения входных параметров, исходя из имеющейся исходной информации.
2. Определение необходимого и достаточного числа реализаций, обеспечивающих требуемую доверительную вероятность интервала распределения выходных параметров с достаточной статистической надежностью.

Выбор законов распределения для моделирования

Все множество параметров и видов полей допусков на параметры деталей можно условно разделить на две группы:

– параметры, номинальное значение которых $x_{\text{ном}} \neq 0$ может находиться на неограниченном интервале $-\infty < x_{\text{ном}} < +\infty$, а действительное значение параметра x – на интервале, ограниченном границами поля допуска $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ (таких большинство);

– параметры, номинальное значение которых $x_{\text{ном}} = 0$, а действительное значение параметра x – на интервале, ограниченном границами поля допуска $0 \leq x \leq x_{max}$ (таких много меньше).

Суждение о действительном значении параметра объекта производства в технологическом процессе является результатом взаимодействия погрешности формирования параметра и погрешности измерения сформированного параметра.

Таким образом, при оценке действительного значения параметра и положения его значения относительно границ поля допуска имеется неопределенность, обусловленная случайным характером как погрешности формирования параметра, так и погрешности его измерения.

Согласно К. Шеннону [3] мерой неопределенности ситуации, описываемой случайной величиной x, является энтропия

$$H = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \ln p(x) dx,$$

являющаяся функционалом дифференциальной функции распределения $p(x)$ случайной величины x. Количественной мерой энтропии является информационная неопределенность, характеризуемая величиной интервала, соответствующего заданной доверительной вероятности $P_{\text{д}}$.

В реальной жизни ни один из законов распределения погрешностей формирования параметров и измерения не выполняется. Однако некоторая часть из них имеет большой практический интерес.

Этот интерес сводится к следующему.

Допустим, что случайная величина изменяется на некотором ограниченном или неограниченном интервале по закону распределения, параметры которого неизвестны. Каким должен быть закон с известными статистическими параметрами[4], имеющий те же границы, математическое ожидание или дисперсию, чтобы интервал, соответствующий заданной вероятности P, был наибольшим из всех возможных?

Если такой закон использовать при оценках практических интервалов рассеяния реальных распределений, имеющих те же границы, математическое ожидание или дисперсию, что и у закона распределения, используемого вместо реального, то интервал рассеяния реального закона при тех же значениях вероятности P меньше, чем заданная величина и будет находиться внутри *практического интервала рассеяния модельного закона*, используемого вместо реального.

Следовательно, при любых реальных законах распределений, имеющих те же границы изменения, математическое ожидание или дисперсию, оценка интервала, соответствующего доверительной вероятности $P_{\text{д}}$ модельного распределения, используемого вместо реального распределения, будет наибольшей (то есть вероятностной «оценкой сверху»). При тех же значениях доверительной вероятности $P_{\text{д}}$ практический интервал рассеивания реального закона распределения не выйдет за пределы практического интервала рассеивания модельного закона, используемого вместо реального.

Можно предположить, что любой процесс формирования или измерения параметров складывается таким образом, что неопределенность результата того и другого оказывается наибольшей в некоторых пределах, определяемых допускаемыми значениями интервала погрешности, соответствующей доверительной вероятности $P_{\text{д}}$. Поэтому наиболее предпочтительными для оценок информаци-

[4] К статистическим параметрам относят *размах вариационного ряда, центр группирования вариационного ряда – математическое ожидание, центральный момент второго порядка – дисперсию*

онной неопределенности вне связи с действительным характером (законом) распределения погрешности формирования или измерения должны быть такие распределения p(x), при которых энтропия обращается в максимум.

