

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ИЗДЕЛИЙ МАШИНОСТРОЕНИЯ

Кашуба Леонид Анатольевич

*Кандидат технических наук, доцент Института системного анализа и управления;
ГООУ ВПО «Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,
Институт системного анализа и управления;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: leonid-ak@mail.ru.*

В работе представлено описание способа определения параметров отклонения формы и расположения реальной геометрии поверхностей деталей машин в системе координат системы измерения от номинальной геометрии детали в системе координат проекта по результатам измерения точек реальных поверхностей деталей машин с помощью координатно-измерительных машин. Определены основные параметры погрешностей формы и расположения поверхностей детали по данным измерения и номинальной геометрии проекта детали.

Ключевые слова: номинальная геометрия детали в проекте, реальная геометрия детали, отклонения формы реальных поверхностей детали от номинальной формы, отклонения расположения реальных поверхностей детали от их номинального расположения в номинальной геометрии детали, погрешности формы и расположения реальных поверхностей детали.

REPRESENTATION OF GEOMETRICAL SURFACES IN MECHANICAL ENGINEERING PRODUCTS

Kashuba Leonid

*Candidate of Science in Engineering, associate professor;
Dubna International University of Nature, Society and Man,
Institute of system analysis and management;
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;
e-mail: leonid-ak@mail.ru.*

In the following paper, there is a description of a way of determining of parameters of deviation of form and location of actual geometry of surfaces of parts of machines in the system of coordinates for measuring using the results of measuring of points of actual surfaces of parts of machines using machines for coordinate measurements.

Keywords: nominal geometry of detail in a project, actual geometry of detail, deviation detail's actual surface-nominal form, deviation detail's actual surface positions-nominal position in nominal geometry, errors of form and location of the actual surfaces of detail.

Введение

Нормативная база представления геометрии изделий¹ в проектной конструкторской и технологической документации, изложенная в действующих основополагающих стандартах ГОСТ 24642-81 Допуски формы и расположения поверхностей, ГОСТ 25142-82 Шероховатость поверхности, ГОСТ 21495-76 Базирование и базы в машиностроении, отстала от требований времени.

Здесь перечислен ряд действующих нормативных документов, определяющих основные понятия, связанные с совокупностью перечисленных вопросов. Каждый из них в отдельности при прочтении сразу не вызывает возражений, однако при рассмотрении их совместно возникает сомнение в их согласованности.

После внимательного (не постраничного, поабзачного, пословного, а побуквенного) прочтения перечисленных документов возникает ряд вопросов.

1. Как человеку представить в своём сознании геометрию поверхностей, ограничивающих окружающие людей тела материального мира? Этим занялась «Её величество» математика.
2. Как измерить все понятия, связанные с геометрией поверхностей, сформированные математикой? Этим занимается метрология.
3. Как отобразить представленную в сознании человека геометрию поверхностей в виде геометрических образов на твердом носителе графической информации (от плоских каменных плит до листов бумаги) и в форме трехмерных виртуальных наблюдаемых образов? Этим занималась и занимается инженерия.
4. Как согласовать абстрактное представление о геометрии поверхностей, представленных в сознании человека, проектирующего облик изделия и представляющего результаты проектирования в виде абстрактных геометрических образов с реальностью, получаемой при изготовлении этих же поверхностей? Этим занимается технология.
5. Как все эти представления о геометрии активно использовать при проектировании облика изделия и технологии его производства? Этим занимаются системы поддержки проектирования в САПР средствами *IT* технологий.
6. Как согласовать и гармонизировать все проблемы представления, измерения, отображения и моделирования геометрии изделий? Этим должна заниматься стандартизация, создавая нормативную базу.

Об этих насущных вопросах думали издавна (еще от Аристотеля и даже намного раньше) многие поколения великих ученых и великих инженеров. На определенных этапах развития общества (культуры, науки) заинтересованные люди устанавливали некоторые правила, оформленные в виде нормативных документов (стандартов).

Какие причины пробелов и недостатков в существующих нормативных документах?

1. Более чем двухвековые (от идей Монжа²) усилия поколений инженеров были связаны с проекционным представлением на плоскости линий пересечения поверхностей, ограничивающих объемы тел. Поверхность могла быть представлена только набором её сечений плоскостями, параллельными одной из плоскостей проекций или расположенными определенным образом в пространстве в соответствии с проекциями указаний на вид этой плоскости сечения по стрелке, привязанной к плоскостям проекций. Это затрудняло представить абстрактный образ поверхности в пространстве без её физического построения в виде макета, эталона или так называемых «калибра и контркалибра поверхности» [1, 2].
2. Отсутствие приемлемого математического аппарата представления геометрии сложных поверхностей и вычислительных средств, позволяющих проводить оперативное изменение форм и размеров поверхности при её проектировании.

¹Изделие – единица промышленной продукции, количество которой может исчисляться в штуках (экземплярах). К изделиям относят детали, комплекты, сборочные единицы, комплексы см. ГОСТ 2.102-68(1995).

²Монж, (Monge), Гаспар, 1746—1818, – франц. геометр, творец начертательной геометрии. 1780 член парижской академии; участник комиссии установления метрической системы мер и весов. 1792 морской министр, 1798 участвует в египетской экспедиции Бонапарта; основные труды «Traite de Statique» (1788), «Geometrie descriptive» (1795).

3. Метрология, связанная с несовершенством «двухточечных» средств измерения, основанная на весьма трудоёмком измерении расстояний (координат) до характерных точек поверхности и углов между направлениями к ним в выбранной системе координат³.
4. Человеческий страх перед сложностью представления и вычисления элементарных понятий, связанных с геометрией поверхностей.
5. Нежелание (лень) напрягаться для освоения и использования новых представлений (абстракций) для использования в своей практической деятельности (хлеб и зрелища вместо упорного труда).

А что нового появилось за последние годы после утверждения перечисленных стандартов?

Во-первых, появилась и быстро развилась компьютерная трёхмерная (3D), нашедшая широкое техническое и технологическое применение.

Во-вторых, существенно изменилась техническая метрология. Вместо двухточечных измерений с помощью простейших средств однокоординатных линейных и угловых измерений (штангенциркуль, микрометр, квадрант) стали стремительно развиваться трехкоординатные (пространственные) измерения координат точек реальных поверхностей в системах координат системы измерения координатно-измерительных машин (КИМ).

А что может сегодня компьютерная графика? Оперировать с поверхностями номинальной формы или, что не лучше, твердотельными (Solid) моделями, которые не позволяют представить и моделировать объемы реальных тел и сопряжение деталей с реальными сопрягаемыми поверхностями, имеющими, в отличие от номинальных поверхностей, отклонения формы и расположения.

А что могут сделать КИМ с «облаками измеренных точек» каждой поверхности? Ведь нужно по утвержденным в нормативной документации правилам определить номинальные значения тех параметров, которые определяют форму и положение номинальных поверхностей детали, заложенные в конструкторской документации, и сопоставить их с диапазоном допустимых отклонений.

А по каким правилам? По правилам, отражающим примитивное представление о геометрии простых контуров сечений (прямая линия и круг) и простых деталей, ограниченных плоскими и цилиндрическими поверхностями, связанными со способами двухточечного измерения их простейшими средствами технической метрологии, основанных на существующей нормативной документации. Всё остальное множество контуров сечений и поверхностей не охвачено нормативной документацией.

Если разработать систему правил отображения реальной геометрии с широким использованием возможностей и средств современной математики и компьютерной графики, то можно перейти к моделированию геометрических параметров технических изделий. Опираясь на технологию формирования отклонений формы поверхностей и исходные данные для формирования допусков, которые, в свою очередь, обеспечивают требуемое качество продукции при оптимальных затратах основных ресурсов (времени, трудоемкости и стоимости), можно перейти от гадания (угадывания) к неограниченному и всестороннему моделированию реальной геометрии элементов конструкции.

Подводя итоги к проведенному анализу достоинств и недостатков существующих (действующих) основополагающих стандартов, связанных с основными понятиями о геометрии изделий, можно поставить следующие задачи:

- ввести в терминологию представления геометрии фундаментальные, проигнорированные и забытые понятия о системах координат, в которых представляется как плоская геометрия сечений поверхностей плоскостями различного направления, так и пространственная геометрия множества поверхностей;
- провести поиск строгих определений терминов, не вошедших в список общих терминов и определений стандарта ГОСТ 24642-81;
- дополнить этот список новыми терминами и определениями, исключив противоречия, возникшие при анализе этого стандарта, согласовав с терминами стандартов ГОСТ 25142-82 и ГОСТ 21495-76;

³ *Выбранная система координат* – система координат, в которой определяют координаты всех точек поверхностей, ограничивающих объем элементов конструкции. Такими системами координат являются системы координат элементов конструкции и изделия в целом, системы координат измерения при контроле геометрических параметров и параметров геометрии масс, системы координат движения инструментов при осуществлении технологических процессов и т. п.

- разработать предложения по изменению стандартов, связанных с представлениями о номинальной и реальной геометрии изделий, согласовав их друг с другом.

Это и есть задачи науки о геометрии реальных поверхностей изделий и их отображении при проектировании облика геометрии поверхностей изделий и контроле их геометрии после изготовления.

Выбор отсчётных элементов должен осуществляться в соответствии со следующими принципами:

- он должен быть пригодным для элементов (линий, поверхностей) любой формы и величины;
- расположение отсчётных элементов по отношению к их реальному положению должно определяться по одинаковому для всех элементов алгоритму;
- суждение о величине, форме и положении реальных элементов формируется по результатам измерения в системе координат системы измерения;
- погрешности формы и расположения элементов формируются по сравнению с их номинальной величиной и относительным (номинальным) расположением в технической документации.

Таким образом, **актуальность предстоящей работы** состоит *в обосновании и применении для формирования моделей представления геометрии в технических приложениях более адекватного выбора элементов, отображающих номинальные и реальные поверхности и профили их сечений, позволяющих построить математические модели реальных объемов деталей и сопряжения (сборки) их друг с другом.*

Попытаемся навести элементарный порядок в терминах и определении основных понятий, относящихся к геометрии объектов производства – изделий, который не был обеспечен в действующих нормативных документах.

Итак, предметом исследования является геометрия детали.

Деталь – тело, ограниченное от окружающей среды поверхностями. Поверхности детали пересекаются или сопрягаются по рёбрам или линиям сопряжения. В местах одновременного пересечения более чем двух поверхностей, а также двух линий сопряжений между ними образуются точки пересечения.

Понятия, связанные с геометрией деталей

К числу понятий и определений, которые не противоречат современным представлениям о геометрии деталей, в качестве справочного материала для дальнейшего понимания содержания статьи следует отнести следующий ряд терминов, позаимствованных из непрерывно обновляющегося и освежающегося источника информации в Интернете – свободной энциклопедии «Википедия».

Поверхность – традиционное название для двумерного многообразия в пространстве. Поверхность имеет площадь, но не имеет толщины.

Поверхности в пространстве могут быть представлены в виде одинаковых по виду функций:

$$F = (x, y, z). \quad (1)$$

Если функция $F = (x, y, z)$ непрерывна в некоторой точке и имеет в ней непрерывные частные производные, по крайней мере, одна из которых не обращается в нуль, то в окрестности этой точки поверхность, заданная уравнением (1), будет *правильной поверхностью*.

Помимо указанного выше неявного способа задания поверхность может быть определена явно, если одну из переменных, например z , можно выразить через остальные:

$$z = f(x, y). \quad (1')$$

Существует и параметрический способ задания двумерного многообразия. В этом случае поверхность определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (2)$$

В машиностроении поверхность является первичным элементом конструкции любой машины. Поверхности ограничивают объем изделий, по поверхностям осуществляется сборка, поверхности машин соприкасаются друг с другом и взаимодействуют с окружающей средой.

Линия – геометрическое понятие, определяемое в разных разделах геометрии различно.

В элементарной геометрии понятие кривой не получает отчётливой формулировки и иногда определяется как «длина без ширины» или как «граница фигуры». В элементарной геометрии нет определения понятия «прямая линия».

Линия на плоскости определяется как множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x,y)=0$.

Линия в пространстве может быть представлена в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Дифференциальная геометрия занимается исследованием гладких пространственных и плоских кривых в евклидовом пространстве аналитическими методами.

Наиболее общий способ задать уравнение *пространственной кривой* параметрический:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t),$$

где $x(t), y(t), z(t)$ – гладкие функции параметра t , причем $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 > 0$ (условие регулярности).

Точка – одно из фундаментальных понятий геометрии. В Евклидовой геометрии «точка» не имеет определения. Есть, правда, шутовское определение, данное учителями математики дореволюционных гимназий: *точка есть то, часть чего есть ничего*. Тем не менее, понятие *точка* является родительницей понятий *линия* и *поверхность*.

Обобщающие термины, уменьшающие количество слов в изложении содержания работы:

- **элемент** (для поверхности, линии, точки),
- **профиль** (для сечений поверхности).

Координаты точек номинальных элементов (линий, образующих поверхностей), представленных одним из описанных выше способов, можно задать и определить с любой степенью точности в *системах координат элемента*.

Понятие **форма элемента** во всех рассмотренных стандартах осталось открытым.

Координаты непрерывного множества точек элемента (линии или поверхности) в выбранной системе координат задают его форму, характеризуемую направлением *нормали*⁴ к элементу в каждой его точке и его *кривизной*⁵. У подавляющего большинства плоских профилей сечений поверхностей и поверхностей деталей современных машин кривизна профиля отлична от нуля. Только у прямой линии и плоскости она равна нулю.

Профиль реального контура подавляющего большинства сечений можно представить как сумму бесконечно большого числа гармоник, имеющих разные амплитуды и фазы (интегралом Фурье для непериодических функций или рядом Фурье для периодических). Наиболее компактным обобщением представления формы реального контура сечения является амплитудно-фазо-частотные характеристики (АФЧХ). Его же можно представить непрерывной линией или рядом дискретных значений координат точек этого профиля. В зависимости от требуемой точности восстановления контура по теореме Котельникова [9] можно определить шаг дискретизации Δx , выбрав наибольшую (верхнюю) частоту гармоник из спектра частот для непериодических функций или верхнюю гармонику для периодических. Для выбранной гармоники число дискретных значений на каждом периоде верхней гармоники должно быть более двух.

⁴ Нормаль - прямая, ортогональная (перпендикулярная) касательной прямой к некоторой кривой или касательной плоскости к некоторой поверхности.

⁵ Кривизна - собирательное название ряда количественных характеристик (скалярных, векторных, тензорных), описывающих отклонение того или иного геометрического «объекта» (кривой, поверхности, риманова пространства и т. д.) от соответствующих «плоских» объектов (прямая, плоскость, евклидово пространство и т. д.).

При параметрическом описании любой искривлённой поверхности каждая из функций u или v параметрического представления поверхности могут быть также представлены интегралом Фурье для непериодических функций или рядом Фурье для периодических и также дискретизированы по теореме Котельникова и восстановлены в зависимости от требуемой точности. Исключение представляет только поверхность плоской формы – плоскость, не имеющая кривизны.

