УДК 519.673

АНАЛИЗ СИСТЕМ ЛИНДЕНМАЙЕРА С ПОМОЩЬЮ ОДНОМЕРНЫХ МАРКОВСКИХ СИСТЕМ

Ершов Николай Михайлович

Доцент;
ГБОУ ВО МО «Университет «Дубна»,
Институт системного анализа и управления;
141980, Московская область, г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: ershovnm@gmail.com.

Работа посвящена вопросам построения и исследования систем Линденмайера с помощью марковских систем. Рассматривается реализация контекстно-свободных детерминированных и стохастических систем Линденмайера. Показывается, как методы анализа марковских систем могут быть применены к оценке функций роста систем Линденмайера.

Ключевые слова: системы Линденмайера, функция роста, строковые перезаписывающие системы, марковские системы.

ANALYSIS OF LINDENMAYER SYSTEMS BY USING ONE-DIMENSIONAL MARKOV SYSTEMS

Ershov Nikolay

Assistant professor;
Dubna State University,
Institute of system analysis and management;
141980, Russia, Moscow Region, Dubna, Universitetskaya str., 19;
e-mail: ershovnm@gmail.com.

The paper is devoted to the construction and analysis of Lindenmayer systems using Markov systems. The implementation of the context-free deterministic and stochastic Lindenmayer systems is considered. It is shown how the methods of analyzing Markov systems can be applied to the estimation of the growth functions of Lindenmayer systems.

Keywords: Lindenmayer systems, growth function, string rewriting systems, Markov systems.

Системы Линденмайера

Детерминированной контекстно-свободной системой Линденмайера (*D0L*-системой) называется тройка вида $L = \langle A, \Sigma, w_0 \rangle$, где A – конечный алфавит системы, Σ – набор подстановок, отображающий каждый символ из A в цепочку символов (возможно, пустую) из этого же алфавита, $w_0 \in A^+$ – аксиома, т.е. непустая начальная цепочка над A [1].

Эволюция системы L начинается с аксиомы w_0. На каждом шаге эволюции каждый символ текущей цепочки заменяется соответствующей подцепочкой согласно системе подстановок Σ. Предполагается, что все эти замены выполняются параллельно за один шаг времени.

Рассмотрим простой пример *D0L*-системы, алфавит которой содержит два символа a и b, с системой правил: $L_0 = \{a \to ab, b \to a\}$. Пусть аксиома состоит из единственного символа $w_0 = b$. Тогда, первые несколько шагов эволюции данной системы будут выглядеть следующим образом.

$$b \to a \to ab \to aba \to abaab \to abaababa \to abaababaabaab \to \ldots$$

Если посчитать длины цепочек на каждом шаге эволюции (так называемая *функция роста* системы Линденмайера), то получим последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, …, которая является последовательностью Фибоначчи: $\varphi_0 = \varphi_1 = 1$, $\varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1}$, $n > 0$.

2. Графическая интерпретация L-систем

Пусть задан алфавит $T = \{F, f, +, –,*, :, [,]\}$, символы которого трактуются, как команды некоторому рисующему устройству («черепахе») [2]. В каждый момент времени это устройство находится в некоторой точке и ориентировано в некотором направлении. Положение плюс направление назовем состоянием устройства.

Символы алфавита T трактуются следующим образом:

- команда «F» – перемещение устройства на расстояние d в текущем направлении с прорисовкой линии движения;
- команда «f» – аналогичная команда, но движение производится без прорисовки;
- команда «+» – поворот устройства против часовой стрелки на заданный угол α;
- команда «–» – поворот устройства по часовой стрелке на заданный угол α;
- команда «*» – увеличение длины d в k раз;
- команда «:» – уменьшение длины d в k раз;
- команда «[» – записать в стек текущее состояние, используется для организации ветвления;
- команда «]» – извлечь из стека состояние и сделать его текущим, возврат к точке ветвления.

В процессе эволюции системы могут использоваться и другие символы, которые, по умолчанию, игнорируются рисующим устройством.

