

## РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ИНЕРЦИАЛЬНАЯ НАВИГАЦИЯ И ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КЛА В РИМАНОВЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ. Ч. 3: ИНЕРЦИАЛЬНАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ НАВИГАЦИЯ (НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА В СТО / ОТО И КООРДИНАТЫ ФЕРМИ)

Ульянов Сергей Викторович

*Доктор физико-математических наук, профессор;  
ГБОУ ВО «Университет «Дубна»,  
Институт системного анализа и управления;  
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;  
e-mail: ulyanovsv@mail.ru.*

*Рассмотрена модель и алгоритм релятивистской инерциальной навигации в инерциальной и неинерциальных системах отсчета наблюдателя. Описаны особенности моделей метрик пространства - времени с ускорением. Приведены модели параллельного переноса Ферми и Ферми – Уолкера. Дано описание координат Ферми.*

Ключевые слова: релятивистская инерциальная навигация, параллельный перенос, неинерциальные системы отсчета.

## RELATIVISTIC INERTIAL CELESTIAL NAVIGATION AND INTELLIGENT CONTROL OF THE SOLAR COSMIC SATELLITE SYSTEMS IN RIEMANNIAN METRIC SPACES UNDER STOCHASTIC EXCITATIONS. PT. 3: RELATIVISTIC INERTIAL NAVIGATION (NONINERTIAL FRAME REFERENCES IN SPECIAL AND GENERAL RELATIVITY THEORY AND FERMI COORDINATIONS)

Ulyanov Sergey

*Doctor of Science in Physics and Mathematics, professor;  
Dubna State University,  
Institute of system analysis and management;  
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;  
e-mail: ulyanovsv@mail.ru.*

*Model and algorithm of relativistic inertial navigation in inertial and noninertial frame references of observer are considered. Peculiarities of space – time metric models with acceleration is described. Parallel displacement models as Fermi and Fermi – Walker are introduced. The description of Fermi coordinates is given.*

Keywords: relativistic inertial navigation, parallel transport, noninertial frame references.

### Введение

Математическое решение задачи релятивистской инерциальной навигации основано на рассмотрении соответствующих систем координат и связанных с ними тетрад базисных векторов. Задается семейство сопутствующих мировых линий  $C$  малого тела, занимающего малый объем  $dV_3$  в римановом пространстве в ОТО или пространстве Минковского в СТО. Из этого семейства выбирается мировая линия, отвечающая некоторой индивидуализированной точке  $M$  объема  $dV_3$ . Для данного

случая рассматриваются пять следующих систем координат и соответствующих тетрад базисных векторов [1, 2]:

1. Инерциальная система координат наблюдателя  $y^i$  в СТО с базисными векторами  $\exists_i^0$  и инвариантным интервалом,  $ds$ , который в координатах наблюдателя  $ds^2 = c^2 dt^2 - \sum_{a=1}^3 (dy^a)^2$ ,  $t$  – глобальное время наблюдателя.
2. Семейство тетрад базисных векторов Ферми – Уолкера  $\exists_a$  на мировой линии  $C$  определяемое в виде:  $\frac{d\exists_a^k}{ds} = (a^k u^j - a^j u^k) \exists_{aj}$ .
3. Лагранжевы координаты  $\xi^\alpha$ , индивидуализирующие линии семейства  $C$ , глобальное время  $\tau$  для семейства  $C$ .
4. Собственный репер  $\check{\exists}_i$ , который в данный момент собственного времени  $\tau$  на кривой  $C$  совпадает с тетрадой  $\exists_a$  репера Ферми – Уолкера. Для локального базиса  $\check{\exists}_i$  выполняется условие  $\frac{d\check{\exists}_i}{ds} = 0$ , т.е. рассматривается локальный инерциальный базис, определяющий свободно падающий репер в гравитационном поле в рамках ОТО.
5. Система координат Ферми  $\{y^a, t\}$ , для которых координатные базисы  $\frac{d\exists_i}{ds} = 0$ , т.е. вдоль кривой  $C$  в ОТО координатные базисы  $\exists_i$  постоянны и переносятся вдоль линии  $C$  параллельно.

Введенные системы координат позволяют разработать алгоритм решения задачи релятивистской инерциальной навигации в инерциальных системах отсчета в рамках СТО и ОТО.

Для рассматриваемой точки по заданной системе ее ускорений вдоль ее искомой мировой линии  $C$  требуется определить закон движения относительно известного наблюдателя. Для этого вектор 3-ускорения  $\check{a}$  в точке  $M$  измеряется в каждой точке пространства акселерометром. Последний скреплен с ортогональным базисом  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , орты которого совпадают с неподвижными по направлению осями гироскопов. В свою очередь, оси гироскопов образуют неизменно ориентированную платформу в  $dV_3$  и переносятся вдоль мировой линии по закону переноса Ферми – Уолкера.

Следовательно, определяется сопутствующий ориентированный триэдр Ферми – Уолкера и измеряются компоненты ускорения  $\check{a}^\alpha$  в локальном базисе  $\check{\exists}_i$ , который совпадает с базисом  $e_a$ . Собственное время  $\tau$  вдоль искомой мировой линии  $C$  измеряется введенными в систему измерений часами. Вектор 4-скорости  $u$ , ортогональный к ускорению  $\check{a}$ , определяется по показаниям приборов.

В результате интегрируется уравнение  $\frac{du}{d\tau} = \frac{1}{c} \check{a}$  вдоль линии  $C$ , а вид самой линии  $C$  определяется как огибающая векторов  $u$ . Таким образом, определяется закон движения точки  $M$  в системе отсчета инерциального наблюдателя по известному ускорению  $\check{a}$ , т.е. определяется вид мировой линии  $C$ , отвечающей заданным начальным данным. В рамках координат Ферми (связанных с видом кривой  $C$  – см. Приложение 3) с помощью преобразований координат общего вида во всех точках кривой  $C$  для метрики пространства – времени в ОТО и символов Кристоффеля имеем:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \sum_{\alpha=1}^3 (dy^\alpha)^2, \quad \Gamma_{ij}^k (y^l) = 0.$$

Согласно определению введенных систем отсчета, координатам Ферми  $y^i$  соответствует вдоль линии  $C$  голономный базис  $\vartheta_i$ , орты которого (благодаря условию  $\frac{d\vartheta_i}{ds} = 0$ ) переносятся параллельно вдоль искомой линии  $C$ . Такое определение тетрады позволяет рассматривать ее в качестве аналога глобальной декартовой системы отсчета в СТО [2].

Вдоль линии  $C$  из закона параллельного переноса Ферми – Уолкера имеем:

$$\frac{de_\alpha}{ds} = -\frac{1}{c^2} \tilde{a}_\alpha e_0; \quad \frac{de_0}{ds} = \frac{1}{c^2} \tilde{a}_\alpha e^\alpha; \quad e_i = L_i^j \vartheta_j. \quad (1)$$

В (1)  $L_i^j$  – матрица общего преобразования Лоренца [3-6], имеющая следующий вид:

$$\|L_i^j\| = \begin{pmatrix} 1+k(\mathcal{G}^1)^2 & k\mathcal{G}^1\mathcal{G}^2 & k\mathcal{G}^1\mathcal{G}^3 & -\frac{\mathcal{G}^1/c}{\sqrt{1-\mathcal{G}^2/c^2}} \\ k\mathcal{G}^2\mathcal{G}^1 & 1+k(\mathcal{G}^2)^2 & k\mathcal{G}^2\mathcal{G}^3 & -\frac{\mathcal{G}^2/c}{\sqrt{1-\mathcal{G}^2/c^2}} \\ k\mathcal{G}^3\mathcal{G}^1 & k\mathcal{G}^3\mathcal{G}^2 & 1+k(\mathcal{G}^3)^2 & -\frac{\mathcal{G}^3/c}{\sqrt{1-\mathcal{G}^2/c^2}} \\ -\frac{\mathcal{G}^1/c}{\sqrt{1-\mathcal{G}^2/c^2}} & -\frac{\mathcal{G}^2/c}{\sqrt{1-\mathcal{G}^2/c^2}} & -\frac{\mathcal{G}^3/c}{\sqrt{1-\mathcal{G}^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\mathcal{G}^2/c^2}} \end{pmatrix}, \quad k = \frac{1}{\mathcal{G}^2} \left[ \frac{c}{\sqrt{c^2 - \mathcal{G}^2}} - 1 \right].$$

Из изложенного следует, что базисы  $e_i$  и  $\vartheta_i$  различаются только за счет поступательного движения с вектором относительной скорости  $V = \mathcal{G}^\alpha \vartheta_\alpha = (dy^\alpha / dt) \vartheta_\alpha$ ;  $d\tau = \sqrt{1 - \mathcal{G}^2 / c^2} dt$ .

Система (1) эквивалентна

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \mathcal{G}^2 / c^2}} \frac{d}{dt} \frac{\mathcal{G}^\alpha}{\sqrt{1 - \mathcal{G}^2 / c^2}} = L_\beta^\alpha \tilde{a}^\beta. \quad (2)$$

Решение задачи инерциальной навигации в этом случае сводится к интегрированию (2). После интегрирования (2) при  $\vartheta_0(\tau_0) = u(\tau_0)$  определяются компоненты  $\mathcal{G}^\alpha$  и из равенства  $dy^\alpha / dt = \mathcal{G}^\alpha$  определяется искомый закон движения точки  $y^\alpha = f^\alpha(t)$ .

Таким образом, закон движения  $y^\alpha$  определяет решение задачи инерциальной навигации в рамках СТО. В этом случае система координат  $\{y^i\}$  является глобальной декартовой.

В рамках ОТО закон движения  $y^\alpha$  дает искомое решение в системе координат Ферми, которая является аналогом инерциальной системы в СТО. Следовательно, задача инерциальной навигации имеет одинаковое решение в инерциальной глобальной декартовой системе в СТО и в системе координат Ферми в ОТО [2].

Рассмотрим теперь более общий случай, когда метрика (1) инерциальной системы отсчета наблюдателя заменяется системой отсчета типа:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 + 2c\hat{g}_{\alpha 0}(\xi^\alpha, \tau) d\xi^\alpha d\tau + \hat{g}_{\alpha\beta}(\xi^\alpha, \tau) d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (3)$$

произвольного наблюдателя, использующего решение (2).

## Инерциальная навигация в системе отсчета произвольного наблюдателя (в СТО и ОТО)

Как и ранее задаются следующие пять систем координат и связанные с ними тетрады базисных векторов:

1. Система координат  $\{x^i\}$  произвольного наблюдателя с базисными векторами  $\bar{\Xi}_i$  и инвариантным интервалом  $ds$  типа (3) в координатах наблюдателя:

$$ds^2 = c^2 dt^2 + 2cg_{\alpha 0} dx^\alpha dt + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (4)$$

Метрической форме (4) соответствует координатный базис  $\bar{\Xi}_i$ ,  $\bar{\Xi}_0 = u'$ , где  $u'$  – вектор 4-скорости движения наблюдателя. Наблюдателю отвечает семейство мировых линий  $C'$ , индивидуализированных координатами  $x^\alpha$ . Вдоль сопутствующих мировых линий  $C'$  интервал  $ds = cdt$ ,  $t$  – глобальное время для семейства мировых линий наблюдателя.

2. Семейство тетрад базисных векторов Ферми – Уолкера  $e_i$  с координатами  $z^\alpha$  на мировой линии  $C$ , определяемое  $\frac{de_a}{ds} = \omega_a^b e_b$  и  $\frac{de^k}{ds} = (a^k u^j - a^j u^k) e_{aj}$ , как описано в Части 2 настоящей статьи.
3. Лагранжевы координаты  $\xi^\alpha$ , время  $\tau$  – глобальное для семейства  $C$ . Этой системе координат отвечает координатный базис  $\hat{\Xi}_i$ ,  $\hat{\Xi}_0 = u$ , где  $u$  – 4-скорость движения среды. Рассматривается наряду с тетрадой  $\hat{\Xi}_i$  базисный репер  $\check{\Xi}_i$  типа  $\check{\Xi}_\alpha = \hat{\Xi}_\alpha - \hat{g}_{\alpha 0} \hat{\Xi}_0$  (см. Часть 2 настоящей работы),  $\check{\Xi}_0 = \hat{\Xi}_0$ , образующей сопутствующий базис для малого объема  $dV_3$  среды, лежащего в пространстве, ортогональном 4-скорости и в данной точке  $M$  мировой искомой линии  $C$ .
4. Собственный репер  $\check{\Xi}_i$  (см. Часть 2), который в данный момент собственного времени  $\tau$  совпадает с базисом репера Ферми – Уолкера  $e_a$  на кривой  $C$ .
5. Система координат Ферми  $\{y^a, t\}$  вдоль кривой  $C$  с координатными базисами  $\Xi_i$ , которые переносятся параллельно вдоль кривой  $C$  ( $d\Xi_i/ds = 0$ ).

Согласно (2), относительные 3-скорости  $\mathcal{G}$  и измеренное ускорение  $\check{a}$  связаны соотношением (в базис систем координат Ферми)

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \mathcal{G}^2 / c^2}} \frac{d}{dt} \frac{\mathcal{G}^\alpha}{\sqrt{1 - \mathcal{G}^2 / c^2}} = L_\beta^\alpha \check{a}^\beta. \quad (5)$$

В системе произвольного наблюдателя (4) для определения решения навигационной задачи необходимо установить еще одно преобразование от системы координат  $y^i$  (полученное как решение (5) в рамках системы координат Ферми) к системе координат наблюдателя  $x^i = x^i(y^k)$ . Координатный базис Ферми  $\Xi_i$  и координатный базис произвольного наблюдателя  $\bar{\Xi}_j$  связаны соотношением  $\Xi_i = \bar{\Xi}_j b_i^j$ . Тогда уравнение искомой мировой линии может быть записано в виде [1, 2]:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \frac{1}{c^2} b_j^i L_a^j \check{a}^\alpha. \quad (6)$$

Рассмотрим кратко особенности вывода соотношения (6).

*Пример 1.* Для наблюдателя  $K$  вдоль искомой мировой линии  $C$  элементы собственного времени  $d\tau_k$  и векторы 3-скорости  $f$  определяются (см. Части 1 и 2) в синхронной системе отсчета наблюдателя  $K$ . Поэтому в соответствии с определением для абсолютного 3-ускорения в точках нулевой линии  $C$  имеем:

$$a = \frac{df}{d\tau_k} = \frac{d^2r}{d\tau_k^2} = \left( \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tau_k^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \tau_k} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial \tau_k} \right) \vartheta_\alpha.$$

Данное выражение дает определение вектора ускорения на нулевых линиях с точки зрения выбранной синхронной системы  $K$ . В этом случае задача инерциальной навигации в соответствии с выбранной системой отсчета наблюдателя в метрике (4) для 4-ускорения в системе отсчета наблюдателя имеет вид:

$$a = \frac{du'}{ds} = \left( \frac{d^2x^i}{ds^2} + \bar{\Gamma}_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \right) \bar{\vartheta}_i = \frac{d^2y^i}{ds^2} \vartheta_i = \frac{d^2z^\alpha}{ds^2} e_\alpha = \frac{1}{c^2} \tilde{a}^\alpha e_\alpha = \left( \frac{d\tau}{ds} \right) \hat{\Gamma}_{00}^i \hat{\vartheta}_i. \quad (7)$$

Из определения базиса следует  $\vartheta_j = \frac{\partial r}{\partial y^j} = \frac{\partial r}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} = \bar{\vartheta}_i b_j^i$ ;  $b_j^k = \frac{\partial x^k}{\partial y^j}$ . Из (7) следует, что

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \bar{\Gamma}_{jk}^i(x') \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = b_j^i \frac{d^2y^j}{ds^2} = \frac{1}{c^2} b_j^i L_\alpha^j \tilde{a}^\alpha. \quad (8)$$

Таким образом, из (8) доказывается справедливость (6).

Неизвестными в (6) являются  $b_j^i$ . Уравнение для определения  $b_j^i$  можно определить из введенного определения базиса с учетом постоянства ортов  $\vartheta_j$  на кривой  $C$  [2, 7-9]:

$$\partial \vartheta_j / \partial y_k = 0, \quad \det |\partial x^k / \partial y^j| \neq 0. \quad (9)$$

*Пример 2.* Допустим, что  $\omega = (\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^0)$  – компоненты произвольного постоянного вектора  $\omega$  в постоянном базисе  $\vartheta_i$ . Любой вектор  $\omega$  можно разложить как по базису  $\vartheta_i$ , и по  $\bar{\vartheta}_i$ . Согласно определению базиса, имеем  $\omega = \bar{\vartheta}_i b_j^i \omega^j$ . Тогда вдоль искомой мировой линии  $C$  имеем [2, 10-13]:

$$0 = \frac{d\omega}{ds} = \frac{db_j^i \omega^j}{ds} \bar{\vartheta}_i + b_j^k \omega^j \Gamma_{kl}^j \frac{dx^l}{ds} \bar{\vartheta}_i. \quad (10)$$

Из (10) следует уравнение для  $b_j^k$  в следующем виде:

$$\frac{db_j^i}{ds} + \Gamma_{kl}^i b_j^k \frac{dx^l}{ds} = 0. \quad (11)$$

Таким образом, (5), (6) и (11) для определения  $\mathcal{G}^\alpha(s)$ ,  $x^i(s)$  и  $b_j^i(s)$  в произвольных координатах наблюдателя в ОТО и СТО получается система обыкновенных дифференциальных уравнений 27-го порядка ( $3 + 8 + 16 = 27$  соответственно) При этом необходимо задавать соответствующие начальные условия  $\mathcal{G}_0^\alpha, x_0^i, b_{0j}^i$  и  $dx_0^i / ds$ . Начальные условия для определяющих уравнений (5), (6) и (11)

можно установить, если при  $s = \tau = 0$  принять  $\Xi_i = \check{\Xi}_i$ , а из (11) при  $\tau = 0$  определить значение элементов матрицы  $b_j^k$ .

Для полного решения рассматриваемой задачи инерциальной навигации необходимо определить дополнительно вращения и деформации объема  $dV_3$ , который моделировался точкой  $M$  на кривой  $C$ . Это означает необходимость определения движения  $dV_3$  относительно собственной тетрады  $\check{\Xi}_i$ . Искомое движение задается матрицей  $\|\ell_\alpha^\beta\|$ , которая определяет переход от базиса  $\check{\Xi}_\alpha$  сопутствующему базису  $\check{\Xi}_\beta$ :  $\check{\Xi}_\beta = \ell_\beta^\gamma(\tau) \check{\Xi}_\gamma$ .

Теоретическое определение компонент матрицы  $\|\ell_\beta^\gamma\|$  представляет собой обратную задачу динамики движения пробных тел и решается на основе уравнения Гамильтона – Якоби и преобразований Ли – Блэкунда.