Координаты множества точек номинального элемента определяют его **величину**, ошибочно заменяемую понятием **размер**.

Определение понятия *размера* впервые дано в стандарте ГОСТ 25346-89. По этому стандарту **размер** – числовое значение линейной величины (диаметра, длины, угла и т.п. геометрических параметров) в выбранных единицах измерения. Такое определение не полностью соответствует понимаемому по умолчанию термину **величина элемента**, подменяя или заменяя его понятием **размер параметра элемента**.

Все элементы на ранних этапах проектирования изделия⁶ имеют **номинальную величину**.

Представление геометрии номинальных элементов

Формулировка определения понятий терминов *форма элемента*, *величина элемента* представляется весьма дискуссионными, и пытаться осуществить её в рамках данной работы не целесообразно.

Возникла мысль объединить термины *форма* и *величина* (не путать с понятием *размер*) объединяющим их термином **номинальная геометрия элемента в номинальной системе координат элемента**.

Номинальная система координат элемента – система координат, в которой уравнение каждого элемента поверхности имеет наиболее простую форму и/или наиболее просто может быть изображено на плоскости или представлено в пространстве.

Номинальная геометрия элемента (для всех перечисленных выше элементов) – геометрия элемента, которая задана чертежом или другими техническими документами без учета допускаемых отклонений формы (неровностей) и положения относительно *номинальной системы координат*. В ней номинальные координаты точек абстрактных элементов (линий, поверхностей), представленных одним из описанных выше способов, можно задать и определить с любой степенью точности.

Исходной системой координат, используемой при проектировании объектов из совокупности линий, расположенных определенным образом на плоскости, или поверхностей и линий на плоскости или в пространстве, должна быть двухмерная (2D) или трехмерная (3D) **система координат проекта**, соответственно, O_0, X_0, Y_0 (для 2D) или O_0, X_0, Y_0, Z_0 (для 3D).

Система координат проекта – система координат, в которой представляют *номинальные системы координат элементов с их номинальной геометрией*.

Положение *номинальной системы координат элемента в системе координат проекта* определяет **номинальное расположение элемента** в проектной конструкторской документации. Положение номинальной системы координат элемента может быть произвольным в системе координат проекта.

В *номинальной системе координат элемента* элемент задают *номинальной геометрией* с соответствующими размерами параметров *величины, формы и расположения*. Основная масса прочностных, тепловых, аэрогидродинамических расчетов проводится по номинальной геометрии поверхностей, ограничивающих объемы тела деталей и сборочных единиц. На основании результатов этих расчетов формируется номинальная геометрия, расположенная в *номинальной системе координат элемента*.

На ранних этапах и стадиях проектирования геометрического облика изделий на плоских чертежах (в 2D) конструктор оперирует абстрактными образами – *номинальными плоскими контурами (профилями) проекций сечений различной номинальной геометрии*.

⁶ Ранние этапы проектирования – этапы технического предложения (ПТ) и эскизного проекта (ЭП), на которых формируется облик номинальной геометрии поверхностей изделия.

Например, уравнение контуров сечений, обладающих кривизной, в *номинальной системе координат* задаётся следующим образом: для круга (рис. 1); для эллипса (рис. 2);

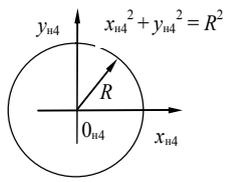


Рис. 1

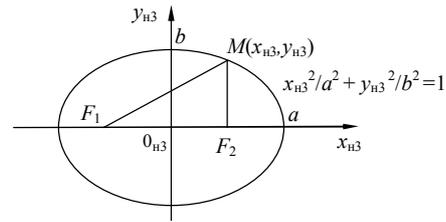


Рис. 2

для параболы (рис. 3); для произвольной функции вида $y = f(x)$ (рис. 4).

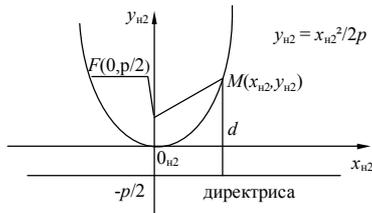


Рис. 3

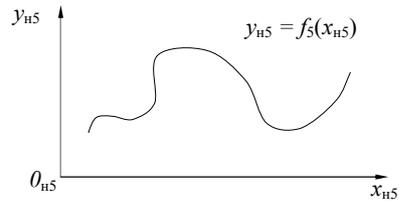


Рис. 4

Уравнение прямой, не имеющей кривизны, представлено на рис. 5.

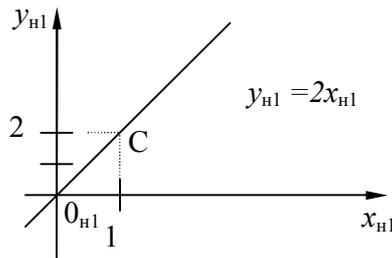


Рис. 5

Номинальную геометрию каждой проекции или профиля сечения можно представить совокупностью номинальных профилей, состоящих, например, из прямых линий, парабол, эллипсов, кругов и т. п. профилей, а также произвольных функций вида $y = f(x)$ в *номинальной системе координат элементов*, расположенных в *системе координат проекта* произвольным образом (см. рис. 6).

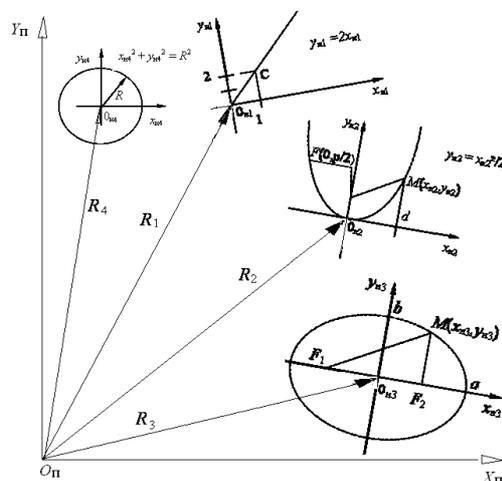


Рис. 6

На рис. 6 представлено задание формы и положения номинальных профилей проекций в **системе координат проекта** X_n, O_n, Y_n , уравнения которых представлены в выбранных **номинальных системах координат** $X_{n1}, O_{n1}, Y_{n1}, X_{n2}, O_{n2}, Y_{n2}, X_{n3}, O_{n3}, Y_{n3}$ и X_{n4}, O_{n4}, Y_{n4}

Каждый i -й профиль (здесь i – номер профиля) в каждой из выбранных систем координат, задается уравнением $F_{ni} = (x_{ni}, y_{ni})$ или $y_{ni} = f(x_{ni})$ в каждой i -й **номинальной системе координат**. Такое представление **номинальных профилей проекций и сечений в номинальной системе координат элемента** снимает неопределенность понятий **номинальной формы** и **номинальной величины** контуров для любых контуров.

А как определить взаимное расположение номинальных элементов в системе координат проекта?

В стандарте ГОСТ 24612-81 есть определение номинального расположения элементов как расположение рассматриваемого элемента, определяемое номинальными линейными и угловыми размерами между рассматриваемыми элементами или между ним и базами **без указания системы координат**. Способ определения взаимного расположения элементов и системы координат, в которых представлено положение элементов, не рассматривается.

Взаимное расположение номинальных элементов в системе координат проекта однозначно определено относительным расположением номинальных систем координат номинальной геометрии. Положение каждой **номинальной системы координат элемента в системе координат проекта** определяется вектором R_i положения начала **номинальной системы координат элемента** и матрицей A_i поворота направляющих косинусов её осей.

Рассмотрим простую задачу для плоского (2D) случая с двумя дугами, каждая из которых задана в **номинальной системе координат элемента** и обе заданы в **системе координат проекта** (рис. 7).

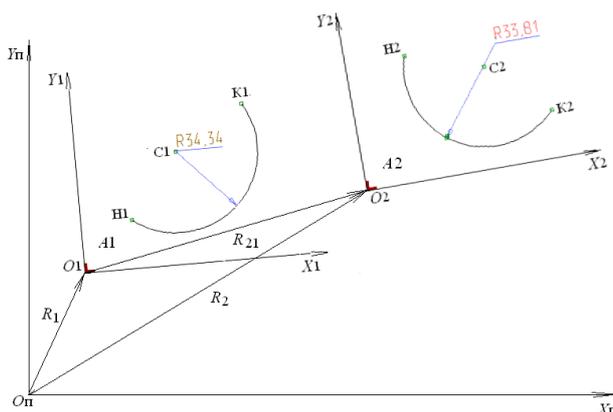


Рис. 7

Дуга радиуса $R=34,34$ задана в номинальной системе координат первого элемента X_1, O_1, Y_1 , дуга радиуса $R=33,81$ задана в номинальной системе координат второго элемента X_2, O_2, Y_2 и обе системы координат с элементами заданы в системе координат проекта X_n, O_n, Y_n .

Координаты точек номинальных элементов, заданных в **номинальных системах координат** каждого элемента X_i, O_i, Y_i , могут быть легко пересчитаны в **систему координат проекта** X_n, O_n, Y_n . По известным соотношениям линейной алгебры с помощью векторов R_i положения начал выбранных номинальных систем координат поверхностей и матриц направляющих коэффициентов A_i положения этих осей в исходной системе координат проекта X_n, O_n, Y_n определяются координаты всех точек номинальных элементов. По этим же соотношениям линейной алгебры, если известны положения систем координат элементов, задаваемые, соответственно, векторами R_1 и R_2 , а также матрицами поворота A_1 и A_2 , то координаты точек $N1, N2$ и $K1, K2$ будут определены как в системе координат проекта, так и в системе координат одного из элементов, например, X_1, O_1, Y_1 , называемого **базой**.

Базой будем в дальнейшем называть элемент, система координат которого используется для определения расположения всех остальных элементов детали. Систему координат, связанную с базой, назовём **базовой системой координат** X_b, O_b, Y_b .

Взаимное расположение номинальных систем координат элементов в системе координат проекта, как и в системе координат базы, однозначно определяет взаимное расположение элементов.

Положение начала номинальной системы координат X_2, O_2, Y_2 элемента R_6 и матрицы A_6 направляющих коэффициентов может быть однозначно определено в базовой системе $X_6 O_6 Y_6$, если их относительные положения в системе координат проекта (рис. 8).

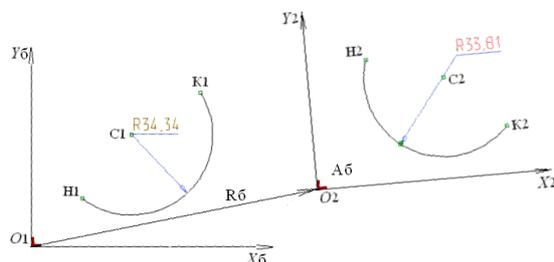


Рис. 8

Параметрами взаимного расположения являются координаты положений начал систем координат элементов R_i, R_{6i} и угловое положение, определяемое матрицами направляющих косинусов систем координат элементов A_i, A_{6i} в соответствующих системах координат X_{ii}, O_{ii}, Y_{ii} или X_6, O_6, Y_6 .

Следует заметить, что параллельный перенос начал в номинальных системах координат элементов не влияет на угловое положение (матрицу направляющих косинусов систем координат элементов) как в системе координат проекта, так и в системе координат базы.

Эти же соображения могут быть перенесены на пространственный (3D) случай (рис. 9).

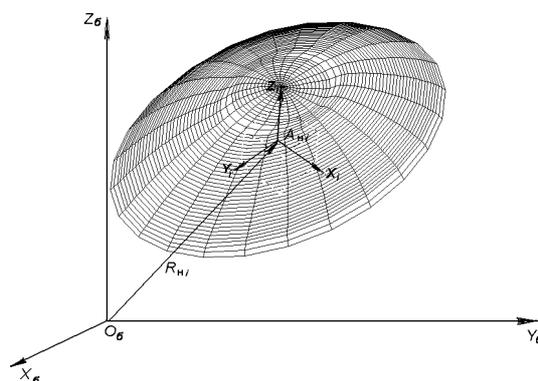


Рис. 9. Определение положения номинальной системы координат i -го элемента относительно базовой системы координат O_6, X_6, Y_6, Z_6

На рис. 11 представлен каркас u и v линий выпуклой поверхности, имеющей разные выпуклости вдоль осей X_i и Y_i и начало номинальной системы координат в точке O_i . По отношению к базовой системе координат $O_6 X_6 Y_6 Z_6$ она расположена на расстоянии R_{ni} и оси её номинальной системы координат развёрнуты в соответствии с матрицей направляющих косинусов A_{ni} .

Этим завершается раздел, посвящённый **номинальной геометрии изделий в системе координат проекта и номинальной базовой системе координат**.

Представление реальных элементов в конструкторской и технологической документации

Информацию о реальной геометрии можно получить только измерением координат точек реальных элементов в **системе координат системы измерения**. Это можно осуществить с помощью координатно-измерительных машин (КИМ) как на плоскости, так и в пространстве.

Геометрия измеренных элементов отличается от номинальной геометрии.

Что выбрать за меру отличия реальной геометрии от номинальной? От какого элемента и как следует осуществлять отсчет отклонений формы? Как определить отличие положения реального элемента от его номинального расположения?

Отклонение формы элемента в стандарте ГОСТ 24642-81 определяется как *наибольшее отклонение точек геометрии реального элемента от геометрии номинального, определяемое по нормали к номинальному элементу в пределах нормируемого участка.*

Более целесообразно в определении отклонения формы обобщить это понятие, исключив из него слово *наибольшее*.

Отклонение формы реального элемента определяется как *отклонение точек реальной геометрии элемента от номинальной геометрии, определяемое по нормали к номинальному элементу в пределах нормируемого участка.*

Реальная геометрия элемента может быть как больше, так и меньше номинальной геометрии. Интервалы (допуски) отклонения формы, за пределы которых не должна выходить реальная форма поверхности, ограничивают отклонения реальной геометрии. Для определения отклонений формы остаётся только один вариант – *номинальный элемент* или *номинальная геометрия элемента в номинальной системе координат*, что полностью по смыслу соответствует стандарту.

Возникает проблема: как определить расположение *номинальной системы координат с номинальным элементом* в системе координат системы измерения для определения отклонения формы реального элемента?

Отклонение расположения реального элемента по отношению к базе определяется по отличию расположения номинальных систем координат номинальных элементов при определении отклонения формы реальных элементов (реального элемента и базы) в системе координат системы измерения от их расположения в исходной системе координат проекта.

Представление реальных элементов детали на плоскости проекций

В стандарте ГОСТ 24642-81 предлагаются следующие варианты для выбора *отсчётного элемента*, используемого для определения отклонений формы и расположения реального элемента *в системе координат системы измерения*:

- **прилегающий элемент** – элемент, имеющий форму номинального, соприкасающийся с реальным и расположенный вне материала детали так, чтобы отклонение от наиболее удаленной точки реального элемента поверхности в пределах нормируемого участка имело минимальное значение;
- **средний элемент** – элемент, имеющий форму номинального и такие размеры и/или расположение, чтобы сумма квадратов расстояний между реальным и средним элементами в пределах нормируемого участка имела минимальное значение.