В ряде теорем теории информации [3] К. Шеннон доказал следующие фундаментальные утверждения:

- если энтропия непрерывного процесса со случайной координатой, принимающей значения только на заданном отрезке [a, b], то интервал, соответствующий заданной доверительной вероятности $P_д$, максимален при равномерной (равновероятной) плотности распределения;
- в случае, когда известна дисперсия D_x случайной координаты непрерывного процесса, то интервал, соответствующий заданной доверительной вероятности $P_д$, максимален при нормальном законе распределения с той же дисперсией;
- для существенно положительных величин с заданным средним (математическим ожиданием μ_x), интервал, соответствующий заданной доверительной вероятности $P_д$, максимален при экспоненциальном законе распределения.

Отсюда следуют важные для практических расчетов рекомендации.

Если известно, что рассеяние параметра не выходит за пределы отрезка [a, b], то независимо от действительного характера его распределения на этом отрезке максимальная неопределенность и, соответственно, практический интервал рассеяния, соответствующий доверительной вероятности Рд, будут наибольшими при равновероятном законе. Иными словами, если на этом интервале параметр распределен по любому закону, отличному от равновероятного, доверительные интервалы рассеяния его, соответствующие вероятности $P_д$, находятся внутри доверительного интервала равновероятного распределения.

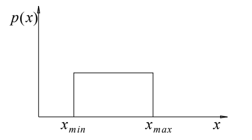
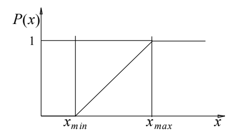
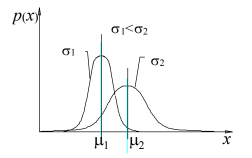
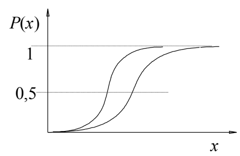
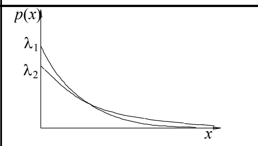
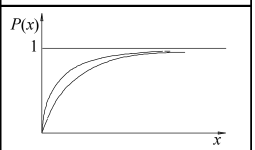
В случае, когда известны дисперсия D_x параметра, функция распределения вероятностей p(x) изменяется на неограниченном интервале ($-\infty < x < +\infty$), доверительный интервал рассеяния его при той же доверительной вероятности $P_д$ будет наибольшим, если параметр распределен по нормальному закону с дисперсией D_x. Интервалы рассеяния других распределений, имеющих то же значение D_x, при той же вероятности $P_д$ находятся внутри доверительного интервала нормального распределения.

Наконец, если параметр существенно положителен, функция распределения вероятностей p(x) изменяется на неограниченном интервале ($0 < x < +\infty$), то при одном и том же математическом ожидании Mx и доверительной вероятности $P_д$ доверительный интервал на экспоненциальном законе будет охватывать аналогичные интервалы любых других распределений на неограниченном интервале ($0 < x < +\infty$).

Таким образом, параметры статистики размах R, дисперсия D и математическое ожидание M_x непосредственно связаны с законами распределения для оценок «сверху» интервалов рассеяния, соответствующих заданной доверительной вероятности.

В таблице 1 приведены формулы плотности распределения p(x) и вероятности P(x) для перечисленных законов, а также графическое отображение зависимостей p(x) и P(x).

Таблица 1.

Закон	$p(x)$	$P(x)$
Равновероятный $p(x) = \begin{cases} 1/(x_{max}-x_{min}) & \text{при } x_{min} \le x \le x_{max} \\ 0 & \text{при } x < x_{min} \\ 0 & \text{при } x > x_{max} \end{cases}$ $P(x) = (x - x_{min})/(x_{max} - x_{min})$		
Нормальный Гаусса $p(x) = e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} / \sigma\sqrt{2\pi}$ $P(x) = \Phi(\frac{x-\bar{x}}{\sigma})$		
Экспоненнциальный $p(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$ $P(x) = e^{-\lambda x} = e^{-x/\bar{x}}$		

Определение количества реализаций

Определение границ доверительного интервала рассеивания выходного параметра при статистическом моделировании наиболее эффективно определить с помощью ***непараметрических толерантных интервалов*** [4, 5].