Таким образом, теоретическое определение компонент матрицы  $\ell_\beta^\gamma$  осуществляется в общем случае на основе динамической теории [7-13]. Для экспериментального определения компонент матрицы  $\ell_\beta^\gamma$  производят измерения с помощью масштабных приборов в собственной системе отсчета шести независимых углов из девяти между векторами  $\check{\Xi}_\gamma$  и тремя единичными векторами собственного базиса  $\check{\Xi}_\alpha$ , образующими неизменно направленны репер (связанный с гироскопами). При этом достаточно измерить еще три длины векторов  $\check{\Xi}_\alpha$  [2, с. 96]. Если сопутствующий репер абсолютно репер абсолютно твердый, то достаточно измерить только три угла, определяющие ориентацию неизменяемого триэдра  $\check{\Xi}_\beta$  по отношению к неизменно ориентированному триэдру  $\check{\Xi}_\alpha$ .

*Пример 3.* Рассмотрим метрику системы отсчета произвольного наблюдателя (4), для которой в сопутствующей системе отсчета  $d^2\xi^i / ds^2 = 0, d\tau / ds = 1/c$ . Выражение (4) можно преобразовать (см. Часть 2) к виду:

$$ds^2 = c^2 d\tau_1^2 + \hat{\eta}_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta; \quad d\tau_1 = d\tau + \frac{\hat{g}_{\alpha 0}}{c^2} d\xi^\alpha; \quad \hat{\eta}_{\alpha\beta} = \hat{g}_{\alpha\beta} - \hat{g}_{\alpha 0} \hat{g}_{\beta 0} / c^2 = (\check{\Xi}_\alpha \cdot e_\beta); \quad \hat{\Xi}_i = \partial r / \partial \xi^i.$$

Из соотношений  $\check{\Xi}_\alpha = \hat{\Xi}_\alpha - \hat{g}_{\alpha 0} \hat{\Xi}_0$  (см. Часть 2, формула (67)) и  $\check{\Xi}_\beta = \ell_\beta^\gamma(\tau) \check{\Xi}_\gamma$  получим соотношение (типа (68), см. Часть 2) в виде ( $c = 1$ ):

$$\frac{\partial \hat{g}_{\beta 0}}{\partial \tau} = \check{a}^\alpha \ell_\beta^\gamma \hat{\eta}_{\alpha\gamma}, \tag{12}$$

где  $\hat{\eta}_{\alpha\gamma}$  рассматриваются как компоненты метрического тензора в пространстве Минковского.

Таким образом, имеем:

$$\frac{\partial \hat{g}_{\beta 0}}{\partial \tau} = - \sum_{\alpha=1}^3 \check{a}^\alpha \ell_\beta^\gamma. \tag{13}$$

Из определения векторов  $\check{\Xi}_\alpha$  сопутствующего базиса  $u$  следует ( $c = 1$ ):

$$\hat{\eta}_{\alpha\beta} = (\check{\Xi}_\alpha \cdot \check{\Xi}_\beta) = \hat{g}_{\alpha\beta} - \hat{g}_{\alpha 0} \hat{g}_{\beta 0} = - \sum_{\gamma=1}^3 \ell_\alpha^\gamma \ell_\beta^\gamma. \tag{14}$$

Из соотношений (13) и (14) совместно с начальными данными для  $\hat{g}_{\beta 0}$  на рассматриваемой мировой линии  $C$  полностью определяются компоненты метрического тензора  $\hat{g}_{\beta 0}$  и  $\hat{g}_{\alpha\beta}$  в сопутствующей системе отсчета [2, 10, 11].

Таким образом, с помощью компонент метрических тензоров  $\hat{g}_{\alpha\beta}(\xi^\alpha, \tau)$ , вектора 3-ускорения  $\ddot{a}$  и матриц  $L_i^j, \ell_\alpha^\beta$  и  $b_i^j$  пересчитываются компоненты тензоров, заданных в одном из базисов  $\hat{\Xi}_i, \tilde{\Xi}_i, \check{\Xi}_i, \Xi_i$  и  $\bar{\Xi}_i$  на другой базис. По измерениям соответствующих гироскопических моментов и соответствующих угловых скоростей осей гироскопов (если систему осей гироскопов подчинить принудительному вращению) можно установить соответствующую систему уравнений, позволяющая решить проблему навигации как в СТО, так и ОТО [1, 2, 10, 14-16].

Следовательно, получили искомое решение задачи инерциальной релятивистской навигации для произвольного наблюдателя.

*Примечание 1.* Решение задачи релятивистской инерциальной навигации получено в рамках тетрады Ферми – Уолкера для произвольного наблюдателя с метрикой (4). Модель Ферми – Уолкера для системы отсчета наблюдателя не полностью учитывает 3-вращение наблюдателя и деформацию системы отсчета. Последний фактор был учтен при описании и вычислении вектора ускорения [2, 10]. Ускоренно движущиеся вращающиеся системы отсчета относятся к классу неинерциальных, влияют на геометрию пространства-времени и требуют ряда модификаций, в частности модели параллельного переноса Ферми – Уолкера, а также соответствующих формул для определения скорости и ускорения в координатных системах отсчета наблюдателя по отношению к опорным траекториям пробных тел. Ряд таких особенностей неинерциальных систем отсчета рассмотрены в Приложении 1.

*Примечание 2.* Необходимость введения неинерциальных систем отсчета подтвердилось теоретическими и экспериментальными исследованиями околоземного космического пространства с помощью КЛА и ИСЗ [17-21 и др.] с учетом релятивистских эффектов уже в пределах модели Солнечной системы [16-21 и др.]. Разработка теории неинерциальных систем отсчета требует привлечения дополнительных гипотез и специальных методов исследования, учета дополнительных релятивистских эффектов в процессах синхронизации наблюдений и измерений, имеет ряд специфических эффектов в прикладных задачах [15-33 и др.].

В следующем разделе, следуя методам релятивистской инерциальной навигации, в рамках обобщенной модели тетрады Ферми – Уолкера рассмотрим одну из задач вычисления компонент вектора скорости и ускорения в неинерциальных (ускоренно движущихся и вращающихся) системах отсчета относительно мировой линии в виде геодезической движения пробного тела (относительно движения в координатных системах наблюдателя).

## ***Кинематика релятивистских эффектов относительного движения в ускоренно движущихся вращающихся системах отсчета***

Общие вопросы динамики относительного движения пробного тела в СТО и ОТО в ускоренно движущихся системах отсчета рассматривались во многих работах, например, [2-6, 27-30] и др. В данном разделе обсуждаются вопросы определения скорости и ускорения: 1) в собственной системе отсчета наблюдателя (представляющей собой ускоренно движущуюся вращающуюся собственную систему координат) и 2) для свободной частицы (движущейся по геодезической), описывающей мировую линию движения пробного тела в неинерциальной системе отсчета наблюдателя.

### Задача 1

В первом случае рассматривается движение наблюдателя вдоль мировой линии  $P_0(\tau)$  с 4-скоростью  $u$ , 4-вектором вращения  $\omega(\tau)$  в гравитационном поле с римановым тензором  $R^\mu_{\nu\alpha\beta}(\tau)$  вдоль мировой линии (см. рис. 1).

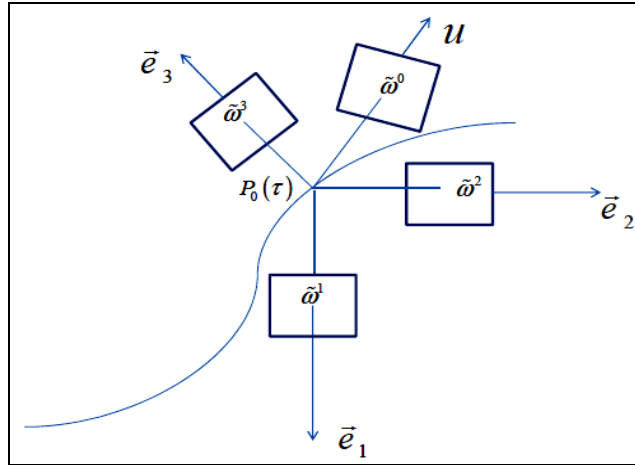


Рис. 1. Векторная тетрада  $\{u, \vec{e}_{\hat{\alpha}}\}$  и соответствующий дуальный вектор тетрады  $\{\tilde{\omega}^0, \tilde{\omega}^{\hat{\alpha}}\}$

Ортонормальная тетрада  $\{\vec{e}_{\hat{\alpha}}\}, \hat{\alpha} = 1, 2, 3$  перемещения наблюдателя вдоль мировой линии  $P_0(\tau)$  описывается обобщенным уравнением параллельного переноса Ферми – Уолкера в виде [34-37]:

$$\frac{de_{\hat{\alpha}}}{d\tau} = -\hat{\Omega} \cdot e_{\hat{\alpha}}, \quad \Omega^{\mu\nu} \equiv \underbrace{a^\mu u^\nu - a^\nu u^\mu}_{\text{перенос Ферми - Уолкера}} + \underbrace{u_\alpha \omega_\beta \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}}_{\text{вращение}}, \quad (15)$$

где  $a(\tau) \equiv \nabla_u u$ ,  $\tau$  – собственное время.

В тензорной записи выражения (15) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\nabla \vec{e}_i}{\partial \tau} &= \langle \Omega, \vec{e}_i \rangle, \quad \frac{\nabla u}{\partial \tau} = \langle \Omega, u \rangle; \\ \Omega &= \vec{a} \otimes u - u \otimes \vec{a} + \Omega_s(\vec{\omega}, u); \quad \langle \Omega_s(\vec{\omega}, u), u \rangle = 0, \quad \langle \Omega_s(\vec{\omega}, u), \vec{A} \rangle = \vec{\omega} \times \vec{A}. \end{aligned} \quad (16)$$

События на мировой линии  $P_0(\tau)$  рассматриваются в точках касания геодезических  $P(\tau; n; s)$ , ортогональных к 4-скорости  $u(\tau)$ , где  $n$  – единичный вектор, касательный к данной геодезической к  $P_0(\tau)$  и выполняется свойство  $n \cdot u(\tau) = 0$ . События на отрезке  $s$  вдоль геодезической  $n$  описываются в координатной системе  $x^{\hat{0}} \equiv \tau, x^{\hat{j}} \equiv sn \cdot e_j$ . Такие координаты называются локальными и были введены Мизнером, Торном и Уилером (МТУ) в [5] как обобщение координат Ферми. Такая система локальных координат МТУ справедлива в окрестности мировой линии  $P_0(\tau)$  с ограничениями:



$$s \ll \min \left\{ \frac{1}{|a|}, \frac{1}{|\omega|}, \frac{1}{|R_{\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{\hat{\mu}}|^{\frac{1}{2}}}, \frac{|R_{\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{\hat{\mu}}|}{|R_{\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\beta},\hat{\gamma}}^{\hat{\mu}}|} \right\}.$$

Ограничение  $s \ll 1/|a|$  физически означает, что касающиеся мировой линии геодезические не пересекаются, границы «светового конуса» не достигаются ( $s \ll 1/|\omega|$ ), кривизна не позволяет нарушать причинность на геодезических до пересечения ( $s \ll |R_{\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{\hat{\mu}}|^{-\frac{1}{2}}$ ) и тензор Римана не изменяется существенно от номинального значения вдоль мировой линии ( $s \ll |R_{\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{\hat{\mu}}|/|R_{\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\beta},\hat{\gamma}}^{\hat{\mu}}|$ ).

Такие условия выполняются, например, при использовании системы координат в околоземных лабораторных системах отсчета [7-9, 25, 38, 39].

В локальной системе координат 4-вектор  $V$  декомпозируется как  $V = (V^{\hat{0}}, V^{\hat{i}})$ . Определяя  $\nabla_u a = b, \nabla_u \omega = \eta$ , из (16) следуют соотношения:

$$b^{\hat{0}} = \vec{a} \cdot \vec{a}; \quad \vec{b} = \frac{d\vec{a}}{d\tau} + \vec{\omega} \times \vec{a}; \quad \eta^{\hat{0}} = \vec{\omega} \cdot \vec{a}; \quad \vec{\eta} = \frac{d\vec{\omega}}{d\tau}. \tag{17}$$

Вдоль кривой  $P_0(\tau)$  в локальных МТУ координатах  $(x^{\hat{0}}, x^{\hat{j}})$  коэффициенты связности

$$\Gamma_{\hat{\mu}\hat{\nu},\hat{\sigma}}^{\hat{\alpha}} = R_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\sigma}}^{\hat{\alpha}} + \Gamma_{\hat{\mu}\hat{\nu},\hat{\sigma}}^{\hat{\alpha}} + (\Gamma_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{\hat{\sigma}} \Gamma_{\hat{\sigma}\hat{\alpha}}^{\hat{\alpha}} - \Gamma_{\hat{\mu}\hat{\sigma}}^{\hat{\alpha}} \Gamma_{\hat{\alpha}\hat{\nu}}^{\hat{\sigma}})$$

в выражениях (17) принимают вдоль мировой линии  $P_0(\tau)$  вид

$$\Gamma_{\hat{\sigma}\hat{\delta},\hat{i}}^{\hat{\alpha}} = b^{\hat{i}}(\tau) + 2a^{\hat{j}}(\tau)\omega^{\hat{k}}(\tau)\epsilon^{\hat{i}\hat{j}\hat{k}}, \quad \Gamma_{\hat{\delta}\hat{\delta},\hat{i}}^{\hat{j}} = R_{\hat{\delta}\hat{\delta}\hat{i}}^{\hat{j}} - \eta^{\hat{k}}\epsilon^{\hat{j}\hat{k}} + a^{\hat{i}}a^{\hat{j}} + \omega^{\hat{i}}\omega^{\hat{j}} - \delta_{\hat{i}\hat{j}}(\omega^{\hat{i}})^2,$$

$$\Gamma_{\hat{j}\hat{\delta},\hat{i}}^{\hat{\sigma}} = R_{\hat{\delta}\hat{j}\hat{i}}^{\hat{\sigma}} - a^{\hat{i}}a^{\hat{j}}, \quad \Gamma_{\hat{k}\hat{\delta},\hat{i}}^{\hat{j}} = R_{\hat{j}\hat{k}\hat{i}}^{\hat{\delta}} + a^{\hat{k}}\omega^{\hat{i}}\epsilon^{\hat{j}\hat{i}}.$$

Для определения коэффициентов связности  $\Gamma_{\hat{j}\hat{k},\hat{i}}^{\hat{\alpha}}$  в зависимости от тензора Римана  $R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$  и  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\omega}, \vec{\eta}$  используется уравнение девиации геодезических (см. Часть 1, выражение (41)).

*Примечание 3.* Напомним, что в компактной форме записи через ковариантные производные  $D = d/d\lambda + \Gamma_{kl}^i u^k$  (где  $u^k$  – касательный вектор к кривой  $x^\alpha$ ) уравнение геодезических как бихарактеристики соответствующего уравнения Гамильтона – Якоби имеет вид:

$$\frac{D}{d\tau} \left( \frac{\dot{\xi}^\alpha}{\sqrt{\dot{\xi}_\rho \dot{\xi}^\rho}} \right) = 0, \tag{18}$$

а для девиации геодезических:

$$\frac{D}{d\tau} \left( \frac{h_{\alpha\beta}}{\sqrt{\dot{\xi}_\rho \dot{\xi}^\rho}} \frac{Dr^\beta}{d\tau} \right) + \frac{1}{\sqrt{\dot{\xi}_\rho \dot{\xi}^\rho}} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \dot{\xi}^\beta r^\gamma \dot{\xi}^\delta = 0, \tag{19}$$

где  $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{\xi_\alpha \xi_\beta}{\sqrt{\xi_\rho \xi^\rho}}$ .

В координатной форме уравнение для геодезических (18) имеет вид:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \tag{20}$$

Аналогично для уравнения (19) девиации (отклонений) геодезических [16, 40, 41] имеем:

$$\frac{d^2 y^\alpha}{ds^2} + 2 \frac{dy^\beta}{ds} \Gamma^\alpha_{\beta\xi} (s, t) n^\xi + R^\alpha_{\beta\xi\sigma} y^\beta n^\xi n^\sigma + y^\beta n^\xi n^\sigma \left( \Gamma^\alpha_{\beta\xi, \sigma} + \Gamma^\tau_{\beta\xi} \Gamma^\alpha_{\tau\sigma} - \Gamma^\alpha_{\beta\tau} \Gamma^\tau_{\xi\sigma} \right) = 0. \tag{21}$$

При этом семейство геодезических рассматривается как  $P(\tau, \alpha^i, s) = P(\tau; n; s), n = \alpha^i e_i$ .