В первых двух предлагаемых вариантах стандарт ГОСТ 24642-81 вступает в противоречие с определением отклонения формы элемента как *отклонение формы реального элемента от номинальной формы*.

Поэтому к этим двум вариантам добавлен третий – **номинальный элемент** – элемент, используемый в качестве базового для оценки отклонения формы.

Поскольку основной проблемой является определение расположения *номинальной системы координат с номинальным элементом* в системе координат системы измерения для определения отклонения формы реального элемента, рассмотрим предложенные варианты *прилегающего, среднего и номинального* элементов по отношению к реальному элементу.

В стандарте ГОСТ 24642-81 без убедительного доказательства утверждается, что для *оценки отклонений формы профиля* может быть принят **только прилегающий** элемент, имеющий форму номинального, соприкасающийся с реальным и расположенный вне материала детали так, чтобы отклонение от наиболее удаленной точки реального элемента поверхности в пределах нормируемого участка имело минимальное значение, а отклонения формы определяются *по нормали к прилегающему элементу*.

Посмотрим, как это может быть реализовано на практике.

Начнём с прилегающего элемента для плоских *профилей* незамкнутых и замкнутых произвольной формы. Пусть каждый из рассматриваемых профилей имеет кривизну.

Прилегающий профиль может быть материализован лекалами – реальными кривыми измерительных инструментов, выполненных с высокой точностью и устанавливаемых на реальных профилях сечений. Это дорогой инструмент, изготавливаемый как калибр. Однако реализовать этим инструментом алгоритм поиска положения лекала на контуре сечения не всегда возможно. Кроме того возникают проблемы, связанные с определением расстояния от реального контура до приложенного лекала.

Иногда вместо номинального профиля используется профиль, эквидистантный номинальному профилю [7, 8]. Это несколько облегчает определение координат точек реальной поверхности, но не делает его легче. Остаётся проблема выбора положения лекала по отношению к реальному профилю. Можно коснуться реального профиля с любой стороны, повернув лекало по отношению к реальному профилю сечения. Те же проблемы неоднозначности положения прилегающего профиля к реальному профилю преследуют и прилегающие профили любой формы.

Таким прилегающим профилем, рассмотренным в стандарте ГОСТ 24642-81, была *прилегающая окружность*.

Прилегающая окружность, рассмотренная в стандарте ГОСТ 24642-81 – окружность минимального диаметра, описанная вокруг реального профиля сечения наружной поверхности вращения, или окружность максимального диаметра, вписанная в реальный профиль внутренней поверхности вращения.

А как определить диаметр и положение центра прилегающей окружности? Материальный носитель формы непрерывно изменяющегося размера прилегающей окружности нереализуем. Единственный выход – **попытаться вычислить** искомые минимальный диаметр и положение центра окружности.

Для этого, как и в предыдущем случае, необходимы:

- система координат, в которой заданы координаты точек реального профиля сечения, полученные измерением;
- система координат, в которой задана прилегающая окружность;
- разработать алгоритм, с помощью которого можно найти положение прилегающей окружности с непрерывно изменяющимся диаметром и касающейся реального профиля сечения снаружи или изнутри в системе координат измеренных значений точек профиля.

В качестве критерия, обеспечивающего определение положения (привязку) прилегающей окружности к профилю реального сечения, можно использовать минимум функции $(\epsilon_{\max}) \rightarrow \min$ при условии касания с внешней (или внутренней) по отношению к реальному профилю стороны (снаружи или изнутри) и непересечения реального профиля профилем прилегающей окружности (рис. 10).



Рис. 10

Однако, в примечании к п. 1.13 стандарта ГОСТ 24642-81 отмечается, что условие минимального значения отклонения не распространяется на прилегающую окружность. А каким тогда формальным условием пользоваться в этом случае?

Для решения этой задачи не определены ни системы координат, ни алгоритм определения расстояния, ни алгоритм поиска минимума максимального расстояния, определяющий положение прилегающей прямой в системе координат измеренных значений точек профиля.

Из определения прилегающей окружности следует, что она должна касаться трех вершин реального профиля снаружи или изнутри. Возможно несколько прилегающих контуров с разной величиной диаметров и положений их центров в системе координат плоского контура. Таких окружностей великое множество. Среди них есть подмножество окружностей, имеющих наименьший диаметр, обусловленное погрешностями определения координат точек реального профиля сечения, вычисления диаметра и положения центра прилегающей окружности. Положение центров этих окружностей не совпадает. Какую из них выбрать? Возникает неопределенность. Решение в этом случае **неоднозначно**.

В стандарте ГОСТ 24642-81 (п. 1.15) отмечается, что в тех случаях, когда расположение прилегающей окружности относительно реального профиля неоднозначно, оно принимается по условию минимального значения отклонения точек реального профиля от прилегающей окружности.

А если это условие выполнено для некоторого подмножества окружностей? Как быть в таком случае при приемке продукции при неоднозначности результатов вычислений? Следует, однако, отметить, что *прилегающий* элемент (окружность) не есть *номинальный*. Он только имеет **форму** номинального.

По аналогии с прилегающей окружностью **прилегающим профилем** называют профиль, имеющий **форму** номинального профиля, соприкасающийся с реальным профилем и расположенным вне материала детали так, чтобы отклонение от него наиболее удаленной точки реального профиля в пределах нормируемого участка имело минимальное значение.

А нельзя ли примитивное и труднореализуемое измерение лекалом заменить вычислением? Для этого нужно, прежде всего, дискретизировать (представить набором точек) непрерывную функцию реального профиля сечения. В зависимости от требуемой точности восстановления контура по теореме Котельникова [9] можно определить шаг дискретизации Δx , выбрав наибольшую (верхнюю) частоту гармоник из спектра частот для непериодических функций или верхнюю гармонику для периодических. Для выбранной гармоники число дискретных значений на каждом периоде верхней гармоники должно быть более двух.

Отсюда следует, что в отклонение формы профиля может быть включена волнистость и шероховатость в зависимости от частоты определяемых гармоник. Выделение шероховатости в отдельную группу отклонений формы весьма условно и является предметом соглашения, обусловленным способом и средствами измерения. В дальнейшем для общности не будем их разделять.

Если нет возможности с помощью манипулирования номинальным лекалом точно определить с его помощью его положение относительно реального профиля, попробуем вычислить положение прилегающего профиля относительно реального профиля без лекала.

Для этого необходимы:

- система координат системы измерения, в которой заданы координаты точек номинального профиля, полученные измерением;
- система координат, в которой задан номинальный профиль;
- алгоритм, с помощью которого можно найти положение номинальной системы координат номинального прилегающего профиля в системе координат системы измерения измеренных значений точек реального профиля.

Проведенный анализ на примере окружности и произвольного плоского профиля показал, что прилегающие профили, во-первых, не всегда соответствуют номинальному профилю по величине и, во-вторых, неоднозначны.

Те же проблемы имеют место и для прилегающей прямой.

В стандарте ГОСТ 24642-81 в качестве линии профиля используется **прилегающая прямая** – прямая, соприкасающаяся с реальным профилем и расположенная вне материала детали так, чтобы отклонение от нее наиболее удаленной точки реального профиля в пределах нормируемого участка имело минимальное значение. В качестве критерия, обеспечивающего определение положения (привяз-

ку) прилегающей прямой к профилю реального сечения, можно использовать минимум функции $(\varepsilon_{\max}) \rightarrow \min$ при условии касания с внешней по отношению к реальному профилю стороны (снаружи) и непересечения реального профиля прилегающей прямой (рис. 11).

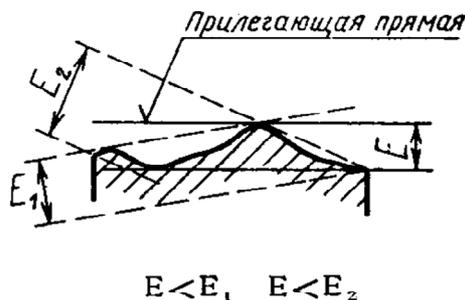


Рис. 11

Прилегающая прямая может быть материализована лекальной линейкой⁷. Реализовать этим инструментом поиск положения линейки на профиле сечения не всегда возможно, поскольку возникают проблемы, связанные с определением как расстояния от реального профиля до приложенной лекальной линейки, так и положения прилегающей прямой, при котором будет достигнут минимум максимального расстояния точек реального профиля до прилегающей прямой.

Для решения этой задачи не определены ни системы координат, ни алгоритм определения расстояния, ни алгоритм поиска минимума максимального расстояния, определяющий положение прилегающей прямой в системе координат измеренных значений точек профиля.

Такое положение в соответствии со стандартом ГОСТ 24642-81 может быть найдено **однозначно** только в том случае, когда профиль **прилегающей прямой** в пределах нормируемого участка опирается на одну точку реального профиля.

А как быть со случаем, когда **прилегающая прямая** коснется двух разных вершин реального профиля в пределах нормируемого участка? Однозначен ли такой вариант? Как быть в таком случае при приемке продукции при неоднозначности результатов измерений?

Из проведенного исследования пригодности прилегающих профилей в качестве отсчётных элементов для плоских профилей, обладающих и не обладающих кривизной, не приемлемо по следующим причинам:

- прилегающие элементы неоднозначны, хотя имеют форму, похожую на форму номинальных элементов;
- уравнения прилегающих элементов не совпадают с уравнениями номинальных элементов.

Перейдём к средним элементам.

В Приложении 1 стандарта ГОСТ 24642-81 отмечается, что вместо прилегающего элемента для оценки отклонений формы допускается использовать в качестве отсчётного (базового) элемента **средний элемент**.

Средний элемент – это профиль, имеющий номинальную форму и такие размеры и/или расположение, чтобы сумма квадратов расстояний между реальным и средним элементами в пределах нормируемого участка имела минимальное значение (определение стандарта ГОСТ 24642-81).

Средние элементы определяются по правилу $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \rightarrow \min$.

Средние элементы в отличие от **прилегающих элементов** всегда однозначны. Число точек, описывающих реальный элемент при дискретизации этого элемента при выбранной верхней частоте функции, описывающей этот элемент, всегда конечно. Следовательно, положение его, вычисленное

⁷ Лекальные линейки ГОСТ 8026-75. Изготавливаются из высококачественной закаленной стали 0 и 1 классов точности. Рабочие грани линеек доведены до высокой точности. Предназначены для проверки прямолинейности методом световой щели на просвет.

по сумме квадратов отклонений, описывающее критерий поиска положения средней линии

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \rightarrow \min \text{ также конечно и однозначно.}$$

Средний элемент должен иметь ту же *форму*, что и номинальный. То есть тип уравнения среднего элемента совпадает с типом уравнения номинального элемента. Но положение и константы уравнений, описывающих средний и номинальный элементы, не совпадают.

Рассмотрим случай, когда реальный профиль отождествляется с прямой линией.

Если в системе координат плоского профиля сечения непрерывный реальный профиль представить множеством точек с бесконечно малыми интервалами между ними, то для выбранной гармоникой число дискретных значений на каждом периоде верхней гармоники должно быть более двух (рис. 12).

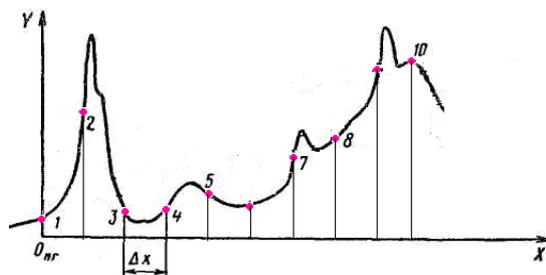


Рис. 12

После дискретизации функции мы уже имеем дело с совокупностью (организованным множеством), «облаком» точек реального контура в системе координат X, O, Y , которую можно считать случайной выборкой из генеральной совокупности всего множества точек реального контура сечения (рис. 13).

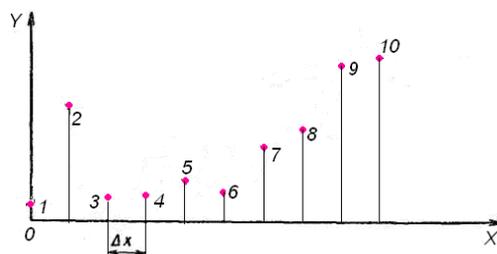


Рис. 13

В этом «облаке» необходимо расположить линию профиля сечения той же формы, что и номинальная (прямую) по какому-нибудь универсальному алгоритму, обеспечивающему привязку его к координатам этих точек.

Если точки дискретизации определены в некоторой произвольно выбранной системе координат X, O, Y набором случайных значений (x_i, y_i) , то такой алгоритм для прямого профиля известен. В математической статистике и теории вероятностей его называют *математическая регрессия*.

Задачи математической регрессии имеют цель приближения выборки данных (x_i, y_i) , некоторой непрерывной функцией $f(x)$, определенным образом минимизирующей совокупность отклонений (например, ошибок данных измерений) в узлах $|f(x_i) - y_i|$ от номинального контура (в данном случае – прямой). Ищется такая функция $f(x)$, которая не включает в себя узлы, а, наоборот, проходит на некотором отдалении от них, стремясь, тем не менее, к тому, чтобы это отклонение было в определенном смысле минимальным.

Самый простой и наиболее часто используемый вид регрессии – линейная. Приближение данных (x_i, y_i) осуществляется линейной функцией $y(x) = b + a \cdot x$. На координатной плоскости (x, y) линейная функция, как известно, представляется прямой линией. Линейную регрессию часто называют *мето-*

дом наименьших квадратов, поскольку коэффициенты a и b вычисляются из условия минимизации суммы квадратов отклонений точек реального контура от прямой в направлении оси y $|b+a \cdot x_i - y_i|^2$.

В этом простейшем случае средняя линия профиля представляет собой прямую линию (выделено голубым цветом), задаваемую уравнением

$$y = \hat{\alpha} + \hat{\beta} (x_i - \bar{x}), \tag{6}$$

где $\hat{\alpha}$ – ордината средней точки (\bar{x}, \bar{y}) этой линии; $\hat{\beta}$ – ее угловой коэффициент;

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \text{среднее арифметическое значение абсцисс};$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \text{среднее арифметическое значение ординат}.$$

При оценке линейной зависимости теории погрешностей задача состоит в том, чтобы сгладить отклонения от линейной зависимости, вызванные погрешностями наблюдений или отклонениями самой зависимости от строгой линейности. В этом случае уравнение (6) описывает «прямую по наименьшим квадратам», а параметры уравнения получают путем приравнивания нулю частных производных:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)^2$$

по параметрам $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ суммы квадратов отклонений, что дает соотношения

$$\hat{\alpha}_{ie} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; \quad \hat{\beta}_{ie} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}. \tag{7}$$

Здесь x_i и y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – координаты точек, иллюстрирующих множество пар значений результатов наблюдений (рис. 14).