3. Представление D0L-систем с помощью марковских систем

Нетрудно убедиться, что *D0L*-системы являются просто частным случаем марковских систем [3]. Для этого марковская система Σ должна удовлетворять следующим трем свойствам:

1. вероятность ω присоединения символов (при разрезании цепочки) равна нулю;
2. любая подстановка системы имеет вид $a \rightarrow_{[1]} \alpha$, где a символ из алфавита системы, α – цепочка в этом же алфавите;
3. в системе правил нет двух подстановок с одинаковой левой частью.

Первое свойство гарантирует, что при разделении цепочки на подцепочки будут получаться подцепочки длины строго в один символ. В силу второго и третьего свойств каждый символ цепочки гарантированно (т.е. детерминировано) будет заменен на соответствующую подцепочку. Если для некоторого символа нет подстановки, то он останется неизменным (аналогичное предположение действует обычно и в L-системах). Таким образом, эволюция марковской системы, удовлетворяющей перечисленным условиям, оказывается однозначно определенной и, следовательно, эквивалентной эволюции соответствующей L-системы.

На рисунке 1 показана кривая, полученная интерпретацией состояния L-системы после 30 шагов эволюции: $L_1 = \{x \rightarrow -: F\,x\}$ с аксиомой $w_0 = F\,x$ и параметрами рисования $\alpha = 90°$, $k = 1.1$. Символ x является служебным и не используется при прорисовке. Маркером отмечена начальная точка траектории.

На рисунке 2 показана кривая, полученная интерпретацией состояния похожей L-системы после 270 шагов эволюции: $L_2 = \{x \rightarrow -: [F]\,x\}$, с аксиомой $w_0 = [F]\,x$ и параметрами рисования $\alpha = 4.3°$, $k = 1.01$. За счет использования скобок рисование отрезков каждый раз начинается со стартовой точки.

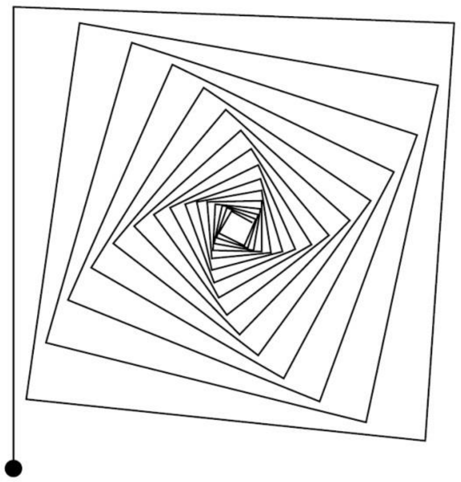

Рис. 1. Эволюция системы L_1

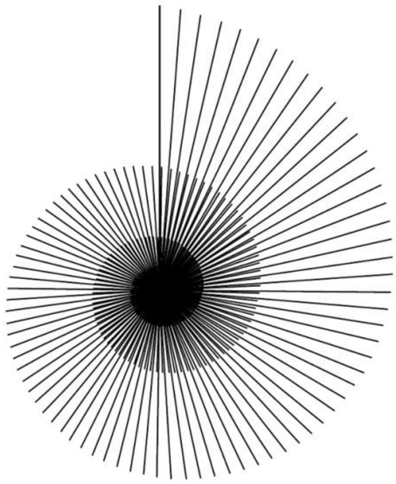

Рис. 2. Эволюция системы L_2

На рисунке 3 показан процесс роста древовидной структуры, описываемой следующей системой Линденмайера: $L_3 = \{x \rightarrow : [-F\,x] + F\,x\}$. Аксиомой является цепочка $w_0 = F\,x$. Здесь символ x также играет вспомогательную роль – служит точкой роста структуры. Маркером на рисунке отмечена начальная точка траектории. Параметры рисующего устройства: $\alpha = 50°$, $k = {}^5/_3$.