Согласно [34, с. 1475, формула (18)], метрика  $ds^2$  во втором приближении имеет вид:

$$ds^2 = -\left(dx^0\right)^2 \left[ 1 + 2a_j x^j + \left(a^i x^i\right)^2 + \left(\omega^i x^i\right)^2 - (\omega)^2 x^i x^i + R_{\hat{o}\hat{i}\hat{o}\hat{m}} x^i x^{\hat{m}} \right] + \tag{22}$$

$$+ 2dx^0 dx^i \left( \epsilon_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}} \omega^{\hat{j}} x^{\hat{k}} - \frac{2}{3} R_{\hat{o}\hat{i}\hat{m}} x^i x^{\hat{m}} \right) + dx^i dx^j \left( \delta_{\hat{i}\hat{j}} - \frac{1}{3} R_{\hat{i}\hat{j}\hat{m}\hat{n}} x^i x^{\hat{m}} \right) + O\left(dx^{\hat{\mu}} dx^{\hat{\nu}} x^i x^{\hat{m}} x^{\hat{k}}\right).$$

В (22) эволюция  $a_j, \omega^i, R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\mu}\hat{\nu}}$  осуществляется вдоль мировой линии в зависимости от времени  $x^0$ . Искомое уравнение для ускорения в координатной системе наблюдателя (как свободно падающего тела) определяется из уравнения геодезической (20) в виде

$$\frac{d^2 x^i}{d\left(x^0\right)^2} + \left( \Gamma^i_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \Gamma^{\hat{o}}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \frac{dx^i}{dx^0} \right) \frac{dx^{\hat{\mu}}}{dx^0} \frac{dx^{\hat{\nu}}}{dx^0} = 0. \tag{23}$$

Подставляя в (23) выражения для  $\Gamma$  вдоль мировой линии  $P_0(\tau)$  и определяя  $w^i \equiv dx^i / dx^0$  скорость, измеряемую ускоренно движущимся и вращающимся наблюдателем, получим в результате [34] выражение для ускорения в координатной системе наблюдателя ( $c = 1$ ):

$$\frac{d^2 x^i}{d\left(x^0\right)^2} = -(1 + \vec{a} \cdot \vec{x}) a^i - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x})^i - (\hat{n} \times \vec{x})^i - 2(\vec{\omega} \times \vec{W})^i + 2(\vec{a} \cdot \vec{W})(\vec{\omega} \times \vec{x})^i +$$

$$w^i \left[ 2\vec{a} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{x}) + 2(\vec{a} \cdot \vec{W})(1 - \vec{a} \cdot \vec{x}) + \vec{b} \cdot \vec{x} \right] - x^i R_{\hat{o}\hat{i}\hat{o}\hat{i}} - 2x^i w^j R_{\hat{i}\hat{j}\hat{o}} + \frac{2}{3} x^i w^j w^k R_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}\hat{i}} + \tag{24}$$

$$2x^i w^i w^j R_{\hat{o}\hat{j}\hat{o}\hat{i}} + \frac{2}{3} x^i w^i w^j w^k R_{\hat{o}\hat{j}\hat{k}\hat{i}} + O\left(\left(x^i\right)^2\right).$$

Если обозначить через  $\mathcal{G}^i$  скорость в локальных координатах не ускоренно движущегося не вращающегося наблюдателя, то

$$\vec{W} = \vec{V} (1 + \vec{a} \cdot \vec{x}) - \vec{\omega} \times \vec{x} + O\left(\left(x^i\right)^2\right). \tag{25}$$

Уравнение (25) получается интегрированием в нулевом приближении (24) и отсутствия тензора кривизны пространства-времени. Точное определение координатной скорости дано ниже. Подставляя (25) в (24), в результате имеем:

$$\frac{d^2 x^i}{d(x^0)^2} = \underbrace{-(1 + \vec{a} \cdot \vec{x}) a^i + 2(\vec{a} \cdot \vec{V})(1 + \vec{a} \cdot \vec{V}) g^i + (\vec{b} \cdot \vec{x}) g^i - 2(1 + \vec{a} \cdot \vec{x})(\vec{\omega} \times \vec{V})^i + (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}))^i - (\hat{\eta} \times \vec{x})^i}_{\text{эффекты СТО}} = \underbrace{-R_{0i0i} x^i - 2R_{ijl0} x^i g^j + \frac{2}{3} R_{ijkl} x^i g^j g^k + 2R_{oj0l} x^i g^i g^j + \frac{2}{3} R_{ojkl} x^i g^i g^j g^k}_{\text{эффекты ОТО}} + O\left(\left(x^i\right)^2\right). \quad (26)$$

Уравнения (24), (26) получены для свободно падающего наблюдателя в неинерциальной (ускоренно движущейся вращающейся) собственной системе координат во втором приближении разложения в ряд метрики (22), а сами уравнения (24), (26) выведены в первом приближении соответствующего разложения.

Таким образом, в (26) имеем в принятых ограничениях разделение релятивистских эффектов от кинематики СТО и результатов динамики движения наблюдателя как свободно падающего тела в гравитационном поле искривленного пространства-времени [34]. Отметим, что уравнение типа (26) имеет важное значение при проверке эффектов СТО и ОТО в околоземном космическом пространстве.

*Пример 4.* Рассмотрим теперь движение наблюдателя в неинерциальной системе отсчета относительно заданной мировой линии в виде геодезической, изображенной на рис. 2.

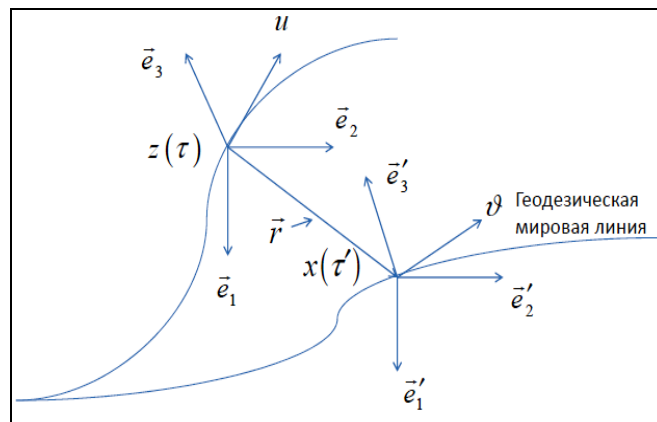


Рис. 2. Движение свободной частицы по геодезической относительно неинерциальной (ускоренно движущейся вращающейся) системы отсчета наблюдателя

Решение задачи разобьём на два этапа: 1) в рамках СТО и 2) в рамках ОТО. Необходимо получить уравнение движения свободной частицы по геодезической в неинерциальной системе отсчета наблюдателя (15), т.е. рассмотреть пересчет как частный случай инерциальной навигации в рамках СТО. Согласно рис. 2, уравнение движения свободной частицы в виде мировой линии  $X(\tau')$  с вектором скорости  $V = \nabla X / \partial \tau'$  ( $\tau'$  – собственное время свободной частицы на геодезической) имеет вид:  $X[\tau'(\tau)] = Z(\tau) + r(\tau)$ ,  $r(\tau)$  – вектор положения свободной частицы, движущейся по геодезической относительно наблюдателя в неинерциальной системе отсчета. Тогда

$$V = \frac{\nabla X(\tau')}{\partial \tau} = \frac{\nabla}{\partial \tau} [Z(\tau) + r(\tau)] = \Theta \left( u + \frac{\nabla \vec{r}(\tau)}{\partial \tau} \right), \quad \Theta = \frac{d\tau}{d\tau'}. \quad (27)$$

Так как  $X(\tau')$  описывает мировую линию (геодезическую) свободной частицы, то ускорение отсутствует и  $\nabla V / \partial \tau' = 0$ . Данное выражение является инвариантным описанием обычной геодезической типа (23). Необходимо пересчитать такое уравнение геодезической в терминах траектории движения наблюдателя  $Z(\tau)$ . В обобщенной тетраде Ферми – Уолкера инвариантный перенос с траектории  $X(\tau')$  в касательное пространство к траектории  $Z(\tau)$  по вектору  $\vec{r}(\tau)$  параллельно  $u$  (при  $\vec{r}(\tau) \in S_{Z(\tau)}$  – трехмерное пространство, ортогональное к  $u$ ) приводит к новой связности типа:

$$\frac{\nabla' A}{\partial \tau} = \frac{\nabla A}{\partial \tau} - \langle \Omega, A \rangle. \quad (28)$$

где  $\langle \Omega, A \rangle$  определяется из условия (16).

Тогда из (28) и (16) следует что:

$$\frac{\nabla' u}{\partial \tau} = \frac{\nabla' \vec{e}_i}{\partial \tau} = 0. \quad (29)$$

Подчеркнем, что  $\nabla' / \partial \tau$  – ковариантная производная по собственному времени наблюдателя в неинерциальной системе отсчета в базисе  $\{u, \vec{e}_i\}$ , который удовлетворяет условиям (15). В рамках

СТО производная (29) совпадает с обычной производной. Тогда  $\frac{\nabla' r}{\partial \tau} = \frac{\nabla'(r^i \vec{e}_i)}{\partial \tau} = \frac{dr^i}{d\tau} \vec{e}_i = \dot{r}_i \in S_{Z(\tau)}$ . Согласно (28), имеем из (27):

$$V = \Theta(\tau) \left[ u(1 + \vec{a} \cdot \vec{r}) + \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right]. \quad (30)$$

Для  $\Theta(\tau)$  получим следующее уравнение [35]

$$\dot{\Theta} = -\Theta(1 + \vec{a} \cdot \vec{r})^{-1} (\dot{\vec{a}} \cdot \vec{r} + 2\vec{a} \cdot \dot{\vec{r}} + \vec{a} \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (31)$$

Уравнение геодезической  $\nabla V / \partial \tau' = 0$  можно переписать в виде:

$$\frac{\nabla V}{\partial \tau'} = \frac{\partial \tau}{\partial \tau'} \frac{\nabla V}{\partial \tau} = \Theta \frac{\nabla V}{\partial \tau} = 0. \quad (32)$$

Из (32) следует

$$\dot{\Theta}(\dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r}) + \Theta \left[ \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \cdot \dot{\vec{r}} + (1 + \vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{a} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \right] = 0. \quad (33)$$

Подставляя (31) в (33), в результате выводится уравнение для ускорения в неинерциальной системе отсчета в следующем виде:

$$\ddot{\vec{r}} = -\vec{a} \left( 1 + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{c^2} \right)^{-1} - 2\vec{\omega} \cdot \dot{\vec{r}} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \frac{(\dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r})}{c^2 \left( 1 + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{c^2} \right)} (\dot{\vec{a}} \cdot \vec{r} + 2\vec{a} \cdot \dot{\vec{r}} + \vec{a} \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (34)$$

*Пример 5.* Ранее было показано, что величина  $\vec{\omega}_r = \vec{r} \times \vec{a} / 2c^2$  называется прецессией Томаса. Если  $\vec{a}$  и  $\vec{\omega}$  постоянные величины, то (34) принимает вид:

$$\ddot{\vec{r}} = -\vec{a} \left( 1 - \frac{2\vec{r}^2}{c^2} \right) - 2(\vec{\omega} + 2\vec{\omega}_r) \times \vec{r}. \quad (35)$$

Из (35) следует, что силы Кориолиса возрастают с увеличением релятивистской поправки.

*Следствие.* Если вектор скорости  $\dot{\vec{r}}$  параллелен  $(\vec{\omega} + 2\vec{\omega}_r)$ , то при  $|\dot{\vec{r}}| = c / \sqrt{2}$  частица одновременно не испытывает ускорения, а при  $|\dot{\vec{r}}| > c / \sqrt{2}$  испытывает снижение ускорения относительно  $\vec{a}$ .

Сравним теперь (34) с кинематической частью СТО в (26) в единицах  $c = 1$ . Выражение  $(1 + \vec{a} \cdot \vec{r})$  в (34) можно представить в виде ряда  $(1 + \vec{a} \cdot \vec{r})^{-1} = \left[ 1 - \vec{a} \cdot \vec{r} + (\vec{a} \cdot \vec{r})^2 - \dots \right]$ . Если ограничиться первыми членами разложения в приведенном ряде, то выражение (34) можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} = & -\vec{a}(1 + \vec{a} \cdot \vec{r})^{-1} - 2\vec{\omega} \cdot \dot{\vec{r}} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2\vec{a} \cdot \dot{\vec{r}} (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \\ & \dot{\vec{r}} \left[ 2\vec{a} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{a} \cdot \dot{\vec{r}} (1 - \vec{a} \cdot \vec{r}) + (\dot{\vec{a}} + \vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} \right]. \end{aligned}$$

Если принять  $\vec{r} = \vec{x}$ ,  $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$  и  $\dot{\vec{\omega}} = \vec{\eta}$ , а  $(\dot{\vec{a}} + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{b}$ , то последнее уравнение в принятых обозначениях совпадает с кинематическими членами СТО в (26).

Таким образом, получили инвариантное определение ускорения для свободной частицы, движущейся по геодезической с точки зрения наблюдателя в неинерциальной (ускоренно движущейся вращающейся) системе отсчета методом обобщенного переноса Ферми – Уолкера в рамках СТО.

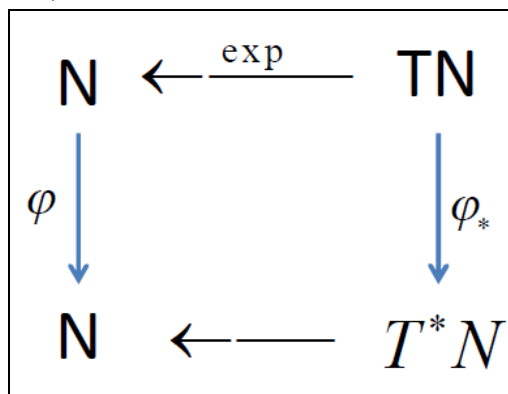
Для решения второго этапа поставленной задачи в рамках ОТО необходимо рассматривать более сложные математические модели события  $q$ , принадлежащих многообразию  $M (q \in M)$ , на котором «разыгрываются» процессы наблюдения свободной частицы, движущейся по геодезической, в неинерциальной системе отсчета наблюдателя. Дадим предварительно необходимые определения, описание математической модели событий и наблюдений, отражающих физическое содержание кинематики относительности процессов наблюдения в зависимости от системы отсчета и метрики пространства – времени.

*Пример 6.* Согласно методам современной дифференциальной геометрии [42, 43] и теории пре-симметрии динамических систем [35, 44], лоренцево преобразование необходимо рассматривать как лифт в касательное (или кокасательное) связное пространство, что приводит к различию понятий «пространство – время» как физического континуума событий и «наблюдения событий в пространстве – времени». Для общей модели «пространство-время» имеем  $(M, g)$ , где  $M$  – многообразие пространственно – временных событий  $q \in M$  и  $g$  – метрика многообразия  $M$ . Частным случаем  $(M, g)$  является пространство Минковского  $(N, \eta)$ , для которого достаточно считать, что алгебраически является векторным пространством. Событие  $X$  описывается как единственный вектор  $X \in N$ , а дуальный базисный вектор  $dx^i$  рассматривается как наблюдение координаты  $X^i$ , т.е.  $X^i = dx^i(X)$  является измерением события  $X$ . Для общей модели  $(M, g)$  такой алгебраической структурой является соответствующее касательное пространство  $TM$ . При этом, согласно [35, 37], достаточно проанализировать пространство Минковского в  $TN$ . Для этого необходимо рассматривать  $N$  как лифт в касательное пространство  $TN$  и различать «пространство-время»  $N$  и «наблюдения событий в пространстве-времени»  $TN$ . Искомый лифт сопоставляет каждое событие  $q \in N$  с его

касательным вектором  $X_p \in T_p N$  преобразованием  $X_p = (\exp_p)^{-1} q$ . Данное экспоненциальное отображение означает, что  $p$  представляет наблюдение события  $q$ , а  $q$  описывает наблюдаемую частицу. Часто  $X_p$  называют «лабораторным представлением» частицы  $q$ . В плоском пространстве-времени Минковского экспоненциальное отображение редуцируется и  $X_p = q - p$ , т.е. описывает относительный вектор.

На математическом языке конструкций группа  $A_G$  пресимметрии является релятивистским обобщением движений твердого тела  $\mathfrak{S}_{Z(\tau)}(N)$ , где  $Z(\tau)$  описывает негеодезическую кривую, получаемую из геодезической  $(\tau')$  по правилу композиционного отображения  $z = \varphi_{\gamma \circ \sigma}$ . Здесь  $\tau$  и  $\tau'$  описывают параметрическое представление отрезков соответствующих кривых,  $\tau' = \sigma(\tau)$  и отображение  $\varphi: N \rightarrow N$  является диффеоморфизмом пресимметрий. Согласно [35, 36], диффеоморфизм  $\varphi$  является симплектической структурой  $N$ , а  $\dim(A_G)$  конечен. Напомним [42], что симплектическая структура на многообразии  $M$  (в данном случае  $N$ ) описывается 2-формой  $\omega \in T^*M$ . В локальных координатах  $(X^a, p_a)$  на  $T^*M$  имеем для  $\omega$  вид [45],  $\omega = dx^a \wedge dp_a$ , где  $p_a$  являются компонентами естественной 1-формы вида  $\mathcal{G} = p_a dx^a$ . Допустим, что  $S_{Z(\tau)}$  описывает локальную специальную жесткую систему отсчета на мировых линиях  $Z(\tau)$ . Тогда наблюдение события в  $T^*(S_{Z(\tau)})$  является касательным вектором  $X = X^a \frac{\partial}{\partial x^a} + p_a \frac{\partial}{\partial p_a}$ , где пара  $(X^a, p_a)$  описывает относительное положение и момент наблюдаемой частицы. Тогда  $\mathcal{G}(X) = p_a X^a$  является наблюдением «относительной фазы» и  $\omega(X_1, X_2) = \frac{1}{2}(X_1^a p_a^2)$  является наблюдением в окрестности геодезических.

*Пример 7.* По определению [42 - 46], векторное поле является полным, если и только если (iff) оно представляет собой генератор однопараметрической группы преобразований над многообразием. В пространстве Минковского естественный выбор полного векторного поля в касательном пространстве сводится к виду  $\vec{t} = \partial / \partial t, \vec{e}_i = \partial / \partial x_i, i = 1, 2, 3$ . Диффеоморфизм  $\varphi$  (см. Пример 6) к касательному вектору  $\vec{t}$  описывается как  $\varphi_* \vec{t}$  и диаграмма преобразований вида



коммутирует.

Последнее означает, что выполняется соотношение коммутационного правила  $\exp \circ \varphi_* = \varphi \circ \exp$ . Поэтому с точки зрения пресимметрии физических систем [34] эффект действия диффеоморфизма  $\varphi$

в лабораторном представлении сводится к виду  $\varphi_* X = \left[ \exp_{\varphi(p)} \right]^{-1} \left[ \varphi \exp(X_p) \right]$ . Таким образом, касательные вектора  $\{\vec{t}_i\}, i=1,2,3$  порождают множество поверхностей начальных данных для геодезических  $\gamma$  наблюдателя.

*Пример 8.* Базис  $\vec{e}_i$  (см. выше Пример 7) является полным. Поэтому множество касательных векторов  $\{\varphi_* \vec{t}_i\}, i=1,2,3$  также является полным и определяет семейство поверхностей начальных данных для наблюдателя  $Z$ . Это означает выполнение условия принципа причинности для  $\varphi \in A_G$ . Если  $\varphi \in A_G$  и  $\mathcal{G}$  является преобразованием Пуанкаре (см. Пример 6), то  $\varphi = \mathcal{G} \circ \varphi_a$ , где  $\varphi_a(p) = p, \varphi_{a*} \vec{t}_p = \vec{t}_p$  для некоторого  $p \in N$ . Отображение  $\varphi_a$  порождает некоторую гиперповерхность  $\Sigma$ , ортогональную  $\vec{t}_p$  и поэтому представляет действие ускорения на частицу в собственной системе отсчета. При таком преобразовании  $\varphi' = \varphi_a|_{\Sigma}$  удовлетворяет условию пресимметрии  $\varphi'_* w(\varphi'_* X_p) = w_p(X)$ ;  $w \in T_p^* N$  и описывает процедуру наблюдения.

Если  $\mathfrak{Z}_{Z(\tau)}(N) \subset N$  означает множество геодезических и  $Z \in \mathfrak{Z}$ , то под действием  $\varphi$  траектория  $Z$  отображается в негеодезическую кривую  $Z\gamma = \varphi \circ \gamma$ , поэтому  $\varphi$  не является связностью на  $N$ . Однако для некоторой связности  $\nabla'$  существует такая геодезическая  $Z$ , так как  $\varphi_* (\nabla_j \dot{\gamma}) = \nabla'_{\varphi_* \dot{\gamma}} \varphi_* \dot{\gamma} = 0$ . Таким образом, существует новый «свободный» Гамильтониан, для которого поток траекторий является геодезическим на связности  $\nabla'$ .

Согласно [34-37], данное утверждение тождественно выполнению принципа эквивалентности. Приведенные определения и примеры характеризуют смысловое содержание физической интерпретации необходимости введения в теорию управления методов современной дифференциальной геометрии и в анализ физических моделей объектов управления [16].