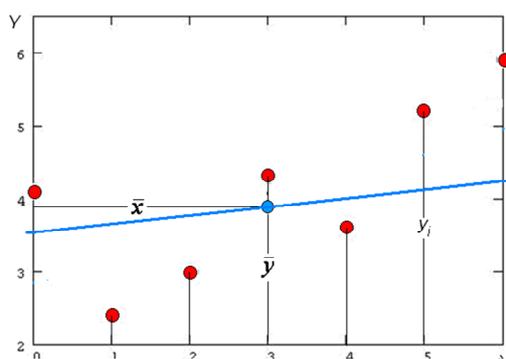


Рис. 14

Он получил название «метод минимума квадратов отклонений» случайных положений точек, известный из статистики и теории вероятностей ошибок (погрешностей). Формально это уравнение совпадает с уравнением линейной зависимости, оцениваемой по методу наименьших квадратов [10].

Иначе обстоит дело при определении положения средней линии профиля, которая сама должна играть роль оси x .

Поэтому среднюю линию определяют как прямую **ортогональной средней квадратической регрессии**, называемую короче: **линией ортогональной регрессии** [11].

Эту линию $y = \hat{\alpha}_{op} + \hat{\beta}_{op} (x - \bar{x})$ в упрощенной форме находят как прямую, проходящую так, чтобы сумма квадратов расстояний от точек x_i, y_i профиля до этой прямой была минимальной (рис. 15).

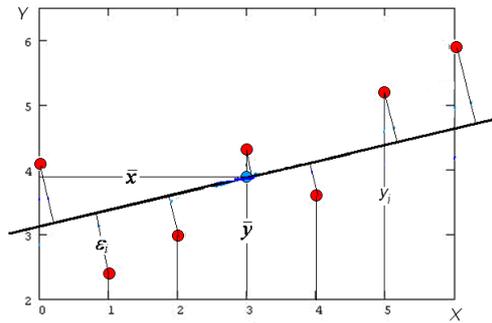


Рис. 15

Пользуясь распространенной механической аналогией, точкам x_i, y_i приписывают единичные массы и ищут ось вращения, дающую данной механической системе наименьший момент инерции. Из механики известно, что такая ось проходит через центр тяжести системы, имеющий координаты \bar{x}, \bar{y} , где \bar{x} и \bar{y} те же, что в формуле (6).

В искомом уравнении

$$\hat{\alpha}_{op} = \hat{\alpha}_{нк} = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$

$$\hat{\beta}_{op} = \text{tg}\varphi_{op},$$

$$\text{где } \text{tg}2\varphi_{op} = 2 \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{\left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] - \left[\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right]}.$$

С помощью **ортогональной средней квадратической регрессии** можно найти *единственное положение* номинального прямого профиля среди точек реального контура при любом расположении реального контура на плоскости по отношению к осям координат XOY (рис. 16 а, б).

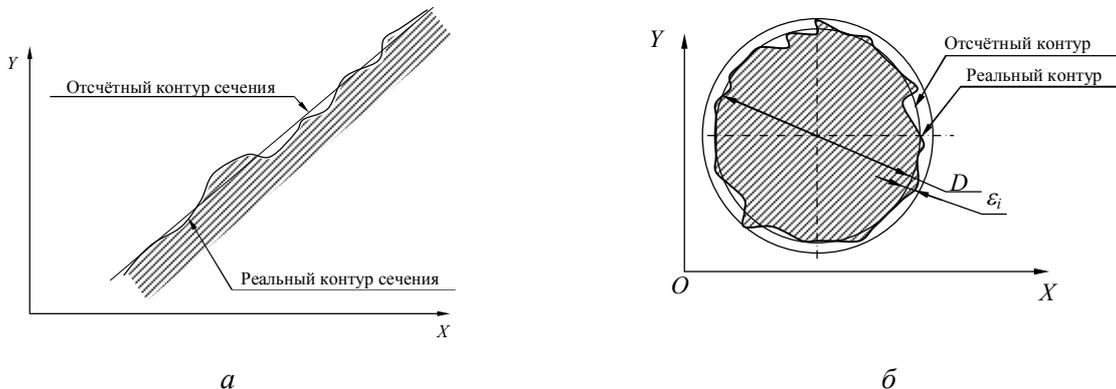


Рис. 16

Уравнение среднего элемента любой формы, отличающегося от прямой линии, отличается от уравнения номинального элемента. Это сразу приводит к противоречию при обязательной необходимости определения отклонения формы реальной геометрии от номинальной формы.

Из-за однозначности средние элементы могут быть использованы для определения положения расположения реальных элементов, но как?

А что, если в качестве среднего элемента взять номинальный элемент в номинальной системе координат?

Рассмотрим такую задачу для элемента, имеющего кривизну.

Пусть в номинальной системе координат элемента (рис. 17) задана номинальная геометрия дуги, как и на рис. 7.

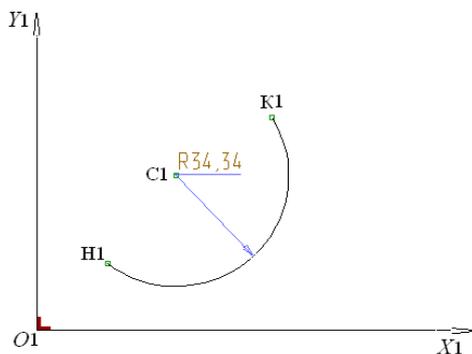


Рис. 17

Почему дуги? Ну, во-первых, этот элемент обладает кривизной сложнее, чем прямая линия, и, во-вторых, легко определить расстояние любой точки до дуги.

В номинальной системе координат элемента X_1, O_1, Y_1 – дуга окружности радиуса R , описываемая уравнением:

$$(X_1 - X_{1C1})^2 + (Y_1 - Y_{1C1})^2 = R^2$$

$$\text{или } R = [(X_1 - X_{1C1})^2 + (Y_1 - Y_{1C1})^2]^{0.5}$$

с началом в точке X_{1H1}, Y_{1H1} и концом в точке X_{1K1}, Y_{1K1} , где X_{1C1}, Y_{1C1} – координаты центра дуги; X_{1H1}, Y_{1H1} – координаты начала дуги и X_{1K1}, Y_{1K1} – координаты конца дуги.

Расстояние ε от любой точки с координатами X_{1i}, Y_{1i} , лежащей вблизи дуги, до дуги радиуса R равно $\varepsilon = [(X_{1i} - X_{1C1})^2 + (Y_{1i} - Y_{1C1})^2]^{0.5} - R$.

Однако номинальный элемент имеет одну **номинальную величину**, а реальный элемент может иметь величину как больше, так и меньше номинальной.

В системе координат системы измерения X^*, O^*, Y^* имеем ряд точек, соответствующий дуге круга радиуса R и две характерных точки на концах дуги $H1^*$ и $K1^*$ (рис. 18).

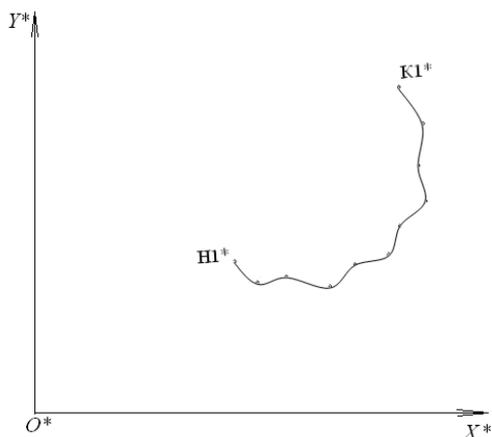


Рис. 18

Кривая, полученная с помощью КИМ в системе координат системы измерения, соответствует реальному профилю. Она мало похожа на исходную дугу в связи с неизбежными погрешностями её начертания (изготовления) от руки. Вопрос: насколько она отличается от номинальной геометрии дуги?

Эту кривую в соответствии с изложенными ранее правилами можно дискретизировать набором точек.

Попытаемся в это «облако точек» вписать номинальную систему координат с номинальной геометрией по правилу «сумма квадратов отклонений реальных точек от номинального профиля минимальна».

Для этого поместим номинальную систему координат элемента с номинальной геометрией на листке прозрачной кальки.

Допустим, что система координат системы измерения с измеренными точками неподвижна, а система координат номинального элемента подвижна. Подвижную кальку с системой координат и номинальной геометрией будем перемещать и поворачивать относительно неподвижной системы координат системы измерения с измеренной геометрией. Перемещая и поворачивая подвижную кальку относительно реальной геометрии элемента в системе координат системы измерения, найдём такое положение подвижной системы координат, чтобы точки измеренной геометрии относительно номинальной расположились по минимуму суммы квадратов отклонений.

Для точного выполнения этого процесса необходимо

– определить расстояния от точек дискретизации до номинальной дуги в каком-либо случайном положении номинальной системы координат элемента, характеризуемом положением начала O_1 в системе координат системы измерения X^*, O^*, Y^* , определяемым случайными значениями вектора R и матрицы направляющих косинусов A ;

– вычислить сумму квадратов расстояний от номинальной геометрии при этом случайном положении;

– разработать алгоритм поиска значений R^* и A^* , при которых сумма квадратов будет минимальной.

Решив все перечисленные задачи, получим в системе координат системы измерения положение в ней номинальной системы координат элемента (рис. 19).

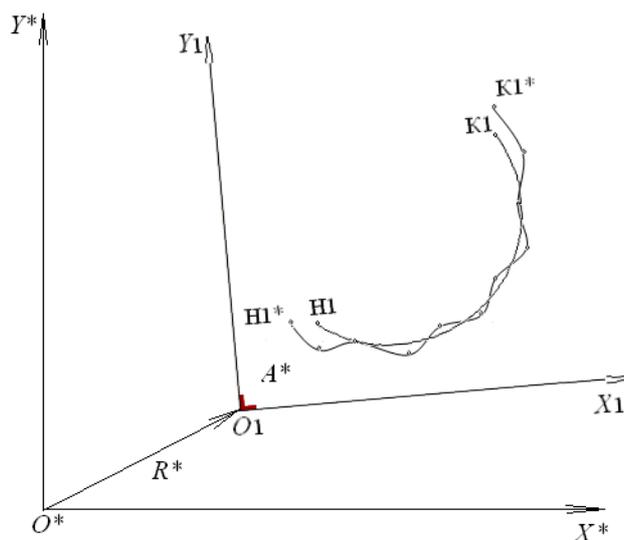


Рис. 19

Полученный результат показывает, что

- метод наименьших квадратов позволяет однозначно определить положение номинальной системы координат номинального элемента в системе координат системы измерения;
- форма реального элемента похожа на номинальный элемент;

- величина реального элемента отличается от величины номинального элемента, поскольку точки $H1$, H^* и $K1$, K^* не совпадают;

Из-за несовпадения точек $H1$, H^* и $K1$, K^* использование среднего номинального элемента в качестве среднего элемента непригодно для определения отклонения формы реальной геометрии от номинальной.

Существенным недостатком выбора номинального элемента в качестве *среднего элемента* является то, что не учитывается *величина* реального элемента.

Как учесть величину реального элемента?

Ссылки в тексте стандарта вида «имеющий форму номинального элемента» неявно предполагают либо *эквидистанту*⁸ к элементу, либо *изменение его масштаба*. Какой из них выбрать?

Изменение масштаба элемента, несмотря на то, что это сравнительно простая операция и в 2D и в 3D компьютерной графике, меняющая форму проектируемого объекта пропорционально номинальной, требует выбора координат точки, относительно которой выполняется масштабирование, отличной от начала координат номинального элемента в номинальной системе координат.

Более предпочтителен вариант, когда элемент, имеющий форму номинального элемента, будет эквидистантен к номинальному элементу в его *номинальной системе координат*.

К этому же варианту сводятся понятие поля допуска отклонения формы элемента, принятое в стандарте ГОСТ 24642-81. Поле допуска формы элемента (профиля сечения или поверхности) определяется как область, ограниченная двумя линиями или поверхностями, эквидистантными номинальным элементам, отстоящими друг от друга на расстоянии, равном допуску отклонения формы элемента.

Эта область пространства может быть либо вне номинального элемента, либо пересекаться с ним.

Таким образом, для учёта влияния величины элемента на расположение отклонения формы относительно номинальной необходимо ввести четвёртое понятие – *эквидистантный элемент*, полученный в номинальной системе координат номинального элемента (рис. 20).

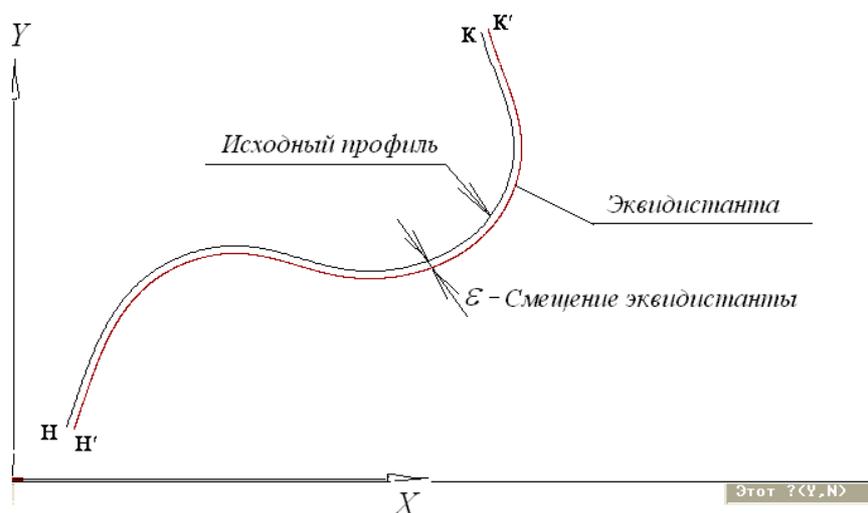


Рис. 20. Эквидистанта к исходному элементу

Эквидистанта может быть как по одну сторону элемента, так и по другую.

Для плоской кривой точки эквидистанты удалены от базиса по нормали к исходной кривой на расстояние ϵ .

⁸ Эквидистанта – геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой фиксированной прямой или поверхности (основания или базиса).

В облако точек элемента в системе координат системы измерения впишем номинальный элемент, «замороженный» в номинальной системе координат номинального элемента последовательным перемещением и поворотом системы координат с этим «замороженным» элементом относительно «облака точек», принадлежащего этому элементу таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений точек облака была минимальной.

Уточним положение номинальной системы координат по отношению к «облаку точек», принадлежащих этому элементу. Сформируем эквидистанту к номинальному элементу в той же номинальной системе координат. Увеличивая или уменьшая величину эквидистанты, добьёмся наименьшей из возможных величин эквидистанты, при которой сумма квадратов отклонений будет самой минимальной из возможных. Искомый «минимум – миниморум» возможен только при одном единственном значении эквидистанты с учётом величины её смещения и его направления. Поскольку эквидистанта к любой плоской кривой строится в той же номинальной системе координат, что и исходный номинальный профиль, это уточнённое положение номинальной системы координат номинального элемента и будет *положением реальной системы координат реального элемента в системе координат системы измерения*.