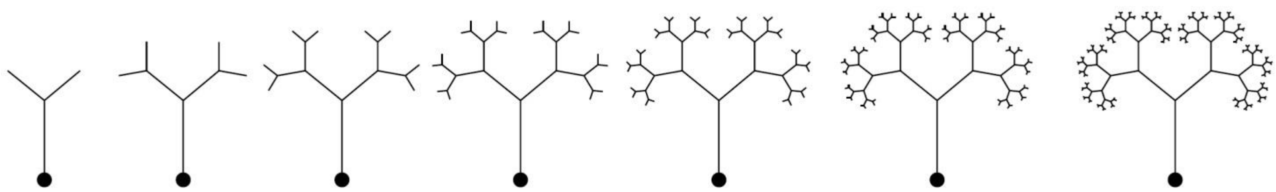

Рис. 3. Рост древовидной структуры L_3

4. Стохастические контекстно-свободные L-системы

Обобщением *D0L*-систем являются *стохастические* контекстно-свободные *L*-системы (называемые 0L-системами). В таких системах каждой подстановке приписывается дополнительный числовой параметр $p \in [0,1]$, представляющий собой вероятность применения этой подстановки. Соответственно, в системе подстановок теперь допускается наличие нескольких подстановок с одинаковой левой частью, однако, налагается следующее ограничение: суммарная вероятность подстановок с одинаковой левой частью не должна превышать единицы.

Очевидно, что стохастические контекстно-свободные *L*-системы являются частным случаем марковских систем при выполнении следующих двух условий: 1) вероятность ω присоединения символов (при разрезании цепочки) равна нулю; 2) каждое правило имеет вид $a \rightarrow_{[p]} \alpha$, где a символ из алфавита системы, α – цепочка в этом же алфавите, p – вероятность применения данной подстановки.

Для примера рассмотрим 0L-систему, правила которой получены расширением *D0L*-системы L_2: $L_4 = \{x \rightarrow_{[p]} - : [F]\,x,\ x \rightarrow_{[q]} - * [F]\,x\}$. На рисунке 4 показано состояние этой системы через 270 шагов эволюции, аксиома и параметры устройства те же самые.

На рисунке 5 показан результат роста древовидной структуры, описываемой следующей 0L-системой: $L_5 = \{x \rightarrow_{[p]} : [- - F\,x] + F,\ x \rightarrow_{[p]} : [+ + F\,x] - F\}$. Начальная цепочка $w_0 = F\,x$, вероятность $p = 0.5$, параметры рисующего устройства те же.

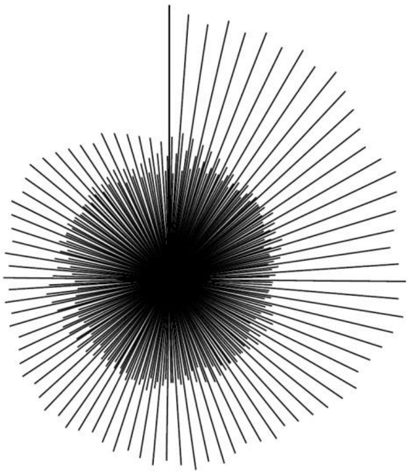

Рис. 4. Пример эволюции стохастической системы L_4

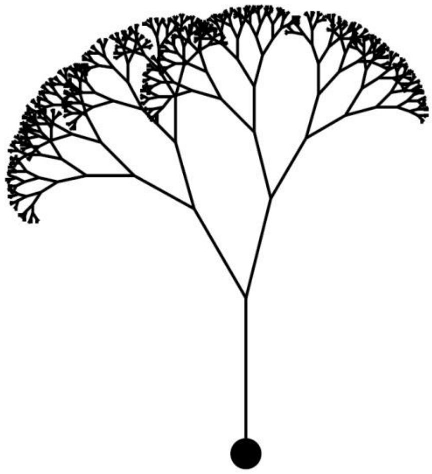

Рис. 5. Пример эволюции древовидной стохастической системы L_5

5. Численный анализ поведения стохастических систем Линденмайера

Если вероятности применения подстановок в стохастической L-системе достаточно малы, то изменение *концентраций* входящих в цепочку символов (а также ее *длины)* может быть описано системой дифференциальных уравнений [3]. Для примера рассмотрим систему, аналогичную системе L_0:

$$L_6 = \{a \rightarrow_{[p]} ab,\ b \rightarrow_{[p]} a\}.$$

Обозначим: $a(t)$ – концентрация символов a в цепочке в момент времени t, $N(t)$ – длина цепочки в момент времени t. Тогда концентрация символов b будет равна $b(t) = 1 - a(t)$, т.к. других символов, кроме a и b в системе нет. Система дифференциальных уравнений, описывающих динамику такой системы, имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = p(-a)a + pb = -p(a^2 + a - 1), \\ \dfrac{dN}{dt} = paN. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы имеет одно устойчивое состояние:

$$a^* = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

На рисунке 6 показано изменение концентрации $a(t)$ со временем для начальной цепочки $w_0 = b^{100}$. Сплошной линией показан результат моделирования соответствующей марковской системы, пунктирной – теоретическая оценка, полученная численным решением первого уравнения вышенаписанной системы дифференциальных уравнений.

Длина же цепочки увеличивается бесконечно с экспоненциальной скоростью (второе уравнение). На рисунке 7 приведены графики роста длины цепочки для того же расчета, что и на рисунке 6. Сплошная линия – результат моделирования, пунктир – теоретическая оценка роста величины $N(t)$, полученная численным решением второго уравнения системы.

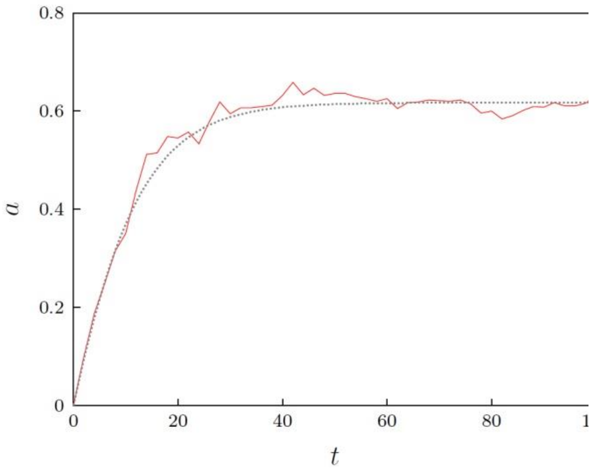

Рис. 6. Зависимость концентрации символов a от времени для системы L_6

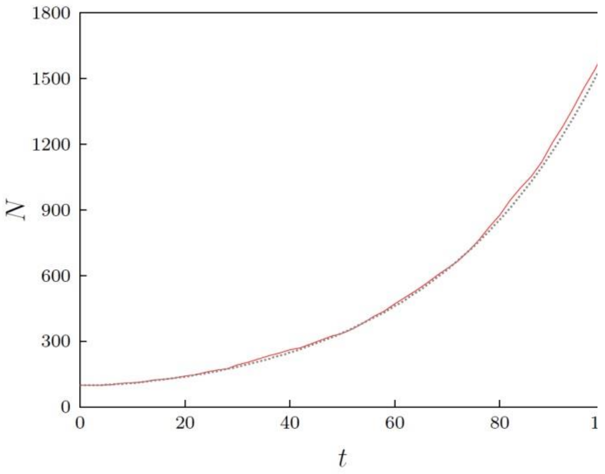

Рис. 7. Зависимость длины цепочки от времени для системы L_6

Заключение

В результате выполненной работы получены следующие результаты:

- показано, что контекстно-свободные системы Линденмайера (как детерминированные, так и стохастические) являются частным случаем марковских систем при значении параметра $\omega = 1$ (вероятность присоединения символов при разбиении цепочки на подцепочки);
- рассмотрено несколько примеров контекстно-свободных L-систем и их графические интерпретации;
- показано, как некоторые аспекты поведения стохастических L-систем, в частности, функция роста, могут быть описаны с помощью систем дифференциальных уравнений;
- приведены результаты численного сравнения результатов компьютерного моделирования систем Линденмайера с аналитическими оценками.

Список литературы

1. Grzegorz Rozenberg and Arto Salomaa. Mathematical Theory of L Systems. Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA, 1980.
2. Przemyslaw Prusinkiewicz and Aristid Lindenmayer. The algorithmic beauty of plants. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1996.
3. Ершов Н. М. Анализ массового поведения в марковских системах // Системный анализ в науке и образовании. — 2017. — № 4. — С. 16-23.