Рассмотрим теперь применение введенных определений для решения второго этапа поставленной задачи.

## Задача 2

На рис. 3 показано формирование многообразия  $M$ , содержащего наблюдения в неинерциальной системе отсчета движения свободной частицы по геодезической.

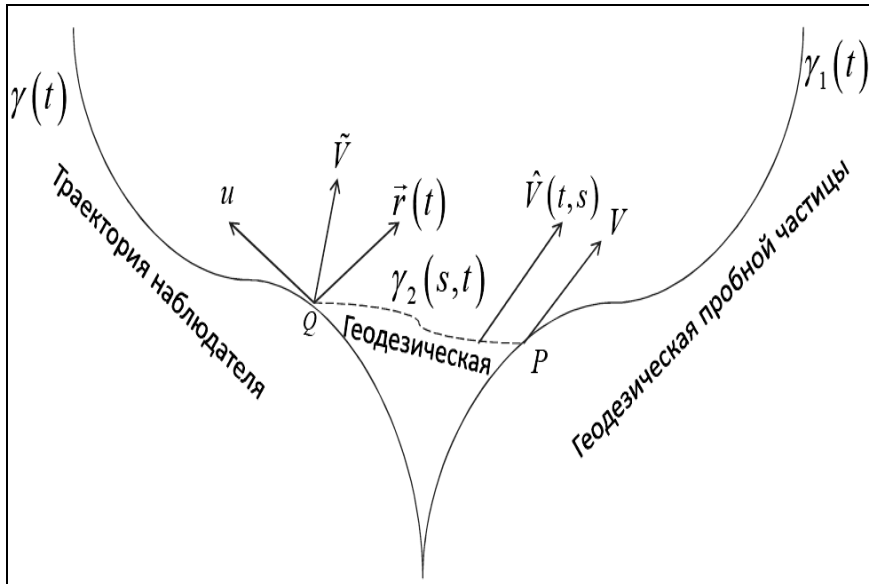


Рис. 3. Определение многообразия  $M$ , образуемое потоком геодезических  $\alpha(t,s) = \gamma_2(t,s)$   
 [Геодезическая  $\gamma_2(t,s)$  соединяет точки  $Q \in \gamma(t)$  и  $P \in \gamma_1(t)$  (пояснения в тексте)]

При этом  $\gamma(t)$  – мировая линия движения неинерциальной системы отсчета наблюдателя;  $\gamma_1(\lambda) = \gamma_1(t)$  – мировая линия движения свободной частицы по геодезической ( $\lambda$  – аффинный параметр геодезической как мировой линии);  $t$  – не аффинный параметр;  $\gamma_2(t,s)$  – единственная геодезическая, проходящая через события  $q$  и  $p$  ( $s$  – аффинный параметр кривой  $\gamma_2(t,s)$ );  $r(t) = n(t)|r(t)|$  – вектор положения частицы на геодезической  $\gamma_1(t)$  относительно неинерциальной системы отсчета наблюдателей;  $n(t)$  – единичный вектор направления  $r(t)$  в неинерциальной системе отсчета наблюдателя;  $u$  – скорость неинерциальной системы отсчета наблюдателя;  $V$  – скорость свободной частицы на геодезической  $\gamma_1(t)$ ;  $\tilde{V}$  – вектор параллельного переноса скорости  $V \in T_{\gamma_1(\lambda)}M$  в касательное пространство  $T_{\gamma(t)}M$  неинерциальной системы отсчета наблюдателя вдоль единственной геодезической  $\gamma_2(t,s)$ ;  $\hat{V}(t,s)$  – вектор параллельного переноса  $V \in T_{\gamma_1(\lambda)}M$  в  $T_qM$  вдоль  $\gamma_2(t,s)$ .

Таким образом, согласно рис. 3, многообразие  $M$  в рамках принятых обозначений описывается отображением  $\alpha: R \times R \rightarrow M, \alpha(t,s) = \exp_{\gamma(t)} sr(t)$  (см. Пример 7).

Из определения отображения  $\alpha$  можно получить мировую линию и скорость неинерциальной системы отсчета наблюдателя  $(\gamma(t), u)$  и геодезической свободной частицы  $(\gamma_1(t), V)$  как:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \alpha(t,0), \quad u = \alpha_* (\partial / \partial t) \Big|_{s=0,t=t} = \nabla_{d/dt} \gamma(t); \\ \gamma_1(t) &= \alpha(t,1), \quad V = \alpha_* (\partial / \partial t) \Big|_{s=1,t=t} = \nabla_{d/d\lambda} \gamma_1(t) = \Gamma \nabla_{d/dt} \gamma_1(t), \Gamma = dt / ds. \end{aligned}$$

Здесь  $\nabla$  – псевдориманова связность на многообразии. Согласно данным определениям пресимметрии физических систем для многообразия пространства-времени  $(M, g)$  некоторое событие  $q$



идентифицируется как  $q \in M$ , а наблюдение  $X$  этого события  $q$  идентифицируется как  $X \in TM$  и  $TM$

определяется лифтом  $M$  в  $TM$  с отображением  $\uparrow \exp^{-1}$ , т.е.  $X_p = \exp_p^{-1} q$ .

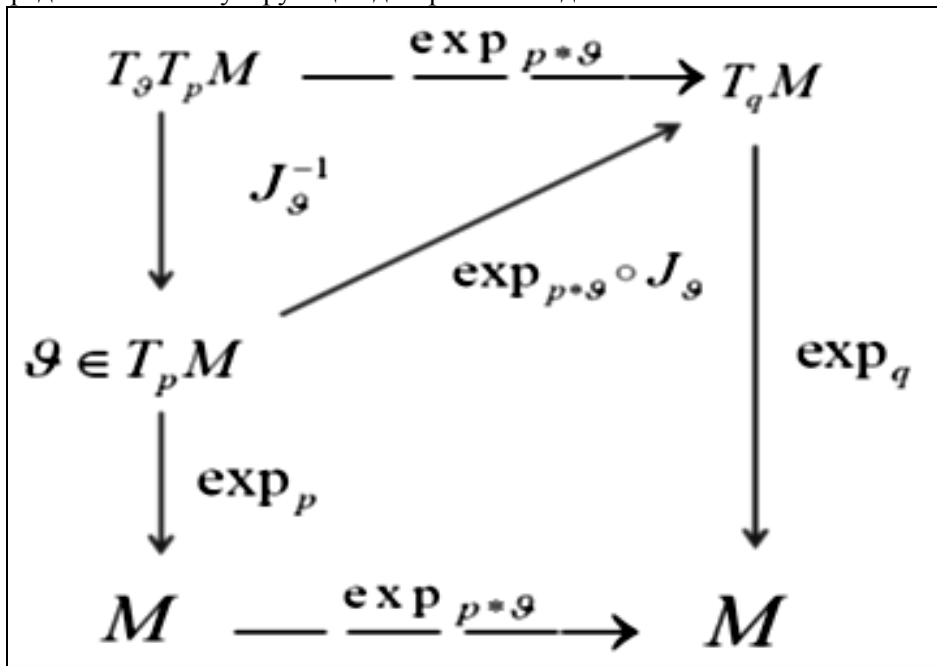
Касательное (к неинерциальной системе отсчета наблюдателя) пространство определяется как плоское и для наблюдений в неинерциальной системе отсчета связность определяется псевдо-плоской связностью  $\nabla'$  типа (16), (28) как  $\nabla'_{d/dt} B = \nabla_{d/dt} B - \langle \Omega, B \rangle$ ,  $\Omega = a \otimes u - u \otimes a + \Omega(\omega, u)$ , где  $a$  – ускорение неинерциальной системы отсчета наблюдателя.

Искомые координатные скорости  $W$  и ускорение  $A$  свободной частицы в неинерциальной системе отсчета наблюдателя определяется в виде:

$$W = \nabla'_{d/dt} \alpha_* (\partial / \partial s) \Big|_{s=0, t=t}; \quad A = \nabla'_{d/dt} W = \nabla'_{d/dt} \nabla'_{d/dt} \alpha_* (\partial / \partial s) \Big|_{s=0, t=t}. \quad (36)$$

Так как касательное пространство к неинерциальной системе отсчета плоское, то вектора скорости  $W$  и ускорения  $A$  находятся в системе отсчета наблюдателя и  $W, A \in T_{\gamma(t)} M$ .

Согласно определению пресимметрии [34-37], операции наблюдения можно сформулировать двумя способами. Из примера 7 следует, что для события  $q \in M$  и наблюдения  $X_q \in T_q M$  (наблюдателем в  $q$ ) операция наблюдения события  $q$  в неинерциальной системе отсчета в точке  $P \in \gamma_1(t)$  (см. рис. 3) определяется коммутирующей диаграммой вида:



где  $J_g$  – стандартное проекционное отображение [43, 45]. Согласно [37], отображение  $\exp_{p*} J$  определяет векторные уравнения как класс эквивалентности процедур формирования состояния и процедур наблюдений. Такое отождествление не противоречит требованиям ковариантности и пресимметрии определения наблюдений в пространстве-времени [16]. Однако данное отображение имеет только радиальную симметрию [37] и приводит к не учету дополнительных членов в уравнениях.

Другим определением наблюдения события  $q$  в неинерциальной системе отсчета относительно  $p$  может служить параллельный перенос в виде отображения  $\tau_{qp} : T_q M \rightarrow T_p M$ . Тогда

$q = \gamma_2(s_0(t), t = \exp_{\gamma(t)} r(t))$ . Здесь  $s_0(t)$  означает мгновенную фиксацию события  $q$  по отношению к геодезической  $\gamma_1(t)$ . Отображение является изометричным и определяет амплитуду соответствующего векторного поля наблюдений. Непосредственным приложением данного определения является вычисление скорости  $\tilde{V}$  свободной частицы, движущейся по геодезической  $\gamma_1(t)$ , в неинерциальной системе отсчета наблюдателя. Данный результат используется для определения искомым векторов  $W$  и  $A$ . Согласно рис. 3 и данным определениям вектор  $\tilde{V}$  определяется при  $s = 0$  из решения уравнения  $\nabla_{d/dt} \tilde{V} = 0$  или:

$$\frac{d\hat{V}^\mu}{ds} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(t, s)\hat{V}^\beta, \quad \frac{d\gamma_2^\alpha}{ds} = 0, \quad \mu, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3. \quad (37)$$

При  $s = s_0(t)$  имеем  $\hat{V} = V \in T_{\gamma(t)}M$ . На координатном атласе многообразия  $M$  можно записать рассматриваемые мировые линии и вектора в виде координат МГУ:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \{t, 0, 0, 0\}; \quad \gamma_1(t) = \exp_{\gamma(t)} r(t) = \{t, r^1(t), r^2(t), r^3(t)\}; \\ \gamma_2(t, s) &= \exp_{\gamma(t)} sn(t) = \{t, n^1(t)s, n^2(t)s, n^3(t)s\}; \\ r(t) &= n^i(t)e_{i|\gamma(t)} = s_0(t)n^i(t)e_{i|\gamma(t)}, i = 1, 2, 3; \\ n(t) &= n^i(t)e_{i|\gamma(t)}, i = 1, 2, 3; \quad \langle n(t), n(t) \rangle = 1; \quad W = W(t) = W^i(t)e_{i|\gamma(t)}, i = 1, 2, 3; \\ V &= \nabla_{d/dt} \exp_{\gamma(t)} r(t) = \Gamma \nabla_{d/dt} \exp_{\gamma(t)} r(t) = \Gamma e_{0|\gamma(t)} + \Gamma W^i(t)e_{i|\gamma(t)} = \Gamma \{1, W^1(t), W^2(t), W^3(t)\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Уравнение (37) является линейным матричным дифференциальным уравнением и его решение можно получить в виде:

$$\hat{V} = \Omega(s, t)\tilde{V} \quad \text{или} \quad V = \Omega(s_0(t), t)\tilde{V} \quad (39)$$

В уравнении (39) обозначено:

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} \hat{V}^0 \\ \hat{V}^1 \\ \hat{V}^2 \\ \hat{V}^3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{V} = \begin{pmatrix} \tilde{V}^0 \\ \tilde{V}^1 \\ \tilde{V}^2 \\ \tilde{V}^3 \end{pmatrix}, \quad V = \Gamma \begin{pmatrix} 1 \\ W^1(t) \\ W^2(t) \\ W^3(t) \end{pmatrix}, \quad \Omega(s, t) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=0}^n \int_0^{s_j} B_j(s_j, t) ds_j = P \exp \left[ \int_0^s B(s_1, t) ds_1 \right],$$

$$s = s_0; B(s, t) = (b_{\alpha\beta}), b_{\alpha\beta} = -\Gamma_{j\beta}^\alpha(s, t)n^j(t); \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3.$$

Оператор  $P$  определяется как оператор Дайсона хронологического упорядочения по  $s_j$ . Тогда уравнение для вектора  $\vec{W}$  примет вид:

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} 1 \\ W^1(t) \\ W^2(t) \\ W^3(t) \end{pmatrix}_{|\gamma(t)} = \Gamma^{-1}\Omega(s_0(t), t) \begin{pmatrix} \tilde{V}^0 \\ \tilde{V}^1 \\ \tilde{V}^2 \\ \tilde{V}^3 \end{pmatrix}_{|\gamma(t)}. \quad (40)$$

Запишем (40) в координатной форме для компонент в виде:

$$W^i(t)\tilde{e}_{i|\gamma(t)} = \Gamma^{-1}\Omega_\alpha^i(s_0(t),t)\tilde{V}^\alpha\tilde{e}_{i|\gamma(t)}, \quad \tilde{V} = \tilde{V}^\alpha e_{\alpha|\gamma(t)}, \quad i = 1, 2, 3; \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad (41)$$

Запись уравнения (41) обладает определенной кинематической особенностью.

Дело в том, что тетрада  $\tilde{e}_{i|\gamma(t)}$  определяет базисные вектора, полученные из тетрады  $e_{i|\gamma_1(t)}$  обобщенным параллельным переносом Ферми – Уолкера вдоль  $\gamma_2(t, s)$ . Таким образом, в (41) физически  $W^i$  определяют компоненты координат скорости через базисные вектора  $\tilde{e}_{i|\gamma(t)}$ , а скорость  $\tilde{V}$  определяется через базисные вектора  $e_{i|\gamma(t)} = \partial / \partial x^i | \gamma(t)$ ,  $x^i = \{t, r^1, r^2, r^3\}$ , согласно (38).

Следовательно, согласно рис. 3, уравнения (41) определяют формулу преобразования (перехода) от тетрады  $\tilde{e}_{i|\gamma(t)}$ , полученной параллельным переносом вдоль  $\gamma_2(t, s)$  к естественным базисным векторам  $e_{i|\gamma(t)}$  неинерциальной системы отсчета наблюдателя на мировой линии  $\gamma(t)$ .

Искомое выражение для ускорения  $A$  можно получить из (40) в виде:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ A^1(t) \\ A^2(t) \\ A^3(t) \end{pmatrix}_{|\gamma(t)} = \nabla'_{d/dt} \vec{W} = \Gamma^{-1} \left( \frac{d\Omega(s_0(t),t)}{dt} - \Gamma^{-1}\Omega(s_0(t),t) \frac{dr}{dt} \right) \begin{pmatrix} \tilde{V}^0 \\ \tilde{V}^1 \\ \tilde{V}^2 \\ \tilde{V}^3 \end{pmatrix}_{|\gamma(t)} + \Gamma^{-1}\Omega(s_0(t),t) \nabla'_{d/dt} \begin{pmatrix} \tilde{V}^0 \\ \tilde{V}^1 \\ \tilde{V}^2 \\ \tilde{V}^3 \end{pmatrix}_{|\gamma(t)}. \quad (42)$$

После несложных преобразований уравнение (42) принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ A^1(t) \\ A^2(t) \\ A^3(t) \end{pmatrix}_{|\gamma(t)} = \Gamma^{-1} \left( -\frac{d\Gamma}{dt} \vec{W} + D \right)_{|\gamma(t)} ; \quad D = -\Gamma \begin{pmatrix} \Gamma_{\alpha\beta}^0(t, s_0(t)) W^\alpha W^\beta \\ \Gamma_{\alpha\beta}^1(t, s_0(t)) W^\alpha W^\beta \\ \Gamma_{\alpha\beta}^2(t, s_0(t)) W^\alpha W^\beta \\ \Gamma_{\alpha\beta}^3(t, s_0(t)) W^\alpha W^\beta \end{pmatrix}_{|\gamma(t)}. \quad (43)$$

К уравнению (43) применимы те же особенности относительно тетрад  $\tilde{e}_{i|\gamma(t)}$  и  $e_{\alpha|\gamma(t)}$ , изложенных для (41). Таким образом, получены замкнутые выражения для координат скорости и ускорения геодезического движения пробной свободной частицы, наблюдаемой в неинерциальной системе отсчета (как разновидность задачи релятивистской инерциальной навигации) в терминах тензора кривизны, 4-вращения и ускорения движения неинерциальной системы отсчета.

Коэффициенты связности  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(t, s)$  на многообразии  $M$  выписываются путем разложения в ряд Тейлора вдоль мировой линии неинерциальной системы отсчета наблюдателя как:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}(t, s) = \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}(t, 0) + \Gamma_{\alpha\beta, l}^{\mu}(t, 0)n^l(t)s + \frac{1}{2}\Gamma_{\alpha\beta, li}^{\mu}(t, 0)n^l(t)n^i(t)s^2 + \dots \quad (44)$$

$\mu, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3; l, i = 1, 2, 3.$

Аналогично выписываются члены разложения ряда Тейлора относительно кривой  $\gamma_1(t)$ . Используя уравнение девиации геодезических (19), (21) можно определить коэффициенты связности вдоль кривой  $\gamma(t)$ . Применяя (40) и (43), можно выразить координатные скорости  $W$  и ускорения  $A$  через тензор кривизны, 4-вращение и ускорение движения наблюдателя. В рамках СТО результат был рассмотрен ранее и совпадает с (40) и (43).