При реализации этой идеи возникает трудная проблема определения эквидистанты к любому плоскому (и в перспективе пространственному) элементу, и вычислению направления и смещения эквидистанты в номинальной системе координат элемента и вычисления расстояния от точек дискретизации до вычисляемой эквидистанты.

Эту проблему можно преодолеть, если вспомнить о том, что точки начала H' и конца K' эквидистанты смещены относительно начала H и конца K номинального элемента также по нормали. Эти точки могут быть использованы для оценки величины эквидистанты к элементу в номинальной системе координат элемента и в системе координат системы измерения для оценки расположения номинальной системы координат номинального элемента, от которого оценивается отклонение формы реального элемента

Если подобрать эквидистанту к номинальной геометрии в номинальной системе координат такую, чтобы её точки $H1'$ и $K1'$ совпали с точками $H1^*$ и $K1^*$ в системе координат системы измерения, то положение подвижной системы координат в неподвижной можно считать системой координат дуги в системе координат системы измерения X^*, O^*, Y^* (рис. 21).

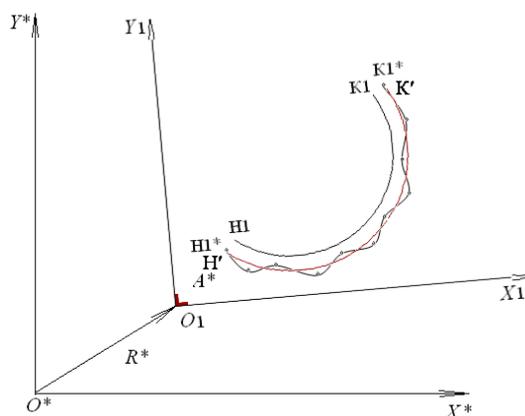


Рис. 21

Вектор R^* и матрица направляющих косинусов A^* определяют положение номинальной системы координат элемента в системе координат системы измерения, а расстояние точек реальной геометрии от номинального профиля – отклонение формы элемента.

Будет ли притом выполняться условие минимума суммы квадратов отклонений точек реального элемента от эквидистантного при совмещении точек начала и конца дуг? Это требует доказательства для всех возможных форм элемента.

Но это пока не обязательно. Так как номинальная геометрия задана в номинальной системе координат, то в той же системе координат задаётся и эквидистанта с эквидистантными точками начала

и конца элемента $H1'$ и $K1'$, а отклонения формы элемента определяются от номинальной геометрии в номинальной (подвижной) системе координат.

По расстоянию между этими точками ($H1'$ и $K1'$), измеренному в системе координат системы измерения, определить направление и величину смещения ε эквидистанты по отношению к первообразной в номинальной системе координат проекта и поместить эту эквидистанту между началом и концом точек в системе координат системы измерения. Тогда номинальная система координат элемента будет системой координат реального элемента в системе координат системы измерения. Исходный номинальный профиль в этой системе координат будет отсчётной номинальной линией для оценки отклонения формы.

Таким образом для любых плоских элементов могут быть определены как положение номинальной системы координат элемента в системе координат системы измерения, так и отклонение формы от номинальной, используя *эквидистанту к номинальной геометрии элемента в номинальной системе координат* и совмещая координаты начала и конца эквидистантного профиля элемента с их координатами в системе координат системы измерения,.

Преимущество эквидистанты ещё и в том, что если будет доказано условие минимума суммы квадратов отклонений точек реального элемента от эквидистантного при совмещении точек начала и конца дуг, то нет необходимости дискретизировать форму контура профиля, вычислять сумму квадратов отклонений точек реального профиля от эквидистанты и проводить сложный поиск направления смещения, величины смещения ε и положения эквидистанты, устремляя сумму квадратов отклонений точек от эквидистанты к минимуму. Однако есть менее трудоёмкий способ решения задачи.

Достаточно обозначить две удалённые друг от друга характерные точки на номинальном контуре профиля и найти их на профиле после измерения в системе координат системы измерения и сравнить расстояние между характерными точками.

Если эти расстояния равны, то, совместив номинальную геометрию элемента в номинальной системе координат с измеренной геометрией в системе координат системы измерения X^*, O^*, Y^* получим положение системы координат реальной геометрии элемента в системе координат системы измерения.

Если эти расстояния не равны, то:

- определив направление и вычислив величину ε смещения эквидистанты к номинальному профилю,
- определив координаты характерных точек этой эквидистанты в номинальной системе координат,
- совместив номинальную геометрию элемента в номинальной системе координат с измеренной геометрией в системе координат системы измерения $X^*O^*Y^*$, получим положение системы координат реальной геометрии элемента в системе координат системы измерения.

И в первом, и во втором случае определим отклонение точек реальной геометрии профиля от номинальной геометрии в номинальной системе координат.

Положение номинальной системы координат элемента в системе координат системы измерения $X^* O^* Y^*$ определяют полученные значения вектора R^* положения начала номинальной системы координат и матрицы A^* поворота номинальной системы координат относительно системы координат системы измерения, а расстояние точек реальной геометрии от номинального профиля определяет отклонение формы элемента.

Рассмотрим более сложную задачу с двумя дугами.

Пусть в системе координат проекта задана номинальная геометрия двух дуг, каждая из которых представлена в номинальной системе координат элемента (рис. 22).

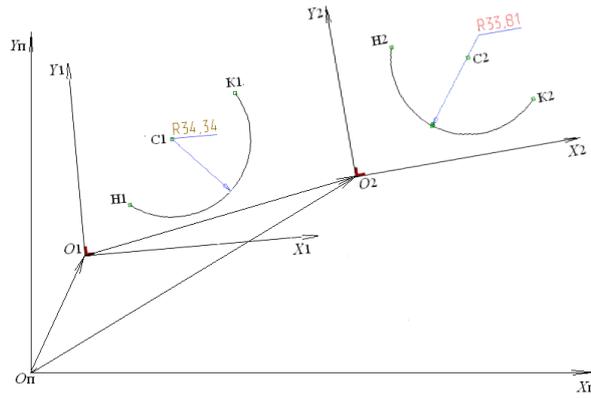


Рис. 22

После измерения в системе координат системы измерения получим измеренные профили в системе координат системы измерения X^*, O^*, Y^* (рис. 23).

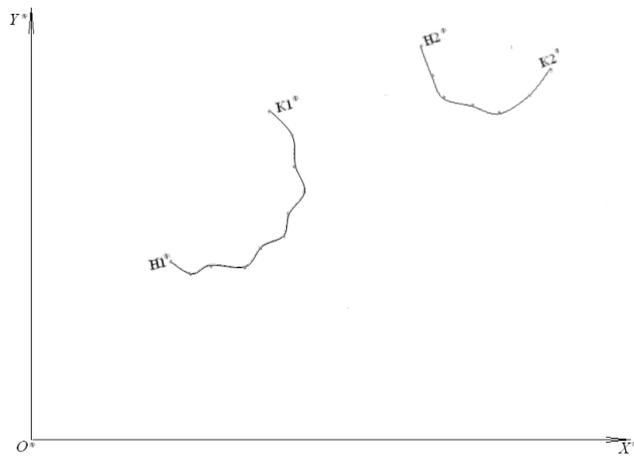


Рис. 23

Продлав с ними описанные выше процедуры по вписыванию эквидистанты к номинальной геометрии элемента в номинальной системе координат, получим расположение номинальных систем координат элементов X_1, O_1, Y_1 и X_2, O_2, Y_2 в системе координат системы измерения X^*, O^*, Y^* (рис. 24).

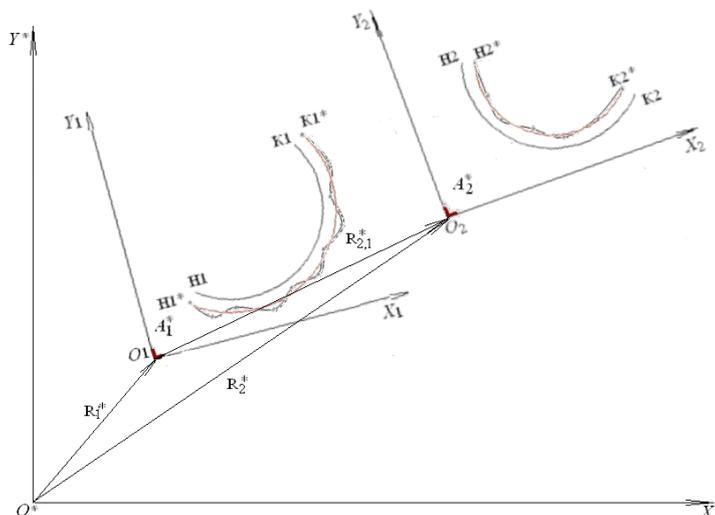


Рис. 24

Это положение в системе координат системы измерения X^*, O^*, Y^* не совпадёт с положением тех же номинальных систем координат в системе координат проекта $X_п, O_п, Y_п$ (рис. 13). Но если в системе координат базы рассматривать относительное расположение систем координат X_1, O_1, Y_1 и X_2, O_2, Y_2 (например, системы координат X_2, O_2, Y_2 по отношению к системе координат базы X_1, O_1, Y_1), то разницу их относительного расположения как по положению начал координат, O_2 относительно O_1 , определяемую радиус-векторами $R_{2,1}$ и $R_{2,1}^*$, так и по разнице матриц направляющих косинусов $A_{2,1}$ и $A_{2,1}^*$ (рис. 25, а и б).

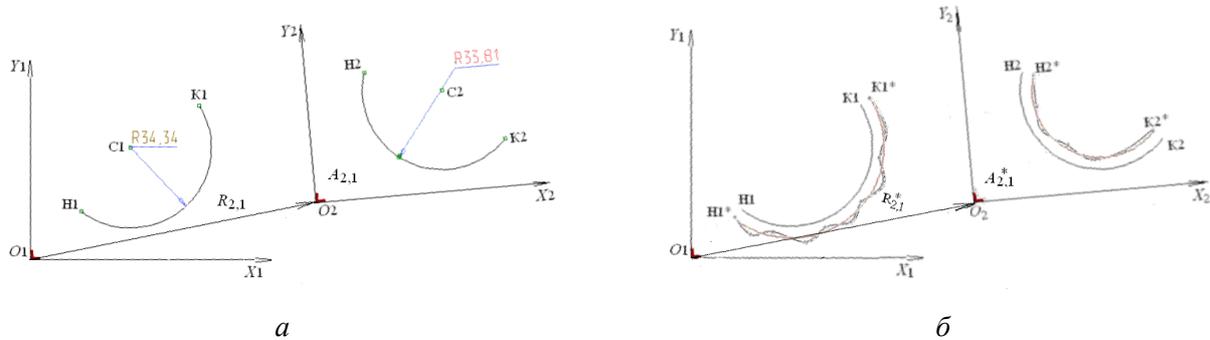


Рис. 25

В системе координат базы $X_б, O_б, Y_б$ определена номинальная система координат элемента $X_н, O_н, Y_н$ радиусом-вектором $R_н$ и матрицей направляющих косинусов $A_н$; система координат реального элемента $X_р, O_р, Y_р$ радиусом-вектором $R_р$ и матрицей направляющих косинусов $A_р$; расположение реальной системы координат относительно номинальной системы координат вектором $\Delta R_рн$ и матрицей направляющих косинусов $\Delta A_рн$ (рис. 26).

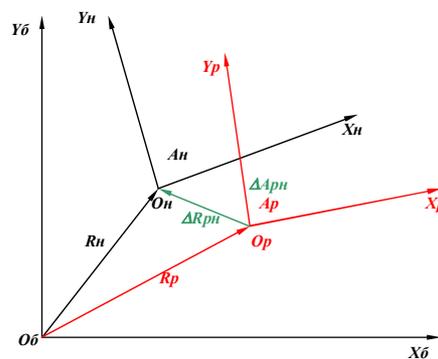


Рис. 26

Здесь

$$\Delta R_{рн} = A_{н}^T \cdot (R_{р} - R_{н}),$$

$$\Delta A_{рн} = A_{н}^T \cdot A_{р},$$

где $A_{н}^T$ – транспонированная матрица $A_н$.

Параметры $\Delta R_{рн}$ и $\Delta A_{рн}$ можно считать **погрешностями расположения по месту и углу**, а отклонения реального профиля от номинального можно считать **погрешностями формы**.

Из рассмотренного примера следует следующее.

1. В системе координат проекта на каждом элементе следует отметить две достаточно удалённые друг от друга точки (реперные знаки), принадлежащие каждому элементу, и определить координаты в номинальной системе координат элемента и вычислить расстояние между ними в этой же системе координат.
2. После контроля элемента с помощью координатно-измерительной машины определить в системе координат системы измерения все точки реальной геометрии элементов с необходимой точно-

стью, включая и отмеченные реперные знаки, и вычислить расстояние между измеренными реперными знаками.

3. Если расстояния совпадают, то собственная система координат реальной поверхности, построенная на характерных точках номинальной поверхности, обеспечивает совпадение систем координат номинальной и реальной поверхностей и определяет положение номинальной системы координат элемента (реальной поверхности) в системе координат системы измерения.

Если расстояния не совпадают, то в номинальной системе координат элемента определяется эквидистанта к нему с расположением соответствующих эквидистантных одноимённых характерных точек и положение *номинальной системы координат элемента* относительно *системы координат эквидистантных одноимённых характерных точек*. Это положение и определяет расположение номинальной системы координат элемента в системе координат системы измерения.

Ура! Найдено достаточно простое решение для определения положения номинальной системы координат элемента в системе координат системы измерения. По положению в ней номинальной геометрии элемента определим искомое отклонение формы реального элемента.

Если определить расположение номинальной системы координат элемента относительно системы координат базы в системе координат проекта и расположение номинальной системы координат элемента относительно системы координат базы в системе координат системы измерения, то сравнивая расположения систем координат элемента относительно системы координат базы, определим погрешности расположения каждого элемента относительно базы.

Всё хорошо, прекрасная маркиза!!!

Хорошо то хорошо, да ничего хорошего!

Всё дело в том, что мы забыли о *кривизне* элементов.

Мы рассматривали в приведенном примере дугу. Кривизна дуги больше нуля. Характерные точки начала и конца дуги при определении координат одноимённых характерных точек на эквидистантах смещаются по нормали к дуге, и расстояния между ними увеличиваются или уменьшаются.

А если применить такой подход к прямой линии, кривизна которой равна нулю, то эквидистанта к прямой будет прямая линия, и расстояния между одноимёнными характерными точками будут одинаковы.

Поэтому для элемента «прямая линия» среднюю линию определяют как прямую ортогональной средней квадратической регрессии, называемую короче *линией ортогональной регрессии*.

Пользуясь распространенной механической аналогией, точкам реального элемента, представляемого в номинальной системе координат прямой линией, в системе координат системы измерения соответствуют точки x_i , y_i , которым приписывают единичные массы. Положение этой прямой проходит через центр тяжести системы, имеющий координаты \bar{x} , \bar{y} , а направление совпадает с осью вращения, дающей данной механической системе наименьший момент инерции.