Минимальные объемы выборок N в зависимости от значений доверительного интервала $P_{\text{д}}$ при статистической надежности γ для двухсторонних непараметрических толерантных интервалов определяют из неравенства

$$N P_{\text{д}}^{(N-1)} - (N-1)\, P_{\text{д}}^{N} < 1 - \gamma\ .$$

Для односторонних непараметрических толерантных границ наименьшие целые значения N должны удовлетворять неравенству

$$P_{\text{д}}^{N} < 1 - \gamma\ .$$

Приведенные неравенства однозначно связывают границы интервала распределения выходного параметра с характером их распределения и тремя параметрами $P_{\text{д}}$, γ и N для любого закона распределения.

Интервал ΔYj значений (Y_j min, Y_j max), полученный в процессе стохастического моделирования, соответствует заданной доверительной вероятности $P_{\text{д}}$ со статистической надежностью γ.

Количество реализаций N для определения доверительных границ непараметрических толерантных интервалов при различных сочетаниях значений $P_{\text{д}}$ и γ представлены в таблице 2.

Таблица 2.

	Двухсторонний непараметрический интервал				Односторонний непараметрический интервал			
P \ γ	0,9	0,95	0,99	0,9973	0,9	0,95	0,99	0,9973
0,75	13	18	24	29	9	11	17	21
0,8	18	22	31	37	11	14	21	27
0,9	38	46	64	78	22	29	44	57
0,95	77	93	130	159	45	55	90	116
0,99	388	473	662	809	230	299	459	589
0,9973	1140	1756	2456	3006	852	1109	1704	2188

Многократно повторяя случайный выбор параметров модели в интервалах их распределений, получим статистический ряд случайных реализаций деталей, поверхности которых сформированы в выбранной технологии.

Обрабатывая полученную в результате моделирования статистику, получим оценку геометрических параметров, в пределах которых находятся (определяются) взаимное расположение и отклонения формы реальных сопрягаемых поверхностей детали с отклонениями формы реальных поверхностей, положение центра масс, массы и параметры тензора инерции в системе координат детали.

Полученная статистика может служить основой для обоснования выбора допусков на геометрические параметры деталей и технологии формирования реальных поверхностей детали разными технологическими методами.

Выводы

1. Разработаны схемы алгоритмов детерминированных моделей формирования реальной поверхности и детали, учитывающие геометрические параметры формирования реальных поверхностей детали применяемыми технологическими методами. Показано, что формирование детерминированной модели реальной геометрии детали наиболее целесообразно производить сборкой реальных поверхностей (surface методом), учитывающим погрешности их расположения в системе координат базы и технологию формирования каждой поверхности. Такой подход обеспечивает не только геометрические параметры смоделированных деталей, но и геометрию масс каждой из них.

2. Показано, что для вероятностной модели детали наилучшим методом является стохастическое моделирование методом Монте-Карло. Для него определены законы генерирования случайных величин параметров детерминированной модели на основании теорем К. Шеннона, обеспечивающих «оценку сверху» – наибольший интервал рассеяния выходных параметров детали по известным статистическим экспериментальным данным (размах, дисперсия, математическое ожидание). На основании непараметрических толерантных интервалах определено количество реализаций стохастического моделирования, обеспечивающее заданную доверительную вероятность и статистическую надёжность результата моделирования.

Список литературы

1. Кашуба Л.А. Представление геометрии поверхностей изделий машиностроения // Системный анализ в науке и образовании: электрон. науч. журнал. – Дубна, 20011. – №1. – [Электронный ресурс]. URL: http:/www.sanse.ru/archive/19. – 0421100111\0004.
2. ГОСТ 24642-81 Допуски формы и расположения поверхностей.
3. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. – С. 830.
4. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М.: Наука, 1969. – С. 512.
5. Мюллер П., Нойман П., Шторм Р. Таблицы по математической статистике / Пер. с нем. – М.: Финансы и статистика, 1982. – С. 278.