Для рассматриваемого случая, следуя (44), вычисляется матрица  $B$  в (39) как:

$$B(s, t) = A(0, t) + A_i(0, t)n^i(t)s + \frac{1}{2}A_{ij}(0, t)n^i(t)n^j(t)s^2 + \dots$$

$$A(0, t) = a_{\mu\nu}(0, \tau) = -n^k(t)\Gamma_{k\nu}^{\mu}(0, t); \quad A_i(0, t) = (a_{\mu\nu})_i(0, t) = -n^k(t), \quad (45)$$

$$A_{ij}(0, t) = (a_{\mu\nu})_{ij}(0, t) = -n^k(t)\Gamma_{k\nu, ij}^{\mu}(0, t) \text{ и т.д.}$$

Матрицы  $A$  в (45) для первых трех членов имеют следующий вид:

$$A(0, t) = \begin{pmatrix} -a \cdot n(t) & 0 & 0 & 0 \\ -[\omega \times n(t)]^1 & 0 & 0 & 0 \\ -[\omega \times n(t)]^2 & 0 & 0 & 0 \\ -[\omega \times n(t)]^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_j(0, t)n^j(t) = \begin{pmatrix} [a \cdot n(t)] - R_{i0j}^0 n^i n^j & \frac{1}{3}R_{i1k}^0 n^i n^k & \frac{1}{3}R_{i2k}^0 n^i n^k & \frac{1}{3}R_{i3k}^0 n^i n^k \\ [a \cdot n(t)][\omega \times n(t)]^1 - R_{ik0}^1 n^i n^k & \frac{1}{3}R_{i1k}^1 n^i n^k & \frac{1}{3}R_{i2k}^1 n^i n^k & \frac{1}{3}R_{i3k}^1 n^i n^k \\ [a \cdot n(t)][\omega \times n(t)]^2 - R_{ik0}^2 n^i n^k & \frac{1}{3}R_{i1k}^2 n^i n^k & \frac{1}{3}R_{i2k}^2 n^i n^k & \frac{1}{3}R_{i3k}^2 n^i n^k \\ [a \cdot n(t)][\omega \times n(t)]^3 - R_{ik0}^3 n^i n^k & \frac{1}{3}R_{i1k}^3 n^i n^k & \frac{1}{3}R_{i2k}^3 n^i n^k & \frac{1}{3}R_{i3k}^3 n^i n^k \end{pmatrix}.$$

Из-за громоздкости выражение для  $A_{ij}(0, t)n^i n^j$  здесь не приводится (см., например [317, формула (38), с. 102]). Тогда выражение для компонент вектора скорости  $W^i$ , после громоздких выкладок и преобразований принимает вид:

$$W^i = \dot{r}^i = \underbrace{-(\vec{\omega} \times \vec{r})^i \left[ 1 + \vec{a} \cdot \vec{r} - (\vec{a} \cdot \vec{r})^2 \right]}_{\text{СТО}} - \underbrace{-\frac{1}{2} R_{ijk0} r^j r^k \left( 1 + \frac{1}{3} \vec{a} \cdot \vec{r} \right) + \tilde{V}^p \left[ \begin{array}{l} (1 + \vec{a} \cdot \vec{r}) \delta_p^i + \frac{1}{6} R^i{}_{jpl} r^l (1 + \vec{a} \cdot \vec{r}) \\ -\frac{1}{72} P_{lp} (5R^i{}_{lkp;m} - R^i{}_{klm;p}) r^l r^k r^m \end{array} \right]}_{\text{ОТО}} + O(r^4). \quad (46)$$

Тензор  $P_{lp}$  определен в [37] для выражения  $A_{ij}(0,t)n^i n^j$ . Следует подчеркнуть, что координатное ускорение в неинерциальной системе отсчета наблюдателя определяется в базисных векторах тетрады  $\tilde{e}_{|\gamma(t)}$ , задаваемой параллельным переносом, а скорость  $\tilde{V}$  определяется в тетраде  $e_{|\gamma(t)}$ . Поэтому попытка [35] определить координатную скорость (25) через интегрирование уравнения для ускорения в базисе  $\tilde{e}_{|\gamma(t)}$  не дает полного решения. В уравнении (46) происходит смешение компонент вектора  $W$  с компонентами  $\tilde{V}$ ; данный эффект отсутствует в СТО, так как в этом случае пространство – время плоское и две базисные тетрады  $\tilde{e}_{|\gamma(t)}$  и  $e_{|\gamma(t)}$  тождественны. Уравнение (46) в векторной форме имеет вид:

$$W = -(\omega \times r) \left[ 1 + a \cdot r - (a \cdot r)^2 \right] - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{3} a \cdot r \right) R(r, e_0) r + \tilde{V} (1 + a \cdot r) + \frac{1}{6} (1 + \vec{a} \cdot \vec{r}) R(V, r) r - \frac{1}{72} \left[ \nabla_r 5R(V, r) r - \nabla_r R(r, r) r \right]. \quad (47)$$

Выражение (47) позволяет получить уравнение определения координатного ускорения  $A$  как в базисе  $\tilde{e}_{|\gamma(t)}$ , так и в базисе  $e_{|\gamma(t)}$ .

Результат вычислений совпадает с (26). Более подробные выкладки и комментарии приведены в [35-37].

*Пример 9.* Рассмотрим частный случай неподвижного наблюдателя в пространстве-времени Шварцшильда [3-9]. Метрика такого пространства – времени имеет вид:

$$ds^2 = -\left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Phi^2).$$

Тетрада  $e_{\hat{\mu}}$  неподвижного наблюдателя имеет постоянные координаты  $r, \theta, \Phi$  в поле Шварцшильда в виде  $e_{\hat{0}} = \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^{-\frac{1}{2}} e^0$ ;  $e_{\hat{1}} = \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^{\frac{1}{2}} e^1$ ;  $e_{\hat{2}} = R^{-1} e^2$ ;  $e_{\hat{3}} = (R \sin \theta) e^3$   $r = R = \text{const}$  вдоль мировой линии. Для неподвижного наблюдателя его 4-скорости  $u^\mu = dx^\mu / d\tau^\mu = \left( \left( 1 - 2M/R \right)^{-\frac{1}{2}}, 0, 0, 0 \right)$  и 4-ускорения  $a^\mu = \nabla_{\hat{\mu}} \vec{u} = \left( 0, M/R^2, 0, 0 \right)$ . Из закона преобразования тетрад имеем  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ ,  $a^\mu = \left( 0, (M/R^2) / \left( 1 - 2M/R \right)^{\frac{1}{2}}, 0, 0 \right)$ .

Тогда метрика системы отсчета наблюдателя имеет вид:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \\
 & - \left( dx^{\hat{0}} \right)^2 \left[ \left( 1 + \frac{M}{R^2 (1 - 2M/R)^{\frac{1}{2}}} x^{\hat{1}} \right)^2 - \frac{2M}{R^3} x^{\hat{1}^2} + \frac{M}{R^3} (x^{\hat{2}^2} + x^{\hat{3}^2}) + \right. \\
 & \left. \frac{2M}{R^4} \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^{\frac{1}{2}} (x^{\hat{1}^3} - x^{\hat{1}} x^{\hat{2}^2} - x^{\hat{1}} x^{\hat{3}^2}) + \frac{4}{3} \frac{M^2}{R^5 (1 - 2M/R)^{\frac{1}{2}}} (-2x^{\hat{1}^3} + x^{\hat{1}} (x^{\hat{2}^2} + x^{\hat{3}^2})) \right] + \\
 & dx^{\hat{i}} dx^{\hat{i}} + \\
 & \left\{ dx^{\hat{1}^2} \left[ \frac{1}{3} \frac{M}{R^3} (x^{\hat{2}^2} + x^{\hat{3}^2}) - \frac{1}{2} \frac{M}{R^3} \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^{\frac{1}{2}} x^{\hat{1}} (x^{\hat{2}^2} + x^{\hat{3}^2}) \right] + \right. \\
 & \left. dx^{\hat{2}^2} \left[ \frac{1}{3} \frac{M}{R^3} (x^{\hat{1}^2} - 2x^{\hat{3}^2}) - \frac{1}{2} \frac{M}{R^4} \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^{\frac{1}{2}} x^{\hat{1}} (x^{\hat{1}^2} - 3x^{\hat{3}^2}) \right] + \right. \\
 & \left. dx^{\hat{3}^2} \left[ \frac{1}{3} \frac{M}{R^3} (x^{\hat{1}^2} - 2x^{\hat{2}^2}) - \frac{1}{2} \frac{M}{R^4} \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^{\frac{1}{2}} x^{\hat{1}} (x^{\hat{1}^2} - 3x^{\hat{2}^2}) \right] + \right. \\
 & \left. dx^{\hat{1}} dx^{\hat{2}} \left[ -\frac{1}{3} \frac{M}{R^3} x^{\hat{1}} x^{\hat{2}} + \frac{1}{2} \frac{M}{R^4} \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^{\frac{1}{2}} x^{\hat{1}^2} x^{\hat{2}} \right] + \right. \\
 & \left. dx^{\hat{1}} dx^{\hat{3}} \left[ -\frac{1}{3} \frac{M}{R^3} x^{\hat{1}} x^{\hat{3}} + \frac{1}{2} \frac{M}{R^4} \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^{\frac{1}{2}} x^{\hat{1}^2} x^{\hat{3}} \right] + \right. \\
 & \left. dx^{\hat{2}} dx^{\hat{3}} \left[ \frac{2}{3} \frac{M}{R^3} x^{\hat{2}} x^{\hat{3}} - \frac{2M}{R^4} \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^{\frac{1}{2}} x^{\hat{1}} x^{\hat{2}} x^{\hat{3}} \right] + \right. \\
 & \left. O(dx^{\hat{\alpha}} dx^{\hat{\beta}} x^{\hat{i}} x^{\hat{j}} x^{\hat{k}} x^{\hat{l}}) \right)
 \end{aligned}$$

Используя приведенные выражения, можно определить координаты компонент ускорения в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^1}{dx^{\hat{0}^2}} = & - \left( 1 + \frac{M}{R^2} \frac{1}{(1-2M/R)^{\frac{1}{2}}} x^{\hat{1}} \right) \frac{M}{R^2} \frac{1}{(1-2M/R)^{\frac{1}{2}}} + \left( \frac{M}{R^2} \frac{1}{(1-2M/R)^{\frac{1}{2}}} g^1 \right) \left( \frac{M}{R^2} \frac{1}{(1-2M/R)^{\frac{1}{2}}} x^{\hat{1}} \right) g^2 + \\ & \frac{2M}{R^3} x^{\hat{1}} - \frac{4M}{R^3} x^{\hat{1}} g^{1^2} + \frac{2M}{R^3} g^1 (g^2 x^{\hat{2}} + g^3 x^{\hat{3}}) + \frac{2}{3} \frac{M}{R^3} (x^{\hat{1}} g^2 g^2 + x^{\hat{1}} g^3 g^3 - x^{\hat{2}} g^1 g^2 - x^{\hat{3}} g^1 g^3) + \\ & 4 \frac{M^2}{R^5} \frac{1}{(1-2M/R)^{\frac{1}{2}}} x^{\hat{1}^3} + \frac{8}{3} \frac{M^2}{R^5} \frac{1}{(1-2M/R)^{\frac{1}{2}}} (-2x^{\hat{1}^2} g^1 + x^{\hat{1}} x^{\hat{2}} g^1 g^2 + x^{\hat{1}} x^{\hat{3}} g^1 g^3) - \\ & \frac{2}{3} \frac{M^2}{R^5} \frac{1}{(1-2M/R)^{\frac{1}{2}}} g^{1^2} [-2x^{\hat{1}^2} + (x^{\hat{2}^2} + x^{\hat{3}^2})] + \\ & \frac{4}{3} \frac{M^2}{R^5} \frac{1}{(1-2M/R)^{\frac{1}{2}}} (x^{\hat{1}^2} g^{2^2} + x^{\hat{1}^2} g^{3^2} - x^{\hat{1}} x^{\hat{2}} g^1 g^2 - x^{\hat{1}} x^{\hat{3}} g^1 g^3) + \frac{1}{3} \frac{M^2}{R^5} \frac{1}{(1-2M/R)^{\frac{1}{2}}} (x^{\hat{2}^2} + x^{\hat{3}^2}) - \\ & \frac{3}{2} \frac{M}{R^4} \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^{\frac{1}{2}} (2x^{\hat{1}^2} - x^{\hat{2}^2} - x^{\hat{3}^2}) + \frac{1}{4} \frac{M \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^{\frac{1}{2}}}{R^4} \times \\ & \left[ (x^{\hat{2}^2} + x^{\hat{3}^2}) g^{1^2} + (-5x^{\hat{1}^2} + 4x^{\hat{3}^2}) g^{2^2} + (5x^{\hat{1}^2} + 4x^{\hat{2}^2}) g^{3^2} + 4x^{\hat{1}} x^{\hat{2}} g^1 g^2 + 4x^{\hat{1}} x^{\hat{3}} g^1 g^3 - 8x^{\hat{2}} x^{\hat{3}} g^2 g^3 \right] + \\ & \frac{3M \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^{\frac{1}{2}}}{R^4} \left[ (2x^{\hat{1}^2} - x^{\hat{2}^2} - x^{\hat{3}^2}) g^{1^2} - 2x^{\hat{1}} x^{\hat{2}} g^1 g^2 - 2x^{\hat{1}} x^{\hat{3}} g^1 g^3 \right] + O\left([x^k]^3\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^2}{dx^{\hat{0}^2}} = & 2 \left( \frac{M}{R^2} \frac{1}{(1-2M/R)^{\frac{1}{2}}} \right) g^1 \left( 1 + \frac{M}{R^2} \frac{1}{(1-2M/R)^{\frac{1}{2}}} x^{\hat{1}} \right) g^2 - \frac{M}{R^3} x^{\hat{2}} - \frac{4M}{R^3} x^{\hat{1}} g^1 g^2 + \frac{2M}{R^3} (x^{\hat{2}} g^{2^2} + x^{\hat{3}} g^{3^2}) + \\ & \frac{2}{3} \frac{M}{R^3} (x^{\hat{2}} g^{1^2} - 2x^{\hat{2}} g^{3^2} - x^{\hat{1}} g^1 g^2 + 2x^{\hat{3}} g^2 g^3) - \frac{2M^2}{R^5} \frac{1}{(1-2M/R)^{\frac{1}{2}}} x^{\hat{1}} x^{\hat{2}} + \frac{8}{3} \frac{M^2}{R^5} \frac{1}{(1-2M/R)^{\frac{1}{2}}} \times \\ & (x^{\hat{1}} x^{\hat{2}} g^{2^2} - 2x^{\hat{1}^2} g^1 g^2 + x^{\hat{1}} x^{\hat{3}} g^2 g^3) - \frac{2M^2}{3R^5 (1-2M/R)^{\frac{1}{2}}} g^1 g^2 (-2x^{\hat{1}^2} + x^{\hat{2}^2} + x^{\hat{3}^2}) + \frac{4M^2}{3R^5 (1-2M/R)^{\frac{1}{2}}} \times \\ & (x^{\hat{1}} x^{\hat{2}} g^{1^2} - 2x^{\hat{1}} x^{\hat{2}} g^{3^2} - x^{\hat{1}^2} g^1 g^2 + 2x^{\hat{1}} x^{\hat{3}} g^2 g^3) + \frac{M^2}{3R^5 (1-2M/R)^{\frac{1}{2}}} x^{\hat{1}} x^{\hat{2}} - \frac{3}{2} \frac{M}{R^4} \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^{\frac{1}{2}} (2x^{\hat{2}^2} - x^{\hat{1}} x^{\hat{2}}) + \\ & \frac{1}{4} \frac{M}{R^4} \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^{\frac{1}{2}} (-6x^{\hat{1}} x^{\hat{2}} g^{1^2} + 16x^{\hat{1}} x^{\hat{2}} g^{3^2} + (6x^{\hat{1}^2} + 2x^{\hat{2}} x^{\hat{3}}) g^1 g^2 - 10x^{\hat{1}} x^{\hat{3}} g^2 g^3 - 8x^{\hat{3}^2} g^1 g^2) + \\ & \frac{3M}{R^4} \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^{\frac{1}{2}} [-2x^{\hat{1}} x^{\hat{2}} g^{2^2} - 2x^{\hat{1}} x^{\hat{3}} g^2 g^3 + (2x^{\hat{1}^2} - x^{\hat{2}^2} - x^{\hat{3}^2}) g^1 g^2] + O\left([x^k]^3\right). \end{aligned}$$

В выражении для  $ds^2$  запись осуществлена с максимальной возможностью выявления симметрии записи коэффициентов при однородных компонентах координат пространства – времени. Примеры симметрии выделены фигурными скобками.

Выражение для компоненты  $\frac{d^2 x^{\hat{3}}}{dx^{\hat{0}^2}$  получается из  $\frac{d^2 x^{\hat{2}}}{dx^{\hat{0}^2}$  путем замены индекса 2 на индекс 3

( $2 \leftrightarrow 3$ ). Таким образом, решение задачи релятивистской инерциальной навигации позволяет исследовать проблему анализа кинематики наблюдений в неинерциальных (ускоренно движущихся вращающихся) систем отсчета методом обобщенного параллельного переноса Ферми – Уолкера и последующим пересчетом в соответствующие базисы тетрад.

### **Приложение: Обобщенный принцип теории относительности и метрика неинерциальной системы отсчета**

За основу теории относительности может быть принят принцип обобщенной относительности [47, с. 127], который с физической точки зрения утверждает следующее:

«...какую бы физическую систему отсчёта мы не избрали (инерциальную или неинерциальную), всегда можно указать бесконечную совокупность других систем отсчёта, таких, в которых все физические явления протекают одинаково с исходной системой отсчёта; так, что мы не имеем и не можем иметь никаких экспериментальных возможностей различить на эксперименте, в какой именно системе отсчёта из этой бесконечной совокупности мы находимся».

С математической точки зрения данный принцип означает, что [47, с. 142] «...для любой неинерциальной системы отсчёта можно указать бесконечный набор других неинерциальных систем отсчёта, в которых метрика имеет одну и ту же функциональную форму, в результате чего все уравнения физики в этих системах отсчёта форм-инвариантны, а поэтому никакими физическими экспериментами нельзя определить, в какой из таких ускоренных систем отсчёта мы находимся».

Конкретно математически этот принцип означает, что существует такое преобразование из старой системы отсчёта  $x^i$  с метрикой  $g_{ik}$  в новую систему  $x'^i$  с метрикой  $g'_{ik}$ , которое дает тождественную зависимость метрического тензора пространства-времени как в новых координатах так и в старых координатах, т.е.  $g'_{ik}(x') = g_{ik}(x)$ . Рассмотрим условие выполнения этого равенства для инфинитезимального преобразования 4-координат  $x^i = x'^i - \xi^i$ . Поскольку метрический тензор имеет закон преобразования  $g'_{ik}(x') = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} g_{lm}(x)$ , то подставляя в это выражение значение получим с точностью до линейных по  $\xi$  членов соотношение:

$$g'_{ik}(x') = g_{ik}(x) - g_{ik}(x)\partial_i \xi^l - g_{im}(x)\partial_k \xi^m. \tag{П.1}$$

С другой стороны, учитывая, что  $x^i = x'^i - \xi^i$  имеем:

$$g'_{ik}(x') = g_{ik}(x) + \xi^l \partial_l g_{ik}(x). \tag{П.2}$$

Подставляя (П.1) и (П.2) в соотношение тождества  $g'_{ik}(x') = g_{ik}(x)$  и выполняя соответствующие преобразования, получим, что  $g_{ik}(x)\partial_i \xi^l + g_{im}(x)\partial_k \xi^m + \xi^l \partial_l g_{ik}(x) = 0$ . Эти уравнения можно переписать в виде:

$$\nabla_i \xi_k + \nabla_k \xi_i = 0. \tag{П.3}$$



Уравнения (П.3) называют уравнениями Киллинга, а векторы  $\xi^i$  называют векторами Киллинга. Оказывается (детали вычислений можно найти в [47, п. 30, с. 196]), что уравнения Киллинга допускают решения с максимальным числом произвольных постоянных равным 10 только в том случае, когда скалярная кривизна пространства-времени постоянна, т.е.  $R = \text{const}$ .