Номинальная система координат элемента в этом случае привязана к прямой линии.

Для манипулирования системой координат эквидистантного элемента, привязанного к номинальной системе координат геометрии реального элемента в системе координат системы измерения, необходима однозначная привязка номинальной геометрии элемента к номинальной системе координат. Она всегда выполняется для *несимметричных элементов*.

Для плоских (2D) элементов с центральной симметрией необходимо указывать (координировать) хотя бы одну точку (репер) на номинальном и реальном элементах, которые предотвращают возможный произвольный поворот эквидистантного элемента вокруг центра симметрии, приводящий к неопределённости положения номинальной системы координат по отношению к геометрии реального элемента (см. рис. 27).

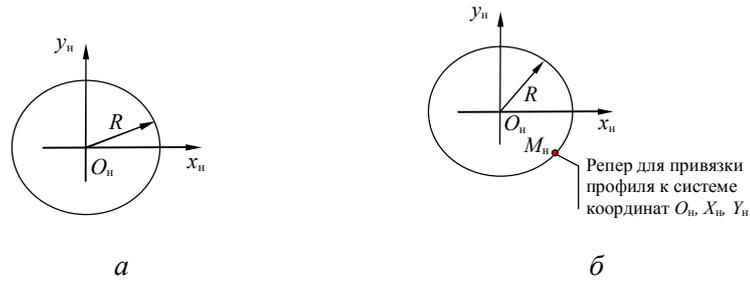


Рис. 27. К привязке геометрии элемента к системе координат:
 а – без репера, б – с репером для привязки к системе координат

Если такого репера (характерной точки) для привязки систем координат, как в номинальной геометрии элемента, так и на реальном элементе, не будет, то при вписывании эквидистантного элемента в облако точек реального профиля положение номинальной системы координат эквидистантного элемента в системе координат номинального элемента, совмещённой с системой координат системы измерения, не определено. Номинальная система координат элемента может быть как угодно повернута относительно центра симметрии.

Представление реальных элементов детали в пространстве

В качестве примера определения положения отсчётных элементов рассмотрим обычный вал, номинальный объём которого ограничен цилиндрической поверхностью и двумя торцевыми плоскостями (рис. 28).

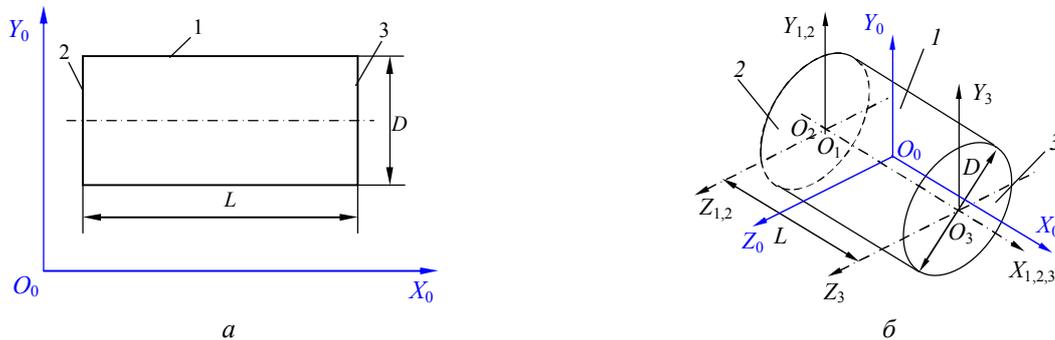


Рис. 28

На рис. 28 а представлена в номинальной системе координат условная проекция детали на плоском чертёже, а на рис. 28 б – её изображение в пространстве.

После изготовления вала по чертежу получим объект с реальными поверхностями (рис. 29).

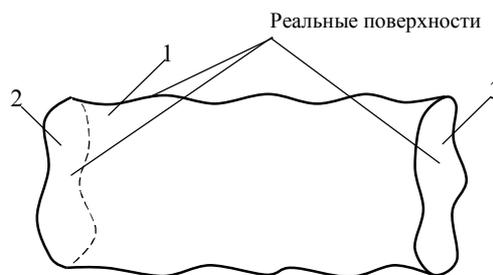


Рис. 29

Возникают вопросы: где ось цилиндра? Каков его диаметр? Чему равна длина детали? От какого уровня производить определение отклонения формы? и т. д.

Пусть в системе координат системы измерения координатно-измерительной машиной (КИМ) определены координаты x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} точек реальных поверхностей детали. Здесь индекс i – номер точки на j -той поверхности ($i = 1 \dots n; j = 1 \dots m$) (рис. 30).

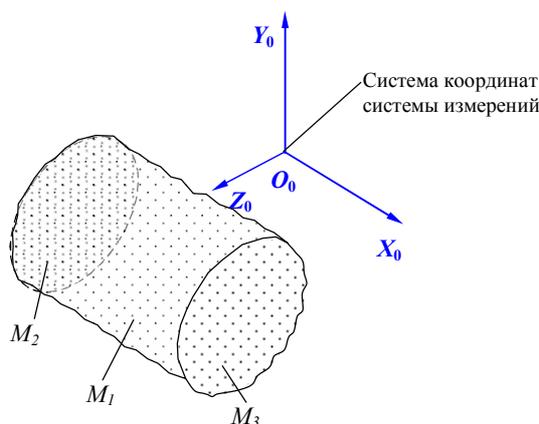


Рис. 30

Поверхностей всего три: два торца, «похожие на плоскости» и одна боковая, «похожая на цилиндр». Координаты точек реальных поверхностей цилиндрической детали в системе координат системы измерения можно представить массивами M_1, M_2, M_3 значений координат точек каждой из реальных поверхностей

Требуется определить отклонения расположения и формы реальных поверхностей от их отсчётных номинальных значений в системе координат проекта.

Как подойти к определению отсчётных поверхностей?

Рассматривать всю деталь как целое или по отдельным поверхностям, ограничивающим объём детали?

Переход от рассмотрения номинальной формы детали к реальным формам поверхностей, ограничивающих объём детали, сулит большие перспективы на пути решения задач определения погрешностей отклонений формы и расположения поверхностей и оптимизации допусков на них в конструкторской и технологической документации.

Что здесь первично и что вторично?

Для решения поставленной задачи нужно:

- во-первых, определить расположение поверхностей (элементов) для отсчёта отклонений формы от номинальных поверхностей детали в системе координат системы измерения;
- во-вторых, найдя положение номинальных поверхностей в системе координат системы измерения определить отклонения реальных поверхностей от номинальных.

Для определения положения номинальной системы координат поверхности в системе координат системы измерения воспользуемся отмеченным ранее сравнением взаимного расположения характерных точек поверхностей в номинальной системе координат проекта и в системе координат системы измерения.

Для поверхностей – пространственных (трёхмерных) объектов в ГОСТ 24642-81 предлагаются те же варианты для выбора отсчётного элемента, используемого для определения отклонений формы и расположения реального элемента в системе координат системы измерения:

- *прилегающий элемент* – элемент, имеющий форму номинального, соприкасающийся с реальным и расположенный вне материала детали так, чтобы отклонение от наиболее удаленной точки реального элемента поверхности в пределах нормируемого участка имело минимальное значение;
- *средний элемент* – элемент, имеющий форму номинального и такие размеры и/или расположение, чтобы сумма квадратов расстояний между реальным и средним элементами в пределах нормируемого участка имела минимальное значение.

- *номинальный элемент* – элемент, имеющий номинальную геометрию в номинальной системе координат.

Прилегающие элементы выбраны в стандарте ГОСТ 24642-81 для поверхностей, похожих на плоскость, цилиндр, поверхности произвольной формы.

Прилегающая плоскость может быть материализована реальной плоскостью поверочной плиты, выполненной с высокой точностью, и устанавливаемой на реальную поверхность.⁹ Это дорогой инструмент, изготавливаемый как калибры. Однако реализовать этим инструментом алгоритм поиска положения поверочной плиты на реальной поверхности не всегда возможно, поскольку возникают проблемы, связанные с определением расстояния от реальной поверхности до плоскости, особенно в случаях, когда прилегающая плоскость ляжет на одну, две или три точки контакта.

Ну и что делать будем? Один выход – **попытаться вычислить** искомые положение прилегающей плоскости в «облаке точек», принадлежащих реальной поверхности, «похожей» на плоскость.

Для этого необходимо:

- выбрать систему координат, в которой будут определены точки реальной поверхности, «похожей» на плоскость;
- определить с помощью средства измерения (например, с помощью координатно-измерительной машины – КИМ) координаты точек реальной поверхности;
- выбрать систему координат, в которой задана прилегающая плоскость;
- разработать алгоритм, с помощью которого можно найти положение прилегающей плоскости в системе координат измеренных значений точек реальной поверхности.

В качестве критерия, обеспечивающего определение положения (привязку) прилегающей плоскости к точкам, принадлежащим реальной поверхности, «похожей» на плоскость, можно использовать минимум функции (ϵ_{\max}) $\rightarrow \min$ при условии касания с внешней по отношению к реальной поверхности стороны (снаружи) и непересечения реальной поверхности прилегающей плоскостью.

Критерий может быть **однозначно** удовлетворён при касании прилегающей плоскости к реальной поверхности для одной выступающей точки касания в пределах нормируемого участка.

Таких точек в пределах нормируемого участка может быть много. Последовательно переходя от точки к точке можно найти такую точку, которая обеспечит выполнение критерия.

При наличии **двух точек касания** найти однозначное решение, переходя от одной пары точек касания к другой, возможно далеко не всегда. Прилегающих плоскостей, имеющих одно и тоже наименьшее значение максимального отклонения, великое множество. Это обусловлено погрешностями измерения координат точек реальной поверхности и вычисления положения прилегающей поверхности. На основе чего выбирать единственное положение прилегающей плоскости?

А как быть, если прилегающая плоскость ляжет на 3 точки? Таких прилегающих плоскостей также много. Среди них есть подмножество прилегающих плоскостей, имеющих одно и тоже наименьшее значение максимального отклонения. Как и в предыдущем случае возможно несколько прилегающих плоскостей с разным положением их в системе координат точек реальной поверхности. Какую из них выбрать? Возникает неопределенность. Решение в этом случае **неоднозначно**. Как быть в таком случае при приемке продукции при неоднозначности результатов вычислений?

Для прилегающего цилиндра материальный носитель формы с непрерывно изменяющимся диаметром прилегающего цилиндра нереализуем.

Единственный выход – **попытаться вычислить** искомое положение прилегающего цилиндра в «облаке точек», принадлежащих реальной поверхности, «похожей» на цилиндр.

Для этого необходимо

- выбрать систему координат, в которой будут определены точки реальной поверхности, «похожей» на цилиндр;

⁹ Для использования в качестве эталонной отсчетной поверхности, а также как вспомогательного приспособления при разметочных поверочных и контрольных работах в качестве опорных и установочных поверхностей при сборке различных машин и агрегатов используют плиты поверочные гранитные ТУ-2-034-802-74 и чугунные ГОСТ 10905-86.

- определить с помощью средства измерения (например, с помощью координатно-измерительной машины – КИМ) координаты точек реальной поверхности;
- выбрать систему координат, в которой задан прилегающий цилиндр;
- разработать алгоритм, с помощью которого можно найти положение оси прилегающего цилиндра в системе координат измеренных значений точек реальной поверхности и его диаметр.

В качестве критерия, обеспечивающего определение положения (привязку) прилегающей плоскости к точкам, принадлежащим реальной поверхности, «похожей» на цилиндр, можно использовать минимум функции $(\varepsilon_{\max}) \rightarrow \min$ при условии касания с внешней по отношению к реальной поверхности стороны (снаружи) и непересечения реальной поверхности прилегающим цилиндром.

Критерий может быть однозначно удовлетворён при касании прилегающего цилиндра к реальной поверхности для *трех выступающих точек* касания в пределах нормируемого участка. Таких прилегающих цилиндров может быть много. Среди них есть подмножество прилегающих цилиндров, имеющих одно и тоже наименьшее значение максимального отклонения. Как и в предыдущем случае возможно несколько прилегающих цилиндров с разным положением их в системе координат точек реальной поверхности. Какой из них выбрать? Возникает неопределенность. Решение в этом случае **неоднозначно**. Как быть в таком случае при приемке продукции при неоднозначности результатов вычислений?

Таким образом, из-за технической нереализуемости и неоднозначности результатов вычислений положений прилегающих элементов, используемых в качестве *отсчётных элементов* по отношению к реальным элементам, **прилегающие элементы неприемлемы для определения отклонения формы реальных элементов**.

Средние элементы определяются по правилу $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \rightarrow \min$.

Средние элементы в отличие от прилегающих всегда однозначны. Число точек, описывающих реальный элемент при дискретизации этого элемента при выбранной верхней частоте функции, описывающей этот элемент, всегда конечно. Следовательно, положение его, вычисленное по сумме

квадратов отклонений, описывающее критерий поиска положения средней линии, $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \rightarrow \min$, также конечно и однозначно.

Из-за однозначности они могут быть использованы для определения положения расположения реальных элементов.

В этом случае решены все вопросы, связанные с **однозначностью решения при поиске положения отсчётной поверхности в облаке точек реальной поверхности**.

Условие поиска *отсчётной поверхности* может быть формально записано в виде поиска минимума функции

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \Rightarrow \min ,$$

где ε_i – расстояние от i -й точки реальной поверхности по нормали до отсчётной поверхности при условиях соответствия *формы и величины отсчётной поверхности* форме поверхности, заданной в конструкторской документации.

Следует отметить, что при поиске положения отсчётной поверхности в системе координат системы измерения следует учитывать кривизну поверхностей.

По мнению ГОСТ 24642-81 средний элемент имеет ту же *форму*, что и номинальный. Это справедливо только для одной поверхности – **плоскости**.

Положение средней плоскости в системе координат системы измерения, до которой сумма квадратов отклонений точек реальной поверхности минимальна, определяют пользуясь распространенной механической аналогией.

Из механики известно, что если точкам реальной поверхности приписать единичные массы, то средняя плоскость проходит через центр тяжести системы, имеющий координаты \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} , а нормаль к средней плоскости совпадает с осью вращения, дающую данной механической системе наименьший момент инерции.

Здесь $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ – среднее арифметическое значение абсцисс;

$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ – среднее арифметическое значение ординат;

$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$ – среднее арифметическое значение аппликат.

Для поверхностей, имеющих кривизну, отличную от нуля, это не так. Уравнение среднего элемента отличается от уравнения номинального. Это сразу приводит к противоречию при обязательной необходимости определения отклонения формы реальной геометрии от номинальной геометрии.

Существенным недостатком выбора номинального элемента в качестве среднего элемента является то, что не учитывается *величины* реального элемента.

Остаётся только один приемлемый вариант – в качестве отсчётного элемента для определения положения номинальной системы координат поверхности принять *эквидистанту к поверхности*.