Суть специальной теории относительности, установленная Минковским уточняет значение этой постоянной в вид  $R = 0$ . Таким образом, геометрия пространства-времени псевдоевклидова.

*Метрика радиально жёсткой неинерциальной системы отсчёта* Поскольку пространство – время является плоским, то тензор кривизны Римана – Кристоффеля, взятый по метрике системы отсчёта любого типа равен нулю, т.е.  $R_{iklm} = 0$ . Жёсткой (радиально) системой отсчёта называют такую систему отсчёта, метрический тензор которой может зависеть от времени  $t$  только через собственное ускорение  $A(t)$  как функцию времени или через собственную угловую скорость  $\Omega(t)$ . Таким образом:

$$g_{ik} = g_{ik}(A(t), \Omega(t), r). \tag{П.3}$$

Введенные условия (вместе с рядом других естественных предположений) однозначно фиксирует вид метрики жёсткой системы отсчёта. Впервые форму метрики ускоренной системы отсчёта открыл Мёллер [3], записав квадрат интервала в этой системе отсчёта в простом виде [5, с. 404, формула (13.71)] с поправкой на отсутствие в СТО кривизны пространства – времени):

$$ds^2 = (1 + Ar)^2 dt^2 - dr^2 \tag{П.4}$$

(здесь и далее  $c = 1$ ).

Рассмотрим теперь форму интервала для случая, когда система отсчёта кроме собственного ускорения имеет вращение. Координатные скорости в не вращающейся системе отсчёта  $v_n$  и во вращающейся системе отсчёта  $v_r$  связаны соотношением:

$$v_n = v_r + \Omega \times r. \tag{П.5}$$

Умножим это уравнение на  $dt$  и в (П.4) проведем замену  $dr \rightarrow dr + \Omega \times r dt$ . Таким образом, квадрат интервала жёсткой ускоренной и вращающейся системы отсчёта должен иметь вид:

$$ds^2 = \left[ (1 + Ar)^2 - (\Omega \times r)^2 \right] dt^2 - 2(\Omega \times r) dr dt - dr^2. \tag{П.6}$$

Эта форма интервала удовлетворяет известному квазиклассическому выражению для квадрата интервала:

$$ds^2 = \left[ 1 + 2Ar - (\Omega \times r)^2 \right] dt^2 - 2(\Omega \times r) dr dt - dr^2. \tag{П.7}$$

Вычисление тензора кривизны Римана - Кристоффеля по метрике, взятой из (П.6), даёт нуль, и, следовательно, выражение (П.6) верно. В результате метрический тензор жёсткой ускоренной и вращающейся системы отсчёта можно постулировать в следующем виде:

$$g_{00} = (1 + Ar)^2 - (\Omega \times r)^2, \quad g_{0\alpha} = -e_{\alpha\beta\gamma} \Omega_\beta r_\gamma, \quad g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}. \tag{П.8}$$

Стандартные определения метрики пространства  $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{\alpha 0} g_{0\beta}}{g_{00}}$  и физического времени

$\delta\tau = \sqrt{g_{00}} dx^0 + \frac{g_{0\alpha}}{\sqrt{g_{00}}} dx^\alpha$  для произвольной системы отсчёта дают общие выражения для  $dl^2$  и  $\delta\tau$

следующего вида соответственно:

$$dl^2 = dr^2 + \frac{[(\Omega \times r) dr]^2}{(1 + Ar)^2 - (\Omega \times r)^2}, \quad (\text{П.9})$$

$$\delta\tau = \sqrt{(1 + Ar)^2 - (\Omega \times r)^2} dt - \frac{(\Omega \times r) dr}{\sqrt{(1 + Ar)^2 - (\Omega \times r)^2}}. \quad (\text{П.10})$$

Из (П.9) следует, что жёсткая система отсчёта, при изменении собственных кинематических характеристик сохраняет расстояния только вдоль вектора угловой скорости и по радиусу от него. Однако расстояния по касательной к окружности вокруг вектора угловой скорости (тангенциальные расстояния) не сохраняются.

Поэтому жёсткая система отсчёта фактически является только радиально жёсткой. Радиально жёсткая система отсчёта обладает следующими свойствами: её временная координата является собственным временем начала отсчёта, оси 3-координат являются декартовыми, а корень из суммы квадратов координат точки даёт расстояние между ней и началом отсчёта. В таких 4-координатах метрика имеет особо простой вид (П.6).

Жёсткость системы отсчёта фактически означает следующее: при любом собственном ускорении как функции времени, точки радиально жёсткой системы координат поступательно движущейся неинерциальной системы отсчёта  $s$ , не слишком далёкие от начала отсчёта, имеют такой закон движения в лабораторной системе, что будут сохранять свой собственный радиус-вектор в процессе движения неизменным.

*Пример.* Рассмотрим простую механическую систему – свободную материальную точку в жёсткой неинерциальной системе  $s$  с параметрами  $A$  и  $\Omega$  достаточно. Наиболее общим преобразованием системы отсчёта является комбинация движения со сдвигом, вращения и поворота. Совершим сначала преобразование движения: т.е. переход из системы отсчёта  $s$  в систему отсчёта  $s'$ , перемещающуюся на расстояние  $b(t)$  со скоростью  $v = db/dt$ . Тогда координаты  $r$  и  $r'$  и скорости  $u$  и  $u'$  в системах  $s$  и  $s'$  будут связаны уравнениями:

$$r = r' + b, \quad u = u' + v, \quad v = db/dt.$$

При этом характеристики новой системы отсчёта определяются в виде:

$$\Omega' = \Omega, \quad A' = A + \dot{v} + \dot{\Omega} \times b + 2\Omega \times v + \Omega \times (\Omega \times b).$$

Таким образом, выбор другого тела отсчёта вне зависимости от его состояния движения (даже покоящегося относительно первого) в общем случае приведёт к смене системы отсчёта, так как изменятся её векторные характеристики.

#### *Условие общей форм-инвариантности метрики*

Согласно обобщённому принципу относительности, введённому выше, не существует способа отличить одну жёсткую неинерциальную систему отсчёта от другой, если их начала отсчёта имеют одинаковые собственные характеристики. Таким образом, все отличия жёстких систем отсчёта друг от друга связаны исключительно с различием собственного ускорения  $A$  и собственной угловой скорости начала отсчёта  $\Omega$ . Поэтому можно сделать вывод, что при выборе другой системы отсчёта отличающейся от первоначальной наиболее общим преобразованием поступательного движения в совокупности с поворотом и вращением зависимость метрики пространства – времени от декартовых

координат останется неизменной [27, 28]. Это означает, что физические законы при смене системы отсчёта изменяются исключительно за счёт изменения векторных характеристик системы отсчёта  $A$  и  $\Omega$ , причём абсолютное значение координат и скорости тела отсчёта значения не имеет:

$$g_{ik}(A(t), \Omega(t), r) = \text{form-invariant} . \quad (\text{П.11})$$

Это положение иногда называют принципом общей форм-инвариантности [28].

*Примечание.* Если при преобразовании системы отсчёта векторные параметры не меняются, то соответственно не меняются числовое значение и математическая форма компонент метрического тензора в данной точке пространства. Поэтому физическое явление в первоначальной и новой системе отсчёта при одинаковых начальных условиях будет протекать одинаково так, что невозможно на опыте будет отличить одну систему отсчёта от другой. Это есть суть обобщённого принципа относительности. Если эти параметры равны нулю, то обобщённый принцип относительности переходит в специальный принцип относительности. Поэтому иногда условие общей форм-инвариантности является более сильным утверждением, чем обобщённый принцип относительности.

С другой стороны, обобщённый принцип относительности, разумеется, имеет большую сферу применимости в связи с тем, что он пригоден и для нежёстких систем отсчёта.

*Пример.* Математически условие общей форм-инвариантности означает, что в произвольной жёсткой системе отсчёта  $x^i$  существует такое преобразование  $x^i = x^i(x')$  (имеющее смысл замены системы отсчёта), что при его подстановке в закон преобразования метрического тензора  $g'_{ik}(x') = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} g_{lm}(x)$  его математическая форма в результате преобразования не изменится:

$$ds^2 = \left[ (1 + Ar)^2 - (\Omega \times r)^2 \right] dt^2 - 2(\Omega \times r) dr dt - dr^2 = \left[ (1 + \omega\rho)^2 - (\omega \times \rho)^2 \right] d\tau^2 - 2(\omega \times \rho) d\rho d\tau - d\rho^2 . \quad (\text{П.12})$$

Форм-инвариантность метрики гарантирует, что физические законы при смене системы отсчёта останутся неизменными. Эти преобразования образуют группу. Истинным преобразованием в жёсткую неинерциальную систему отсчёта является преобразование из лабораторной инерциальной системы отсчёта индуцирующее метрику (П.8).

*Примечание.* Кроме поступательного движения, поворота и вращения система отсчёта изменяется также при сдвиге на фиксированное расстояние. Если первоначальная система отсчёта жёсткая и нестационарная (т.е. её характеристики зависят от времени  $A = A(t)$ ,  $\Omega = \Omega(t)$ ), то система отсчёта, начало которой сдвинуто, не будет жёсткой и её метрика не будет вида (П.8). В этом случае вопрос о метрике соответствующей такой системе отсчёта требует дополнительного исследования. Однако, если первоначальная система отсчёта является жёсткой и стационарной, то жёсткой и стационарной будет и система отсчёта, начало которой сдвинуто. В этом случае к такой системе отсчёта будут полностью применимы уравнения (П.11), (П.12).

*Пример.* Найдём преобразование сдвига на вектор  $b$  в ускоренной системе отсчёта ( $\Omega = 0$ ). Предположим, что оно является обычной заменой вида  $r = r' + b$ . Подставив её в (П.4) и сделав преобразования можно свести интервал к виду

$$ds^2 = \left( 1 + \frac{A}{1 + Ab} r' \right)^2 d \left( t + b \int_0^t A dt \right)^2 - dr'^2 . \quad (\text{П.13})$$

Определяемая отсюда метрика является частным случаем (П.8) и, следовательно, сделанное предположение справедливо. Преобразование времени в этом случае имеет вид:

$$t' = t + b \int_0^t A dt. \tag{П.14}$$

Из (П.13) видно, что при сдвиге в ускоренной системе отсчёта на вектор  $b$ , собственное ускорение системы отсчёта изменилось и стало:

$$A' = \frac{A}{1+Ab}. \tag{П.15}$$

Данная формула известна [3, с. 206].

### Приложение 1: Преобразование Лоренца – Мёллера – Нэлсона

Справедливость специального преобразования Лоренца – Мёллера – Нэлсона (ЛМН) является следствием условия форминвариантности метрики радиально жёсткой неинерциальной системы отсчёта. Это преобразование описывает переход из лабораторной инерциальной системы отсчёта в такую радиально жёсткую неинерциальную систему отсчёта  $s$ , оси которой двигаются, условно говоря, "параллельно" осям лабораторной системы отсчёта. Эта неинерциальная система отсчёта обладает собственным вращением, которое называется собственной прецессией Томаса.

В результате специальное преобразование ЛМН применяется для радиально жёстких неинерциальных систем отсчёта обладающих собственной прецессией Томаса. ЛМН является единственным возможным голономным преобразованием при условии его соответствия неголономному дифференциальному преобразованию Лоренца, если движение в данный момент времени стало равномерным.

### Специальное преобразование в неинерциальную радиально жёсткую систему отсчёта

Данное преобразование из лабораторной инерциальной системы отсчёта  $S: (T, R)$  в радиально жёсткую неинерциальную систему  $s: (t, r)$ , которая движется без вращения относительно  $S$  выглядит в виде [48]:

$$\begin{aligned} T &= \frac{v\tau}{\sqrt{1-g^2}} + \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-g^2}}, \\ R &= r + \frac{1-\sqrt{1-g^2}}{g^2\sqrt{1-g^2}} (v\tau)v + \int_0^t \frac{vdt}{\sqrt{1-g^2}}. \end{aligned} \tag{П.1.1}$$

Здесь  $T, R$  соответственно время и координаты лабораторной инерциальной системы отсчёта  $S$ ;  $t, r$  соответственно время и координаты неинерциальной системы  $s$ . Параметром этого преобразования является всего одна величина  $v(t)$  (зависящая от времени  $t$  системы  $s$ ), поэтому такое орбитальное движение  $s$  можно называть поступательным. Очевидно в случае  $v = \text{const}$  преобразование (П.1.1) переходит в обычное преобразование Лоренца. В случае же, когда  $v$  расположена вдоль оси  $X$  и по величине равна  $g = \text{th } \theta$  преобразование (П.1.1) перейдёт в преобразование Мёллера [46], [16]:

$$T = xsh\theta + \int_0^t ch\theta d\theta, \quad X = xsh\theta + \int_0^t ch\theta d\theta, \quad Y = y, \quad Z = z, \tag{П.1.2}$$

где  $\theta = \int_0^t W dt$ , и  $W$  – собственное ускорение системы отсчета вдоль оси  $X$ .

*Примечание.* Физический смысл векторного параметра  $v$  в специальном преобразовании ЛМН заключается в том, что этот параметр является скоростью системы отсчёта, которая сопутствует системе  $s$ , но, в отличие от неё, не испытывает собственного вращения (т.е. подвергается прецессии Ферми – Уолкера). Скорость какой-либо точки системы  $s$  определённым образом зависит от векторного параметра  $v$  и её координаты  $r$ . Таким образом, точки такой системы отсчёта в лабораторной системе совершают самосогласованное движение, своё для каждой точки. Данное движение является таким, чтобы собственные размеры неинерциальной системы в процессе движения оставались постоянными. Система отсчёта  $s$  хотя и движется поступательно, но она имеет ещё и некоторое собственное вращение, определённым образом связанное с её орбитальным движением. Это вращение является собственной прецессией Томаса.

Так, например, подставив дифференциалы от (П1.1) в выражение для интервала инерциальной системы в прямоугольных координатах:

$$ds^2 = dT^2 - dR^2, \tag{П1.3}$$

то получится интервал вида (П.6) для жёсткой, ускоренной с собственным ускорением  $W$  и вращающейся с собственной частотой прецессии Томаса  $\Omega$  системы отсчёта [44], где:

$$W = \frac{\dot{v}}{\sqrt{1-g^2}} + \frac{1-\sqrt{1-g^2}}{g^2\sqrt{1-g^2}}(\dot{v}v)v, \quad \Omega = \Omega_T = \frac{1-\sqrt{1-g^2}}{g^2\sqrt{1-g^2}}(v \times \dot{v}). \tag{П1.4}$$

Эта угловая скорость зависит от характера орбитального движения системы отсчёта.

*Пример: Преобразование в прямолинейно движущуюся вдоль оси  $X$  равномерно ускоренную систему отсчёта* В этом случае в (П1.4) надо принять  $\dot{v} \parallel v$  и получим  $W = \frac{\dot{g}}{1-g^2}$ . Решение этого уравнения имеет следующий вид:  $g = \text{th}(Wt + k)$ ,  $k = \text{const}$ . Подстановка этого решения в (П1.4), приводит к следующему результирующему преобразованию:

$$T = \frac{1+Wx}{W} \text{sh}(Wt+k) - \frac{shk}{W}, \quad X = \frac{1+Wx}{W} \text{ch}(Wt+k) - \frac{chk}{W}.$$

Рассмотрим теперь кратко вопросы, касающиеся преобразования в глобальную, радиально жёсткую неинерциальную систему отсчёта, которая относительно лабораторной системы может двигаться произвольно. Приведем начальные сведения о преобразовании в произвольную радиально жёсткую, неинерциальную систему отсчёта и рассмотрим формулы касающиеся матрицы вращения входящей в общее преобразование ЛМН. Затем, рассмотрим вращение Вигнера и форминвариантность общего преобразования после совершения буста. Далее рассматривается 4-мерная формулировка общего преобразования ЛМН и выяснен тетрадный смысл собственных характеристик системы отсчёта [27].

### **Общее преобразование в радиально жёсткую неинерциальную систему отсчёта**

В том случае, если жёсткая система отсчёта  $s'$ :  $(t, r')$  имеет другую ориентацию, чем  $s$ , специальное преобразование ЛМН можно обобщить согласно замене:

$$r^\alpha(s) = a^{\beta\alpha} r'^\beta(s'), \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3,$$

где  $a^{\beta\alpha}$  есть матрица поворота.

Таким образом, общее преобразование ЛМН имеет вид [27, 48]:

$$T = \frac{g^\alpha a^{\beta\alpha} r'^{\beta}}{\sqrt{1-g^2}} + \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-g^2}},$$

$$R^\alpha = a^{\beta\alpha} r'^{\beta} + \frac{1-\sqrt{1-g^2}}{g^2 \sqrt{1-g^2}} g^\alpha g^\gamma a^{\beta\gamma} r'^{\beta} + \int_0^t \frac{g^\alpha dt}{\sqrt{1-g^2}}.$$
(П1.5)

Под  $a^{\beta\alpha}$  необходимо понимать матрицу собственного вращения.

Итак, общее преобразование ЛМН производится в два этапа. На первом этапе производится переход в поступательно движущуюся систему отсчёта (специальное преобразование ЛМН), а на втором этапе производится переход во вращающуюся систему отсчёта с матрицей вращения  $a^{\beta\alpha}$ . Собственное ускорение есть, таким образом, композиция формул (П1.4) и  $W'^\alpha = a^{\alpha\beta} W^\beta$ , т.е.:

$$W^\gamma = a^{\gamma\alpha} \left[ \frac{\dot{g}^\alpha}{\sqrt{1-g^2}} + \frac{1-\sqrt{1-g^2}}{g^2(1-g^2)} (\dot{v}v) g^\alpha \right],$$
(П1.6)

а собственная угловая скорость - композиция второго выражения (П1.4) и  $\Omega'^\alpha = a^{\alpha\beta} \Omega^\beta + \omega'^\alpha$ , т.е.:

$$\Omega'^\gamma = a^{\gamma\alpha} \frac{1-\sqrt{1-g^2}}{g^2(1-g^2)} e^{\alpha\mu\nu} g^\mu \dot{g}^\nu + \omega'^\gamma.$$
(П1.7)

Отсюда имеем

$$\omega'^\gamma = \Omega'^\gamma - a^{\gamma\alpha} \frac{1-\sqrt{1-g^2}}{g^2(1-g^2)} e^{\alpha\mu\nu} g^\mu \dot{g}^\nu.$$
(П1.8)

В классической физике данные уравнения имеют вид:  $W'^\alpha = a^{\alpha\beta} \dot{g}^\beta$ ,  $\Omega'^\alpha = \omega'^\alpha$ . Второе из этих уравнений можно решить относительно  $a^{\alpha\beta}$  отдельно от первого. Очевидно, в релятивистском случае, из-за наличия собственной прецессии Томаса формула (П1.6) не является независимой от (П1.7).