Для задания положения каждой номинальной поверхности, ограничивающей объем каждого изделия, определенной в системе координат системы измерения $O_{ni} X_{ni} Y_{ni} Z_{ni}$, где i – порядковый номер поверхности, необходимо связать каждую отсчётную эквидистантную поверхность с соответствующей *номинальной системой координат*. Тогда положение номинальных поверхностей изделия будет определено положением этих систем координат в системе координат системы измерения $O_0 X_0 Y_0 Z_0$.

В отличие от плоского (2D) варианта для определения положения поверхности в трёхмерном (3D) пространстве необходимо не две, а три достаточно удалённые друг от друга характерные точки, лежащие на номинальной поверхности. Одним из требований, предъявляемых к расположению этих точек, является недопустимость их расположения на одной прямой.

Для привязки номинальной системы координат к поверхности необходимы либо достаточно удалённые друг от друга три точки, лежащие на поверхности, либо направление и две точки, лежащие на поверхности.

В системе координат проекта координаты этих характерных точек *отмечаются как реперные знаки*, и их координаты определяются с помощью КИМ в системе координат системы измерения.

Расстояния между реперами *в системе координат системы измерения* могут совпадать или не совпадать с теми же расстояниями *в системе координат проекта* или в номинальной системе координат номинальной геометрии элемента.

Если расстояния совпадают, то собственная система координат реальной поверхности, построенная на характерных точках номинальной поверхности, обеспечивает совпадение систем координат номинальной и реальной поверхностей и определяет положение номинальной системы координат элемента (реальной поверхности) в системе координат системы измерения.

Если расстояния не совпадают, то в номинальной системе координат элемента определяется эквидистанта к нему с расположением соответствующих эквидистантных одноимённых характерных точек и положение *номинальной системы координат элемента* относительно *системы координат эквидистантных одноимённых характерных точек*. Это положение и определяет расположение номинальной системы координат элемента в системе координат системы измерения.

Прослеживая аналогию с ситуацией, проанализированной для плоского профиля, для любых номинальных поверхностей, имеющих кривизну, в 3D необходимо отметить и определить координаты трёх характерных точек (реперных знаков). Они должны принадлежать каждой искривлённой поверхности, не лежать на одной прямой и должны быть разнесены на края номинальной поверхности. Положение характерных точек определено в номинальной системе координат (рис. 31).

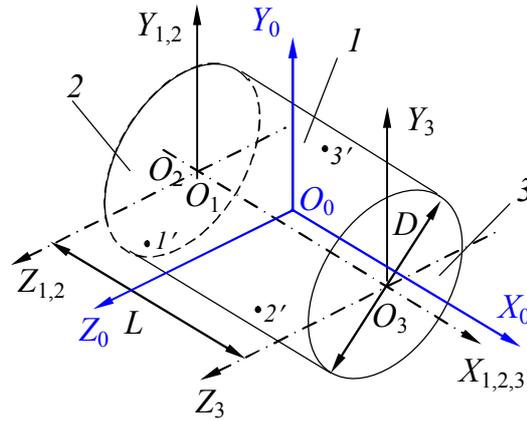


Рис. 31

В номинальной системе координат детали O_0, X_0, Y_0, Z_0 на цилиндрической (искривлённой) поверхности определим три удалённые точки $1', 2'$ и $3'$, и отметим их координаты: $o_{10'}, x_{10'}, y_{10'}, z_{10}'$; $o_{20'}, x_{20'}, y_{20'}, z_{20}'$ и $o_{30'}, x_{30'}, y_{30'}, z_{30}'$ (рис. 31).

Воспользуемся координатно-измерительной машиной (КИМ) и измерим в её системе координат множества точек каждой из поверхностей цилиндрической детали, в том числе и отмеченные точки, получившие в системе координат системы измерения значения координат $o_{10}^*, x_{10}^*, y_{10}^*, z_{10}^*$, $o_{20}^*, x_{20}^*, y_{20}^*, z_{20}^*$ и $o_{30}^*, x_{30}^*, y_{30}^*, z_{30}^*$ (рис. 32).

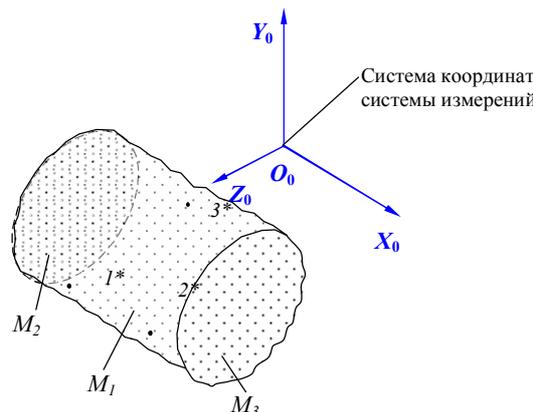


Рис. 32

Реальная геометрия элемента по результатам измерения с помощью КИМ не совпадёт с номинальной геометрией.

Выполним процедуру вписывания номинальных (для плоскостей) и эквидистантных элементов (для цилиндра) в каждый реальный элемент.

Рассмотрим процесс «вписывания» номинальных поверхностей в «облака измеренных точек» реальных поверхностей и оценим погрешности их расположения и формы.

Начнем с «вписывания» в массивы точек M_2 и M_3 (рис. 32) не ограниченных по размерам плоскостей. Вычислим координаты произвольной точки, принадлежащей каждой плоскости, и направление их нормалей n в системе координат системы измерения.

Плоскость в отличие от других поверхностей отличается отсутствием кривизны.

Доказано, что отсчётная плоскость (в данном случае средняя) проходит через центр тяжести измеренных точек, а нормаль n к каждой плоскости совпадает с одной из главных центральных осей инерции (минимальной) этого массива точек при условии, что условные массы точек равны единице.

В результате для каждого из торцов могут быть определены точки K_2 и K_3 , которые принадлежат отсчётным плоскостям и положение в пространстве нормалей их к отсчётным плоскостям n_2 и n_3 (рис. 33).

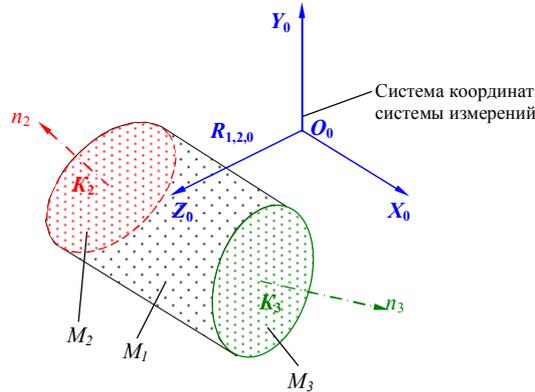


Рис. 33

Сравним расстояния между точками I' и $2'$ в номинальной системе координат (рис. 33) с расстоянием между точками I^* и 2^* в системе координат системы измерения (рис. 34).

Если эти расстояния одинаковы, то впишем в массив точек M_1 бесконечно длинный цилиндр номинального диаметра D_H .

В результате выполнения поиска отсчётной поверхности, формально записанного в виде алгоритма поиска минимума суммы квадратов отклонений точек реальной поверхности, по отношению к отсчётной номинальной поверхности, определим координаты точки, через которую проходит ось в пространстве координат системы измерения и направление оси номинального цилиндра.

Вычислим координаты точек пересечения оси отсчётного цилиндра с отсчётными плоскостями. Расстояние между точками пересечения оси отсчётного цилиндра O_2 и O_3 с отсчётными плоскостями и есть искомая длина L (рис. 34).

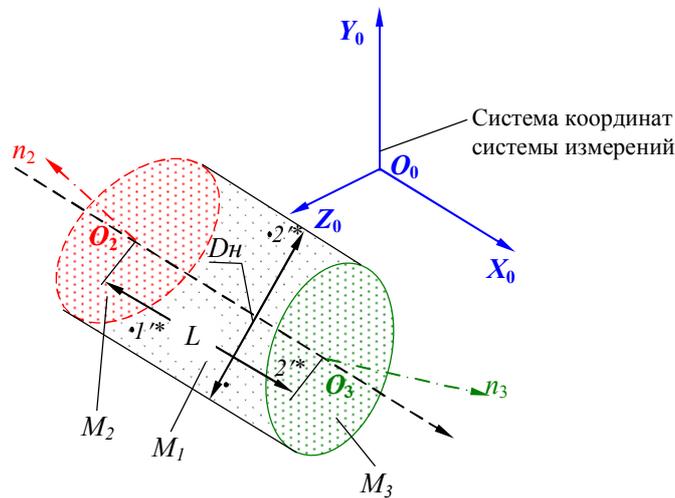


Рис. 34

Если эти расстояния неодинаковы, то впишем в массив точек M_1 бесконечно длинный цилиндр, у которого расстояние между соответствующими характерными точками на эквидистантной поверхности в номинальной системе координат элемента (например между точками I' и $2'$ или $2'$ и $3'$ или $3'$ и I') имеют такое расстояние, как и расстояние между одноимёнными точками в системе координат системы измерения (например, между точками I^* и 2^* или 2^* и 3^* , или 3^* и I^*).

В результате выполнения условия поиска отсчётной поверхности, формально записанного в виде минимума суммы квадратов отклонений точек реальной поверхности, по отношению к отсчётной эк-

видистантной, определим координаты точки, через которую проходит ось цилиндра и направление оси цилиндра в пространстве координат системы измерения.

Вычислим координаты точек пересечения оси отсчётного цилиндра с отсчётными плоскостями. Расстояние между точками O_2 и O_3 пересечения оси отсчётного цилиндра с отсчётными плоскостями и есть искомая длина L ; определено положение оси номинального цилиндра в системе координат системы измерения (рис. 35).

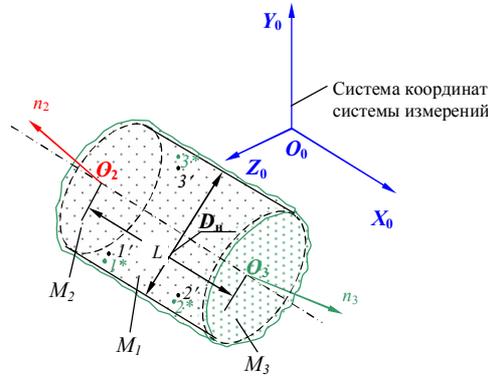


Рис. 35

Вся совокупность ответов на поставленные выше вопросы о параметрах реальной геометрии представлена на плоском рисунке (рис. 36).

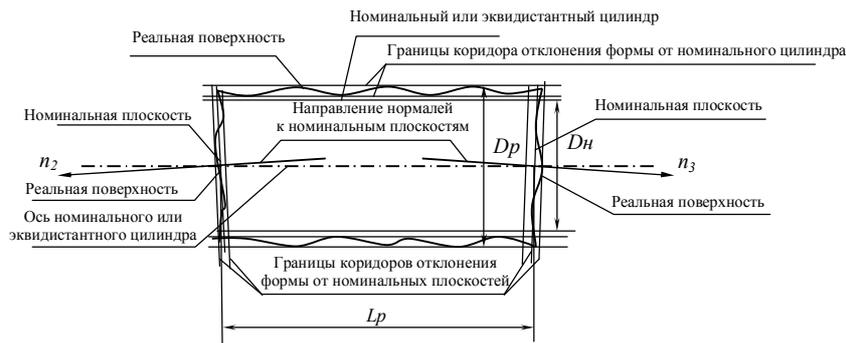


Рис. 36

Для пространственных (3D) элементов с осевой симметрией и плоскостей необходимо указывать (координировать) хотя бы три точки (репера) на номинальном элементе. Или две точки на номинальной или реальной поверхности и одно направление (например, направление нормали к плоскости или оси симметрии поверхности вращения), которые предотвратят возможный поворот номинальной системы координат эквидистантного элемента вокруг оси симметрии, приводящий к неопределённости положения номинальной его системы координат, по отношению к геометрии реального элемента.

На этих трёх характерных точках или направлении и точке в системе координат проекта может быть построена собственная система координат каждой j -й номинальной поверхности, по отношению к которой может быть определена номинальная система координат поверхности (элемента).

Точки пересечения оси отсчётного цилиндра с отсчётными плоскостями и репера для привязки геометрии элементов с центральной и осевой симметрией к системе координат построения собственных систем координат отсчётных поверхностей используем для построения систем координат реальных поверхностей (рис. 37).

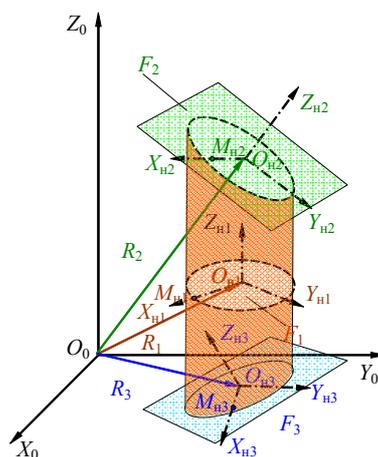


Рис. 37. Определение положения номинальных поверхностей F_1 – цилиндрической и F_2, F_3 – плоских, уравнения которых представлены в номинальных системах координат $O_{n1}, X_{n1}, Y_{n1}, Z_{n1}$, $O_{n2}, X_{n2}, Y_{n2}, Z_{n2}$ и $O_{n3}, X_{n3}, Y_{n3}, Z_{n3}$ в системе координат системы измерения O_0, X_0, Y_0, Z_0

На рис. 37 система координат цилиндрической поверхности определена осью Z_{n1} эквидистантной поверхности и точкой репера, определяющей положение оси X_{n1} на цилиндре. Системы координат плоскостей 2 и 3 определены, соответственно, двумя точками пересечения оси цилиндра O_{n1} и O_{n2} с отсчётными плоскостями торцов, совпадающими с эквидистантными поверхностями торцов; двумя направлениями нормалей Z_{n2} и Z_{n3} к отсчётным плоскостям и двумя реперами, определяющими положение осей X_{n2} и X_{n3} . Оставшиеся оси Y_{n1}, Y_{n2} и Y_{n3} достраиваются до правосторонних систем координат, принятых в машиностроении по известным правилам.

При соблюдении правил привязки система координат реального элемента может быть отождествлена с системой координат эквидистантного элемента.

Всё сказанное выше относится к расположению реальных элементов детали по отношению друг к другу и их форме по отношению к номинальной форме.

Полученный результат хорош для теории, но возникает практическая проблема: как совместить системы координат номинального элемента и систему координат системы измерения при сравнении номинальной и реальной геометрии элементов?

После долгих размышлений на эту тему возникает новый вопрос: а нужно ли это?

В самом деле, что нас интересует, в конце концов? Ответ на вопрос: как расположены элементы детали друг относительно друга после формирования всех поверхностей и насколько отличается их геометрия от номинальной геометрии?

Откуда это можно узнать? Только после измерения координат точек поверхностей в системе координат системы измерения и привязки к реальной геометрии систем координат номинальных элементов.