### Общее 4-мерное ЛМН - преобразование

Для представления общего ЛМН-преобразования в 4-мерной форме рассмотрим следующие 4 величины, состоящие из 4 компонент (см. Часть 2),

$$\Lambda^{0i} = (\Lambda^{00}, \Lambda^{0\alpha}) = \left( \frac{1}{\sqrt{1-g^2}}, \frac{g^\alpha}{\sqrt{1-g^2}} \right),$$

$$\Lambda^{\alpha i} = (\Lambda^{\alpha 0}, \Lambda^{\alpha\beta}) = \left( \frac{g^\gamma a^{\alpha\gamma}}{\sqrt{1-g^2}}, a^{\alpha\beta} + \frac{1-\sqrt{1-g^2}}{g^2 \sqrt{1-g^2}} g^\beta g^\mu a^{\alpha\mu} \right),$$
(П1.9)

где первый индекс у каждого символа отвечает за его номер, второй – за его компоненту,  $g^\alpha$  определяет 3-вектор скорости начала отсчёта неинерциальной системы. Данные величины удовлетворяют соотношениям ортонормированности:

$$\Lambda^{0i} \Lambda^0_i = 1, \quad \Lambda^{0i} \Lambda^\alpha_i = 0, \quad \Lambda^{\alpha i} \Lambda^\beta_i = -\delta^{\alpha\beta}.$$
(П1.10)

Смысл времени – подобного 4-вектора заключается в том, что он является единичным и касательным к мировой линии начала отсчёта системы  $s'$ . Смысл же пространственно-подобного 4-вектора под номером  $\alpha$  заключается в том, что он является соответствующим ортом декартовой системы координат  $s'$ . В этом нетрудно убедиться, заметив, что  $\Lambda^{0i}, \Lambda^{\beta i}$  удовлетворяют равенствам ортонормированности (П1.10). Такой локальный ортонормированный комплекс четырёх 4-векторов  $\Lambda^{0i}, \Lambda^{\beta i}$ , один из которых (времени-подобный,  $\Lambda^{0i}$ ) расположен вдоль касательной к мировой линии начала отсчёта системы координат  $s'$ , а другие – пространственно-подобные ( $\Lambda^{\beta i}, \beta = 1, 2, 3$ ) являются направляющими ортами системы  $s'$ , как известно, называется тетрадой. Тогда общее преобразование ЛМН (П1.1) в систему  $s'$  будет выглядеть в простом 4-мерном виде:

$$X^i = \Lambda^{\alpha i} x'^{\alpha} + \int_0^{x^0} \Lambda^{0i} dx^0, \quad (\text{П1.11})$$

где  $x'^{\alpha}, dx^0$  представляют собой коэффициенты при 4-векторе. Дифференцируя (П1.11) получим:

$$dX^i = \Lambda^{\alpha i} dx'^{\alpha} + x'^{\alpha} d\Lambda^{\alpha i} + \Lambda^{0i} dx^0. \quad (\text{П1.12})$$

После всех вычислений [27] имеем:

$$\frac{d\Lambda^{\alpha 0}}{dx^0} = W'^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-g^2}} + e^{\alpha\beta\gamma} \Omega'^{\gamma} \frac{g^{\nu} a^{\beta\nu}}{\sqrt{1-g^2}}. \quad (\text{П1.13})$$

Для производной компоненты  $\Lambda^{\alpha\mu}$  можно найти её следующее значение:

$$\frac{d\Lambda^{\alpha\mu}}{dx^0} = W'^{\alpha} \frac{g^{\nu} a^{\mu\nu}}{\sqrt{1-g^2}} + e^{\alpha\beta\gamma} \Omega'^{\gamma} a^{\beta\mu} + e^{\alpha\beta\gamma} \Omega'^{\gamma} \frac{1-\sqrt{1-g^2}}{g^2 \sqrt{1-g^2}} g^{\mu} g^{\nu} a^{\beta\nu}. \quad (\text{П1.14})$$

Уравнения (П1.13) и (П1.14) можно записать в единой форме как [28]:

$$\frac{d\Lambda^{\alpha i}}{dx^0} = W'^{\alpha} \Lambda^{0i} + e^{\alpha\beta\gamma} \Omega'^{\gamma} \Lambda^{\beta i}. \quad (\text{П1.15})$$

Дифференцируя компоненты (П1.9) получим, что [27]:

$$\frac{d\Lambda^{0i}}{dx^0} = W'^{\alpha} \Lambda^{\alpha i}. \quad (\text{П1.16})$$

Из (П1.10) и (П1.15) очевиден тетрадный смысл характеристик систем отсчёта [28]:

$$W'^{\alpha} = \Lambda^0_i \frac{d\Lambda^{\alpha i}}{dx^0}, \quad \Lambda^{\mu}_i \frac{d\Lambda^{\alpha i}}{dx^0} = -e^{\alpha\mu\gamma} \Omega'^{\gamma}, \quad \Omega'^{\nu} = -\frac{1}{2} e^{\alpha\mu\nu} \Lambda^{\mu}_i \frac{d\Lambda^{\alpha i}}{dx^0}. \quad (\text{П1.17})$$

Сумма в правой части (П1.15) является скоростью изменения триады 4-векторов  $\Lambda^{\alpha i}$  относительно локальной невращающейся системы. Первый член в ней отвечает за перенос Ферми – Уолкера, а второй член отвечает за наличие собственного вращения. Используя это соотношение, можно получить в (П1.12) разложение вектора  $dX^i$  по векторам тетрады:

$$dX^i = \Lambda^{\beta i} (dx'^{\beta} + x'^{\alpha} e^{\alpha\beta\gamma} \Omega'^{\gamma} dx^0) + \Lambda^{0i} dx^0 (1 + x'^{\alpha} W'^{\alpha}). \quad (\text{П1.18})$$

Равенство (П1.18) можно рассматривать как результат операции взятия квадратного корня из 4-интервала.

## Приложение 2: Ортонормированные реперы, перенос Ферми – Уолкера

*Пример: Ортонормированные реперы* Четыре взаимно ортогональных единичных вектора образуют ортонормированный репер (ОР). Векторы ОР обозначают как  $\lambda_{(a)}^i$ , где  $i$  – контравариантный тензорный индекс, а  $a$  – номер, позволяющий различать векторы ОР. Ковариантные компоненты того же самого ОР имеют вид  $\lambda_{(a)i} = g_{ij}\lambda_{(a)}^j$ . Три из четырех векторов ОР пространственно подобны, один времени подобен. Традиционно векторы нумеруют так, чтобы  $\lambda_{(4)}^i$  был времени подобен. Тогда условия ортонормируемости можно записать в виде:  $\lambda_{(a)}^i \lambda_{(b)i} = \eta_{(ab)}$ , где  $\eta_{(ab)} = \eta^{(ab)} = \text{diag}(1,1,1,-1)$  представляет собой инвариантную диагональную матрицу с указанными элементами. Она удовлетворяет условию  $\eta^{(ab)}\eta_{(ac)} = \delta_c^b$ , и представляет собой корень квадратный из единицы с точки зрения теории матриц. Данное условие  $\lambda_{(a)}^i \lambda_{(b)i} = \eta_{(ab)}$  можно представить в виде  $\lambda_{(a)}^i \lambda_i^{(b)} = \delta_a^b$  и как следствие получим  $\lambda_{(a)}^i \lambda_j^{(a)} = \delta_j^i$ . Два ОР  $\lambda_{(a)}^i$  и  $\lambda^{(a)i}$  связаны между собой, так как их пространственно-подобные векторы совпадают, а времени подобные направлены противоположно.

Два ОР,  $\lambda_{(a)}^i$  и  $\mu_{(a)}^i$ , заданные в некоторой точке пространства – времени связаны друг с другом преобразованием Лоренца (в виде инвариантной матрицы Лоренца  $L_{(b)}^{(a)} = \lambda_i^{(a)} \mu_{(b)}^i$ ) так, что если ОР совпадают, то  $L = 1$ , и  $\lambda_j^{(a)} = L_{(b)}^{(a)} \mu_j^{(b)}$ ,  $\mu_{(b)}^i = L_{(b)}^{(a)} \lambda_{(a)}^i$ . Любой тензор, как и вектор, можно разложить на компоненты по ОР  $\lambda_i^{(a)}$ . Эти компоненты инвариантны в тензорном смысле и зависят от выбора ОР: либо контра – , либо ковариантны относительно преобразований Лоренца для ОР.

*Пример: Геодезические кривые и вариационное исчисление* Рассмотрим двумерное пространство, заданное параметрическими уравнениями:  $x^i = x^i(u, v)$  и два векторных поля  $U^i = \frac{\partial x^i}{\partial u}$ ,  $V^i = \frac{\partial x^i}{\partial v}$ . Если от этих векторных полей взять абсолютные производные по  $v$  и  $u$  соответственно, то получим  $\frac{\delta U^i}{\delta v} = \frac{\delta V^i}{\delta u}$ . Данное уравнение является тензорным и выполняется для любой координатной системы (символы Кристоффеля в рассматриваемой точке равны нулю).

Допустим теперь, что две кривые  $C_0$  и  $C_1$  соединены множеством кривых таких как  $A_0A_1$  и  $B_0B_1$  (см. рис. П2.1).

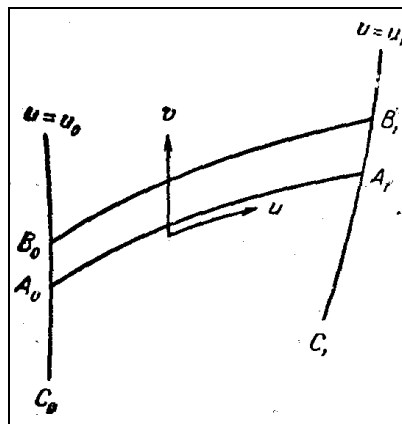


Рис. П2. 1. Вариационная задача для геодезических с незакрепленными конечными точками



Семейство соединяющих кривых образует двумерное пространство, которое определяется уравнениями  $x^i = x^i(u, v)$ , где параметр  $u$  пробегает все значения между фиксированными значениями на концах ( $u_0$  на  $C_0$  и  $u_1$  на  $C_1$  соответственно). Параметр  $v$  принимает постоянное значение на каждой из соединяющих кривой.

Введем интеграл  $I(v) = \frac{1}{2}(u_1 - u_0) \int_{u_0}^{u_1} g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial u} du$ , взятый вдоль какой-либо из кривых  $v = \text{const}$ . В ранее введенных обозначениях данный интеграл примет вид  $I(v) = \frac{1}{2}(u_1 - u_0) \int_{u_0}^{u_1} g_{ij} U^i U^j du$ . Тогда из условия  $\frac{\delta U^i}{\delta v} = \frac{\delta V^i}{\delta u}$  получим:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dv} &= (u_1 - u_0) \int_{u_0}^{u_1} g_{ij} U^i \frac{\delta V^j}{\delta u} du = (u_1 - u_0) \int_{u_0}^{u_1} \frac{\partial}{\partial u} (g_{ij} U^i V^j) du - (u_1 - u_0) \int_{u_0}^{u_1} g_{ij} \frac{\delta U^i}{\delta u} V^j du = \\ &= (u_1 - u_0) [g_{ij} U^i V^j] \Big|_{u_0}^{u_1} - (u_1 - u_0) \int_{u_0}^{u_1} g_{ij} \frac{\delta U^i}{\delta u} V^j du. \end{aligned} \tag{П2.1}$$

Если кривые  $C_0$  и  $C_1$  вырождаются в точки  $A_0, A_1$  (см. рис. 2), то получим семейство кривых с фиксированными концами. На концах  $V^j = 0$  и (П2.1) имеет вид:

$$\frac{dI}{dv} = - (u_1 - u_0) \int_{u_0}^{u_1} g_{ij} \frac{\delta U^i}{\delta u} V^j du.$$

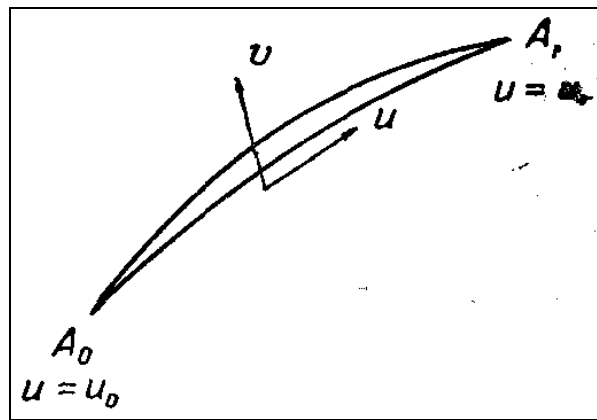


Рис. П2. 2. Вариационная задача для геодезических с фиксированными конечными точками

Геодезическая определяется как кривая, на которой для вариаций, оставляющих фиксированными конечные точки, значение функционала  $I$  стационарно, т.е.  $dI/dv = 0$  для произвольных  $V^j$  везде, кроме конечных точек. Таким образом, геодезическая удовлетворяет уравнениям:

$$\frac{\delta U^i}{\delta u} = \frac{\delta}{\delta u} \frac{dx^i}{du} = \frac{d^2 x^i}{du^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{du} \frac{dx^k}{du} = 0. \tag{П2.2}$$

*Примечание.* Напомним, что для векторного поля, определенного на кривой  $x^i = x^i(u)$ , абсолютная производная имеет вид

$$\frac{\delta U^i}{\delta u} = \frac{dU^i}{du} + \Gamma^i_{ab} U^a \frac{dx^b}{du}.$$

Уравнения (П2.2) допускают первый интеграл  $g_{ij} \frac{dx^i}{du} \frac{dx^j}{du} = \varepsilon k^2$ , или  $ds = kdu$ , где  $k = \text{const}$  и  $\varepsilon$  – индикатор для времени подобной или пространственно подобной геодезической. Геодезическую называют изотропной, если  $k = 0$ . Для неизотропной геодезической можно подобрать канонические параметры так, чтобы  $k = 1$ . Тогда для каждого такого параметра имеем  $du = ds$ . Следовательно, уравнения (П2.2) можно записать в виде:

$$\frac{\delta}{\delta s} \frac{dx^i}{du} = \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \tag{П2.3}$$

*Пример: Формулы Френе – Серре.* Представляет особый интерес ОР, связанные с каждой точкой кривой  $C$  в пространстве-времени (особенно времени подобные кривые). Рассмотрим уравнения:

$$\frac{\delta A^i}{\delta s} = bB^i, \quad \frac{\delta B^i}{\delta s} = cC^i + bA^i, \quad \frac{\delta C^i}{\delta s} = dD^i - cB^i, \quad \frac{\delta D^i}{\delta s} = -dC^i. \tag{П2.3}$$

Имеют место условия  $A^i A_i = -1, B^i B_i = C^i C_i = D^i D_i = 1$ , коэффициенты  $b, c$  и  $d$  являются неотрицательными скалярами. Если  $A^i = \frac{dx^i}{ds}$  представляет единичный вектор, касательный к  $C$ , то данный вектор совместим с выражением условий нормирования. Тогда из (П2.3) определяются  $B^i, c; C^i, c; D^i, d$  и се четыре вектора единичные и образуют ОР.

Уравнения (П2.3) определяются как формулы Френе – Серре, величины, а величины  $B^i, C^i, D^i$  определяют первую, вторую и третью нормали к  $C$  соответственно; величины  $b, c, d$  представляют первую, вторую и третью кривизну. Геодезическая является простейшим примером из времени подобных кривых, для которой  $b = c = d = 0$ .

*Пример: Параллельный перенос и перенос Ферми – Уолкера.* Известно, что вектор  $V^i$  претерпевает параллельный перенос Леви – Чивита вдоль кривой  $C$ , заданной уравнениями  $x^i = x^i(u)$ , если его абсолютная производная обращается в нуль:  $\frac{\delta V^i}{\delta u} = 0$ . Это уравнение не меняет своей формы при преобразовании параметра  $u$  и справедливо также для изотропной кривой  $C$ . При параллельном переносе не меняются величина вектора и скалярное произведение двух векторов:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta U^i}{\delta u} = 0 \\ \frac{\delta V^i}{\delta u} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{du}(U_i U^i) = 0, & \frac{d}{du}(V_i V^i) = 0 \\ \frac{d}{du}(U_i V^i) = 0. \end{cases} \tag{П2.4}$$

Уравнение  $\frac{\delta V^i}{\delta u} = 0$  определяет вектор  $V^i$  вдоль  $C$ , если  $V^i$  заданы в какой-либо одной точке на  $C$ . Из (П2.4) видно, что ОР  $\lambda_{(a)}^i$  остается ОР при параллельном переносе. Если параллельному переносу подвергается также и вектор  $V^i$ , то его компоненты  $V_{(a)}$  в ОР остаются постоянными. Единичный вектор, касательный к геодезической, претерпевает параллельный перенос, как следует из (П2.3) в виде  $\frac{\delta}{\delta s} \frac{dx^i}{ds} = 0$ .

В случае изотропной геодезической касательный вектор  $dx^i / du$  подвергается параллельному переносу при условии, что  $u$  есть канонический параметр. В этом случае  $\frac{\delta}{\delta u} \frac{dx^i}{du} = 0$ .

Рассмотрим теперь времени подобную кривую  $C$ , заданную уравнениями  $x^i = x^i(s)$ . Запишем единичный касательный вектор в виде  $A^i = dx^i / ds$ . Перенос Ферми – Уолкера определяется как перенос вектора  $F^i$  вдоль  $C$  в виде уравнения (см. Часть 1) :

$$\frac{\delta F^i}{\delta s} = bF_j (A^i B^j - A^j B^i), \tag{П2.5}$$

где  $B^i$  и  $b$  представляют собой соответственно первую нормаль и первую кривизну  $C$  в соответствии с (П2.3). Уравнение (П2.5), как и в случае параллельного переноса, определяет  $F^i$  вдоль  $C$ , если  $F^i$  заданы в какой либо одной точке на  $C$ . В силу (П2.3) единичный касательный вектор  $A^i$  автоматически претерпевает перенос Ферми – Уолкера и имеет место соотношение ( $A_j B^j = 0$ ):

$$\frac{\delta A^i}{\delta s} = bA_j (A^i B^j - A^j B^i). \tag{П2.6}$$

*Примечание.* С точки зрения математики перенос Ферми – Уолкера имеет сходство с параллельным переносом Леви – Чивита в смысле сохранения нормы вектора и скалярного произведения. В этом случае, если  $U_i$  и  $V_i$  одновременно подвергаются переносу Ферми – Уолкера, то имеет место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (V_i V^i) &= 2V_i \frac{\delta V^i}{\delta s} = 2bV_i V_j (A^i B^j - A^j B^i) = 0, \\ \frac{d}{ds} (U_i V^i) &= U_i \frac{\delta V^i}{\delta s} + V_i \frac{\delta U^i}{\delta s} = b(U_i V_j + V_i U_j) (A^i B^j - A^j B^i) = 0. \end{aligned} \tag{П2.7}$$

Таким образом, как и при параллельном переносе, при переносе Ферми – Уолкера сохраняются ОР и компоненты вектора в ОР [3]. Несмотря на то обстоятельство, что параллельный перенос определяется более простым выражением, чем перенос Ферми – Уолкера, в некоторых физических приложениях последний оказывается более важным.