Последовательно впишем в облака точек реальных элементов эквидистантную геометрию характерных точек, полученную в номинальной системе координат. Привяжем систему координат эквидистантного элемента, совпадающую с номинальной системой координат номинального элемента, к реальному элементу по трём характерным точкам или направлению и двум точкам, и будем считать эту систему координат *системой координат реального элемента* (рис. 43). Сравнение положения системы координат реального элемента с номинальными положениями номинальных систем координат элементов и номинальной формой элементов в номинальной системе координат проекта позволит определить её отличие (отклонение расположения и формы) от номинальной геометрии.

Взаимное расположение реальных элементов друг относительно друга определяется по расположению систем координат эквидистантных элементов. Реальный элемент, относительно которого определяется расположение других реальных элементов, называют *базовым элементом* или *базой*. В этой системе координат представлены все элементы с их реальной геометрией.

На рис. 38 представлено формирование систем координат отсчётных поверхностей осесимметричного элемента конструкции, ограниченного боковой цилиндрической поверхностью 1 и двумя плоскими торцами 2 и 3.

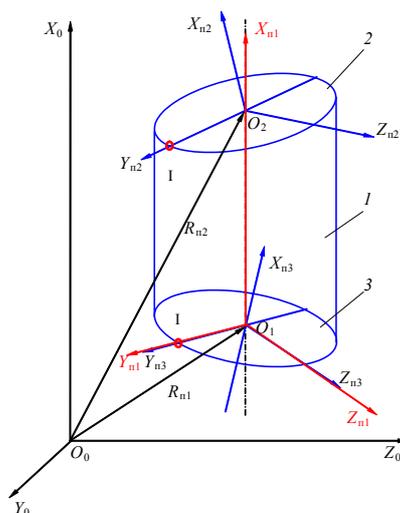


Рис. 38. К определению систем координат отображающих поверхностей детали

Формирование систем координат плоских торцов можно представить следующим образом.

Центром отсчётной поверхности плоского торца детали будем считать точку O_2 пересечения оси цилиндрической отсчётной поверхности с отсчётной поверхностью плоскости торца. Нормаль к отсчётной поверхности плоскости торца с началом в центре образует ось X_{n2} . Ось Y_{n2} строят следующим образом. Через ось X_{n2} и реперный знак I, находящийся на отсчётной плоскости, проводят плоскость и в ней по нормали к оси X_{n2} от центра в сторону реперного знака направляют ось Y_{n2} . Третью ось Z_{n2} достраивают по правилам, изложенным ранее. Для второго торца проводят аналогичные построения. Для цилиндрической отсчётной поверхности, ось которой проходит через центры торцов, начало координат располагают в одном из центров торцов (O_1), ось X_{n1} направляют вдоль направления оси $O_1 - O_2$, ось Y_{n1} строят в плоскости, проходящей через ось X_{n1} и реперный знак I', находящийся на отсчётном цилиндре, ближайшем к началу координат, а третью ось достраивают по правилам, изложенным ранее.

Для формирования системы координат каждой из отображающих поверхностей достаточно одного реперного знака на каждой из них.

В качестве системы координат осесимметричного элемента конструкции может быть использована система координат любой из поверхностей, принятых за базовую.

В ракетно-космическом машиностроении в качестве систем координат объекта производства используют:

- систему координат, построенную на отсчётной поверхности торца 3;
- систему координат, построенную на боковой (цилиндрической) отсчётной поверхности 1.

В зависимости от выбранной схемы базирования изменяется состав погрешностей расположения поверхностей (см. рис. 39).

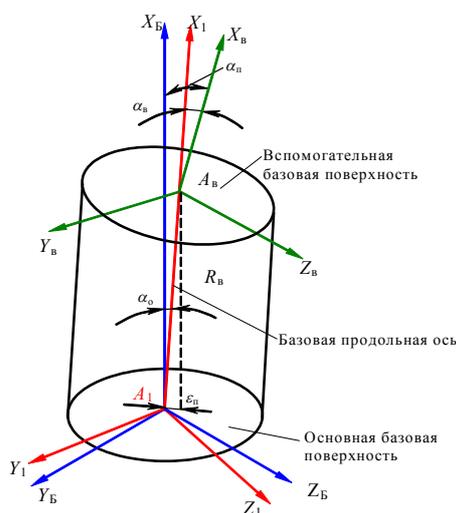


Рис. 39. Схемы задания систем координат осесимметричного элемента конструкции

Если в качестве базовой системы координат O_B, X_B, Y_B, Z_B выбрана первая, то в ней определяют положение систем координат всех остальных поверхностей. Такую поверхность называют основной базовой поверхностью. В ней определены положения систем координат O_B, X_B, Y_B, Z_B другого торца (вспомогательной базовой поверхности) вектором R_B и матрицей A_B систем координат O_1, X_1, Y_1, Z_1 отсчётной цилиндрической боковой поверхности вектором $R_1 = 0$ и матрицей A_1 соответственно.

Если в качестве базовой системы координат выбрана вторая, то ось X_1 совпадает с отсчётной боковой поверхностью цилиндра и направлена от центра основной базовой к центру вспомогательной базовой поверхности. Ось Y_1 строят в плоскости, проходящей через ось X_1 и реперный знак I ближайшего к началу координат контролируемого сечения, а третью ось Z_1 достраивают по правилам, изложенным ранее.

Если номинальное положение плоскостей торцов перпендикулярно оси цилиндра, а центры торцов лежат на оси, то в зависимости от способа формирования системы координат состав погрешностей взаимного расположения поверхностей в системе координат объекта производства будет различным. В первом случае в качестве погрешностей расположения для верхнего торца – смещение центра верхнего торца от номинального положения ϵ_n , отклонение верхнего торца от параллельности α_n и закрутка оси Y_B вспомогательной поверхности по отношению к основной (нижнего торца). Во втором случае в качестве погрешности расположения отображающих поверхностей будут: погрешность расстояния между центрами торцов ΔL ; закрутка осей стабилизации вспомогательной поверхности по отношению к основной; отклонение от перпендикулярности торцов α_o и α_b .

Системы координат получили специальные наименования. Первая – система координат основной базовой поверхности (СК ОБП), вторая – система координат базовой оси (СК БО).

Для поверхностей, номинальные координаты которых задаются координатами точек и правилами интерполирования в трехмерном пространстве (аэродинамические и гидродинамические поверхности), собственная система координат совпадает с номинальной, в которой эти точки заданы системой координат, связанной с эквидистантными характерными точками.

По известным из линейной алгебры соотношениям в системе координат проекта определим положение систем координат каждого номинального элемента, а в системе координат системы измерения определим положение систем координат каждого реального элемента.

Выбрав систему координат базы, определим положение системы координат каждого элемента в системе координат базы как в системе координат проекта, так и в системе координат системы измерения

Для каждого элемента в системе координат базы определим расположение реального элемента относительно номинального [12]. Он будет сдвинут и повернут относительно номинального.

Для каждого i -го элемента:

- номинальное расположение любого номинального элемента по отношению к номинальной базе в номинальной системе координат сводится к однозначному определению координат положения центра номинальной системы координат R_{Hj} , и матрицы её поворота A_{Hj} ;
- реальное расположение любого реального элемента по отношению к базе в системе координат системы измерения сводится к однозначному определению координат положения центра R_p , и матрицы поворота A_p ;
- сравнение реального положения системы координат реального элемента относительно номинального его положения в системе координат номинального элемента сводится к однозначному определению вектора смещения ΔR_{pHj} и матрицы поворота ΔA_{pHj} (рис. 40).

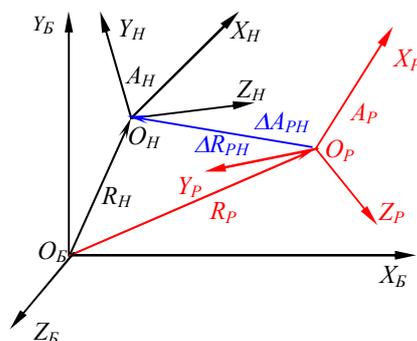


Рис. 40

Здесь

$$\Delta R_{pH} = A_{H}^T \cdot (R_p - R_H),$$

$$\Delta A_{pH} = A_{H}^T \cdot A_p.$$

Перейдём к определению погрешностей расположения реальных элементов.

Погрешности расположения реальных элементов (поверхностей), к которым привязаны системы координат эквидистантной геометрии, определяются относительно номинальных элементов в системе координат базы.

*Погрешность расположения реального элемента по отношению к **номинальному** будет определяться двумя компонентами: вектором смещения ΔR_{pH} и матрицей поворота ΔA_{pH} .*

Отклонение формы каждого реального элемента может быть получено после вычисления отклонения реальной геометрии от номинальной.

Для определения положения отсчётной поверхности в системе координат системы измерения используем системы координат реальных поверхностей реальных элементов.

Восстановим в них по эквидистантам исходную форму номинальных элементов в системах координат реальных элементов и определим отклонения формы реальных элементов относительно номинальной геометрии.

Если относительное положение систем координат реальных элементов и абсолютное отклонение формы реальных элементов, определённых по отношению к номинальным элементам **равны или не превосходят поля допуска**, то взаимное положение этих реальных элементов и отклонение их формы может считаться полностью соответствующим номинальной геометрии элементов в номинальной системе координат.

Проводя в системе координат системы измерения определение (вычисление) расположения систем координат реальных элементов относительно **базы** и отклонения формы относительно номинальной их геометрии в номинальной системе координат, мы получаем возможность ответить на все поставленные вопросы.

Таким образом, все условия оценки отклонения формы элементов от номинальной формы и их положения от номинального положения определены по отношению к номинальному расположению для элементов любой формы, а не только для элементов, имеющих форму прямой, круга, плоскости и цилиндра по одинаковому для всех форм поверхностей алгоритму.

Выводы

1. Проведен анализ адекватности представления (описания) измеренной реальной геометрии поверхностей детали в действующих отечественных нормативных документах.
2. Показано, что выбор прилегающих отсчётных элементов (профилей, поверхностей) неприемлем из-за неоднозначности и нереализуемости для технических измерений двухточечными методами измерений.
3. Для элементов, не имеющих кривизны (прямая или плоскость), в качестве однозначных отсчётных элементов определение отклонения формы реальных элементов могут быть использованы средние элементы, определяемые по минимуму суммы квадратов отклонений точек реальных элементов от элемента, имеющего ту же форму, что и номинальные. Их положение в системе координат системы измерения определяется положением центра тяжести массива точек реального элемента, а направление (ориентация в системе координат системы измерения) в соответствии с направлениями главных центральных осей инерции того же массива точек.
4. Для элементов, имеющих кривизну, в качестве однозначных отсчётных элементов при определении отклонений формы реальных элементов используются номинальные элементы в номинальной системе координат. Положение системы координат номинальных элементов в системе координат системы измерения определяется по минимуму суммы квадратов отклонений точек реального элемента от элемента эквидистантного к номинальному элементу в системе координат номинального элемента. Это же положение определяет положение системы координат реального элемента в системе координат системы измерения. По взаимному расположению систем координат реальных элементов могут быть определены отклонения расположения реальных элементов в системе координат системы измерения.
5. Отклонение формы реального элемента от номинального имеет две компоненты:
 - эквидистантное смещение относительно номинальной поверхности.
 - искривление номинальной поверхности, аналогичное по смыслу волнистости и шероховатости,
6. Отклонение расположения системы координат реального элемента от его номинального расположения в системе координат элемента, принятого за базу, также имеет две компоненты:
 - смещение системы координат реального элемента относительно системы координат номинального элемента;
 - поворот системы координат реального элемента относительно системы координат номинального элемента.
7. Определение положения системы координат реального элемента в системе координат системы измерения может быть осуществлено по следующему алгоритму:
 - создать номинальную 3D–геометрию детали в номинальной системе координат проекта и определить в ней положение номинальной системы координат каждого элемента (линии или поверхности);
 - на номинальной геометрии каждого элемента в номинальной системе координат определить координаты характерных (реперных) точек, принадлежащих элементу, разнесённых на максимальное расстояние друг от друга (двух точек для профиля или трёх точек, не лежащих на одной прямой, для поверхности);
 - измерить координаты характерных точек реальных элементов в системе координат системы измерения;
 - подобрать к каждому номинальному элементу эквидистанту в номинальной системе координат элемента, у которой расстояние между характерными точками будет равно расстоянию между измеренными одноимёнными точками в системе координат системы измерения;
 - в системе координат системы измерения совместить одноимённые измеренные характерные точки каждого элемента с соответствующими им характерными точками эквидистант и по ним определить положение номинальных систем координат номинальных элементов в системе координат системы измерения.
8. Результаты обработки измерений координат точек реальных поверхностей могут быть представлены по следующему алгоритму:

- определить координаты номинальных элементов в системе координат системы измерения;
- по номинальным элементам в системе координат системы измерения определить отклонения точек реальных элементов от номинальных;
- выбрать положение системы координат базы в системе координат системы измерения и по положению систем координат номинальных элементов в системе координат системы измерения определить отклонение расположения реальных элементов относительно системы координат базы;
- вычислить параметры расположения элементов в терминах протокола измерения и сравнить с допустимыми значениями этих параметров;
- оформить протокол результатов измерений с оценкой соответствия всех контролируемых параметров заданным полям допусков.

Список литературы

1. Фролов С.А. Начертательная геометрия. – М.: Машиностроение, 1978. – С. 239.
2. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики / пер. с англ. – М.: Мир, 2001.
3. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве / пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – С. 304.
4. Ferguson J.C. Vuxtivariabxe curve Interpoxation, Report №.D2-22504, The Boeing Co.,Seattx. – Washington, 1963.
5. Coons S.A. Surfaces for Computer Aided of Spase Forms.Report MAC-TR- 41, Projekt MAC, M.I.T., 1967.
6. Абибов А.Л., Бирюков Н.М., Бойцов В.В., Григорьев В.П., Елисеев В.В., Зернов И.А., Коноров Л.А., Чударев П.Ф. Технология самолётостроения. – М.: Машиностроение, 1970. – С. 600.
7. Григорьев В.П. Взаимозаменяемость агрбгатов в самолётостроении. – М.: Машиностроение, 1969. – С. 260.
8. Технология сборки и испытаний космических аппаратов: учебник для высших технических учебных заведений / Беляков И.Т., Зернов И.А., Антонов Е.Г. и др. / под общ. ред. И.Т. Белякова и И.А. Зернова. – М.: Машиностроение, 1990. – С. 352.
9. Котельников В. А. О пропускной способности эфира и проволоки в электросвязи – Всесоюзный энергетический комитет // Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности, 1933. – Репринт статьи в журнале УФН, 176:7, 2006. – С. 762-770.
10. Дунин- Барковский И.В., Карташова А.Н. О надежности измерений шероховатости поверхности // Научные доклады высшей школы. – Машиностроение и приборостроение, 1958. – № 4. – С. 160-169.
11. Дунин-Барковский И.В., Карташова А.Н. Измерения и анализ шероховатости, волнистости и некруглости поверхности. – М., 1978. – С. 231.
12. Тарасов В.А., Кашуба Л.А. Теоретические основы технологии ракетостроения. – М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2006. – С. 351.