На рис. П2. 3 приведено физическое пояснение различий в моделях параллельного переноса.

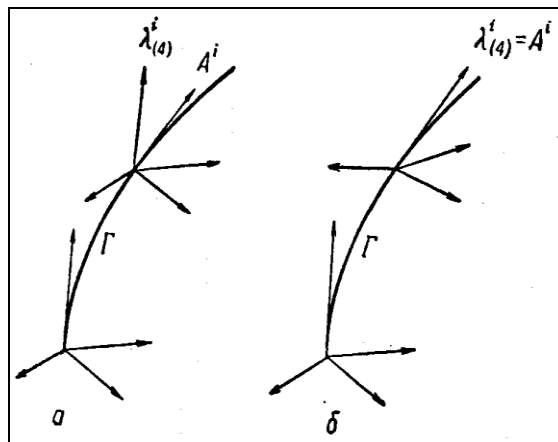


Рис. П2. 3. Модели параллельного переноса (а) параллельный перенос; (б) перенос Ферми – Уолкера

Допустим, что ОР выбран так, что его четвертый вектор является касательным к  $C$  в некоторой точке (т.е.,  $\lambda_{(4)}^i = A^i$ ). Тогда при параллельном переносе  $\lambda_{(4)}^i$  отклонится от  $A^i$  (если  $C$  не геодезическая кривая). Однако при переносе Ферми – Уолкера  $\lambda_{(4)}^i$  остается касательным. Следовательно, перенос Ферми – Уолкера сохраняет ОР вдоль  $C$ , а также сохраняет ортонормированный 3-репер, ортогональный к  $C$ . В результате образуется пространственная система координат для наблюдателя, движущегося в пространстве – времени вдоль  $C$ . Такая система позволяет обеспечить правильное релятивистское обобщение ньютоновского понятия невращающейся системы отсчета. В случае когда  $C$  – геодезическая, параллельный перенос и перенос Ферми – Уолкера совпадают (в (П2.6) необходимо принять  $b = 0$ ) при условии, что  $C$  – неизотропная геодезическая (перенос Ферми – Уолкера связан с  $s$  и оказывается неопределенным вдоль любой изотропной линии).

*Пример.* Рассмотрим случай, когда ОР  $\lambda_{(a)}^i$  подвергнут переносу Ферми – Уолкера так, что  $\lambda_{(a)}^i = A^i$  и представляет собой единичный вектор, касательный к  $C$ . Поскольку каждый из четырех

векторов  $\delta\lambda_{(a)}^i / \delta s$  можно отнести к реперу, то получим  $\frac{\delta\lambda_{(a)}^i}{\delta s} = Q_{(ab)}\eta^{(bc)}\lambda_{(c)}^i$ , где

$Q_{(ad)} = b(B_{(a)}\eta_{(d4)} - B_{(d)}\eta_{(a4)})$ ,  $B_{(a)} = B_i\lambda_{(a)}^i$  определяют инвариантные компоненты вектора первой нормали в 4-репере. Инвариантная матрица характеризует поведение ОР при переносе Ферми – Уолкера, кососимметрична и все ее элементы тождественно равны нулю, за исключением следующих:  $Q_{(4\alpha)} = -Q_{(\alpha 4)} = bB_{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ . Если перенос Ферми – Уолкера применить к вектору, ортогональному в некоторой точке на  $C$  к касательному вектору  $A^i$ , то ортогональность сохраняется. В этом случае (П2.6) примет вид:

$$\frac{\delta F^i}{\delta s} = bA^i F_j B^j. \tag{П2.8}$$

Правило переноса (П2. 8) называется переносом Ферми.

*Примечание.* С точки зрения формального описания переноса Ферми – Уолкера и Ферми между пространственно подобной кривой и времени подобной кривой большого различия нет. Достаточно поменять знак в (П2.6) и (П2.8) и тогда для пространственно подобной кривой  $C$  можно дать следующие определения:

Перенос Ферми – Уолкера:  $DF^i = -F_j (A^i DA^j - A^j DA^i)$ ,

Перенос Ферми:  $DF^i = -A^i F_j DA^j$ .

### Приложение 3: Координаты Ферми

В 1922г. Ферми показал, что для заданной кривой в римановом пространстве возможно ввести координаты вблизи от данной кривой таким образом, что символы Кристоффеля будут равны нулю вдоль данной кривой и метрика в прямоугольных координатах будет соответствовать локально плоскому пространству-времени. Далее Синг [3] показал, что эти координаты формируют не вращающуюся систему наблюдателя в гравитационном поле. Результирующие координаты называются нормальными координатами Ферми по аналогии нормальными координатами Римана, для которых метрика пространства-времени:  $ds^2 = \left\{ \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{3} R_{\alpha\mu\beta\nu} x^\alpha x^\beta + O[(x)^3] \right\} dx^\mu dx^\nu$ . Координаты Ферми удовлетворяют условиям  $g_{\mu\nu}|_C = \eta_{\mu\nu}$ ,  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha|_C = 0$  вдоль геодезической  $C$ . С физической точки зрения пользоваться удобнее координатами, связанными с времени подобной кривой, а не с отдель-

ной точкой. Времени подобная кривая интерпретируется как «история» (мировая линия) наблюдателя и непосредственно связаны с экспериментом. Допустим, что  $C$  – времени-подобная кривая, а  $P_0$  – некоторая точка на данной кривой (см. рис. ПЗ. 1, а).

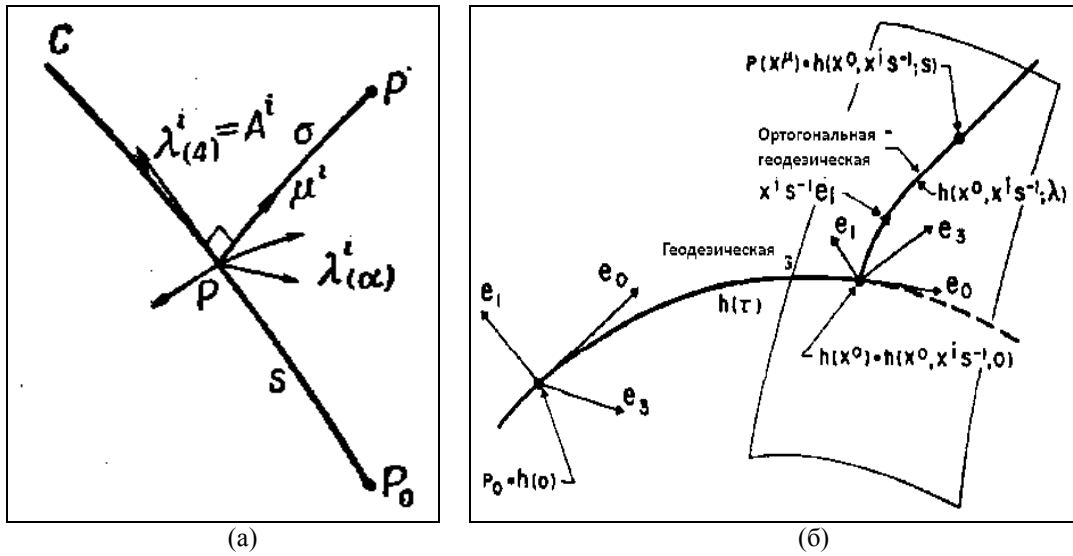


Рис. ПЗ. 1. Координаты Ферми, отнесенные к времени подобной базисной линии  $C$   
 (а) нормальные координаты Ферми, (б) геометрия координат Ферми

Предположим, что  $\lambda_{(a)}^i$  – ортонормированный 4-репер (ОР), переносимый вдоль кривой  $C$  посредством переноса Ферми – Уолкера,  $\lambda_{(4)}^i$  – вектор, касательный к кривой  $C$ . Предположим также, что  $A^i, B^i$  и  $b$  являются единичным вектором, касательным к кривой  $C$ , первой единичной нормалью к ней и ее первой кривизной, так, что аналогично (П2. 8) имеем  $\frac{\delta}{\delta s} \lambda_{(a)}^i = b A^i \lambda_{(a)}^j B_j$ ,  $\lambda_{(4)}^i = A^i$ , где как и ранее греческие индексы принимают значения 1,2,3,4, а  $s$  представляет собой меру кривой  $C$  от точки  $P_0$  до точки. Предположим, что  $P'$  – некоторая точка в пространстве-времени такая, что через нее можно провести единственную геодезическую, пересекающую кривую  $C$  в точке  $P$  и ортогональную к ней в точке пересечения. Пусть  $s$  и  $\sigma$  определяют меры отрезков  $P_0P$  и  $PP'$  соответственно.

Введем единичный вектор  $\mu^i$ , касательный к отрезку  $PP'$  в точке  $P$ , при этом  $PP'$ , естественно, пространственноподобен, так как ортогонален к времени подобной кривой  $C$ . Контравариантные координаты Ферми точки  $P'$  относительно базисной линии  $C$  определяются с помощью соотношений  $X^{(\alpha)} = \sigma \mu^i \lambda_i^{(\alpha)}$ ,  $X^{(4)} = s$ , а ковариантные координаты Ферми:

$$X_{(\alpha)} = \eta_{(\alpha b)} X^{(b)} = X^{(\alpha)}, \quad X_{(4)} = \eta_{(4b)} X^{(b)} = -X^{(4)}.$$

Таким образом, для первых трех координат контравариантная и ковариантная формы совпадают, а для четвертой координаты переход от одной формы к другой сопряжен с изменением знака. Координаты Ферми представляют собой двухточечные инварианты, связанные с кривой, т.е. инварианты определенные в заданном пространстве-времени двумя точками  $P'$  и  $P_0$ , и кривой  $C$ , которая может быть и геодезической. С геометрической точки зрения рассмотренные выше координаты Ферми являются простейшими из координат, которые можно определить с помощью времени подобной базисной линии  $C$ .

*Пример.* Для более детального описания построения координат Ферми выберем точку  $P_0$  как исходную и ортонормальное множество векторов  $e_0, e_1, e_2, e_3$  в качестве фиксированной системы отсчета для точки  $P_0$  (см. рис. ПЗ.1,б), принадлежащей геодезической  $C$ , которая описывается уравнением  $P = h(\tau)$ . Условие, что  $C$  «стартует из точки  $P_0$ » удовлетворяет  $P_0 = h(0)$ . Для точки  $P_0$  касательным вектором является  $e_0(0)$ , а для  $C$  касательным вектором является  $e_0(\tau)$ . Поскольку  $C$  является геодезической кривой, то касательные вектора в двух разных точках связаны параллельным переносом. Аналогичным образом определяются вектора  $e_i(\tau)$ ,  $i=1,2,3$  как вектора, принадлежащие  $h(\tau)$  и полученных параллельным перемещением вдоль геодезической  $C$  из  $e_i = e_i(0)$  в точке  $P_0 = h(0)$ . Координаты Ферми  $x^\mu$  зададим следующим образом. Предположим, что  $e_0$  является времени подобным вектором, а  $e_i$  – пространственно подобными векторами. Тогда для определения  $x^\mu$ , построим в точке  $h(x^0)$  (вдоль  $C$  при  $\tau = x^0$ ) единичный вектор  $v = \alpha^i e_i(x^0)$ ,  $\alpha^i = x^i / s$ , и  $s^2 = (x^i)^2 \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ . Существует единственная геодезическая  $P = h(x^0; \alpha^i; \lambda)$  с параметром  $\lambda$ . Тогда  $P(x^\mu) = h(x^0; \alpha^i; s)$  определяет точку с координатами Ферми с мерой расстояния  $s$ . Точка  $P(x^\mu)$  с заданными нормальными координатами Ферми  $x^\mu$  определяется для собственного времени  $\tau = x^0$  и затем определяется ортогональная геодезическая для расстояния  $s$ . Данная вторая пространственноподобная геодезическая  $h(x^0, x^i s^{-1}, \lambda)$  определяется при  $\lambda = 0$ ; при ее пересечении с кривой  $C$  касательный вектор в точке пересечения переносится параллельно из точки  $P_0 = h(0)$  вдоль  $C$  с направляющим косинусом  $x^i s^{-1}$  относительно базовых векторов  $e_i$ . Данное обстоятельство пояснено на рис. ПЗ. 1, б [40].

## Список литературы

1. Седов Л.И. Об уравнениях инерциальной навигации с учетом релятивистских эффектов // ДАН СССР, 1976. – Т. 231. – №6. – С. 1311-1314.
2. Седов Л.И., Цыпкин А.Г. Основы макроскопических теорий гравитации и электромагнетизма. – М.: Наука, 1989.
3. Меллер К. Теория относительности. – М.: Атомиздат, 1975.
4. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: Гостехиздат, 1955.
5. Мизнер К., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. – М.: Мир, 1973.
6. Синг Дж. Общая теория относительности. – М.: Иностранная литература, 1963.
7. Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. – М.: Наука, 1972.
8. Turyshev S. Relativistic navigation: A theoretical foundation. – Report Jet Propulsion Lab., 2006.
9. Kopeikin S., Efroimsky M., Kaplan G. Relativistic celestial mechanics of the Solar system. – John Wiley & Sons, 2011.
10. Уланов Г.М., Ульянов С.В. Модели релятивистской навигации и проблема инвариантности // Тез. Докл. VI Всесоюзн. Совещ.: Теория чувствительности, теория инвариантности и их применения. – М.: ИПУ АН СССР, 1982. – С. 27-28.

11. Ульянов С.В. Физические и информационные модели управления релятивистскими и кантовыми системами // Тез. Докл. IX Всесоюзн. Совещ. по проблемам управления. – М.: ИПУ АН СССР, 1983. – С. 94.
12. Ульянов С.В., Шоланов К. С. Релятивистская инерциальная навигация и интеллектуальное управление КЛА в римановых метрических пространствах при случайных возмущениях. Ч 1: Параллельный перенос векторов и тензоров, девиация геодезических // Системный анализ в науке и образовании: сетевое научное издание. – Дубна, 2012. – № 1. – [Электронный ресурс]. URL: <http://www.sanse.ru/archive/17>. – 0421200111\0007.
13. Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. – М.: Энергоиздат, 1982.
14. Гольденблат И.И., Ульянов С.В., Релятивистская кинематика и элементы квантовой механики (Учебное пособие для слушателей высших военных учебных заведений). – М.: МО СССР, 1977.
15. Гольденблат И.И., Ульянов С.В. Введение в теорию относительности и ее приложения в новой технике. – М.: Физматгиз, 1979.
16. Петров Б.Н., Гольденблат И.И., Уланов Г.М., Ульянов С.В. Проблемы управления релятивистскими и квантовыми динамическими системами: Информационные и термодинамические аспекты. – М.: Наука, 1982.
17. Кислик М.Д., Колюка Ю.Ф., Котельников В.А. и др. Определение орбит Земли и Венеры, астрономической единицы и радиуса Венеры на основе радиолокационных наблюдений Венеры в 1962 – 1977 г. // ДАН СССР, 1978. – Т. 241, № 5; *ibid* // ДАН СССР, 1980. – Т. 255. – № 6.
18. Кислик М.Д., Колюка Ю.Ф., Котельников В.А. и др. Единая релятивистская теория движения внутренних планет солнечной системы. // ДАН СССР, 1980. – Т. 255. – № 5. – С.545-547.
19. Lamine B. et all Testing gravitation in the Solar system with radio science experiments // arXiv:1110.0659v2 [gr-qc] – 2011.
20. Hees A., Wolf P., Lamine B. et all Radioscience simulations in general relativity and in alternative theories of gravity // arXiv: 1201.5041v1 [gr-qc] – 2012.
21. Уилл К. Теория и эксперимент в гравитационной физике. – М.: Энергоатомиздат, 1985.
22. Закаров У.Н. Механика релятивистских космических полетов. – М.: Наука, 1984.
23. Емельянов Н.В., Кривов А.В. Влияние релятивистских эффектов на результаты спутниковой геодинамики, геодезии и навигации // Астр. Журн., 1991. – Т. 68. – Вып. 4. – С. 872-879.
24. Чаплинский В.С. Приложение релятивистской теории к задачам траекторных измерений космических аппаратов // Косм. Исслед., 1985. – Т. 23. – Вып. 1. – С. 49-62.
25. Копейкин С.М. Релятивистские системы отсчета в солнечной системе // Астр. Журн., 1989. – Т. 66. – Вып. 5. – С. 1069-1080.
26. Лапковский А.К. Релятивистская кинематика, неевклидовы пространства и экспоненциальные отображения. – Минск: Наука и Техника, 1985.
27. Войтик В.В. Собственные характеристики системы отсчета как 4-инварианта // arXiv:1507.03945v1 [physics.gen-ph] – 2 Jun 2015.
28. Войтик В.В. Специальное и общее преобразование в радиально жесткую неинерциальную систему отсчета // Диссертация на соиск. уч. степени к.ф.-м.н. – Башк. Пед. Ун-т, 2014.
29. Малыкин Г.Б. Прецессия Томаса: корректные и некорректные решения // УФН, 2006. – Т. 176. – №8. – С.865-882.
30. Ритус В.И. О различии подходов Вигнера и Мёллера к описанию прецессии Томаса // УФН, 2007. – Т. 177. – №1. – С.105-112.
31. Gelman H. Sequences of co-moving Lorentz frames // J. Math. Anal. Appl – 1990. – Vol. 145. – No 2. – Pp. 524-538.

32. Hoag D. G., Wrigley W. Navigation and guidance in interstellar space // *Acta Astronautics*. – 1975. – Vol. 2. – No 5/6. – Pp. 513-533.
33. Flynn R. W. Space craft navigation and relativity // *Am. J. Phys.* – 1985. – Vol. 53. – No 2. – Pp. 113-119.
34. Ni W.T., Zimmerman M. Inertial and gravitational effects in the proper reference frame of an accelerated, rotating observer // *Phys. Rev.* – 1978. – Vol. 17D. – No 6. – Pp. 1473-1476.
35. De Facio B., Dennis Ph.W., Retzliff D.G. Presymmetry of classical relativistic particles // *Phys. Rev.* – 1978. – Vol. 18D. – No 8. – Pp. 2813-2820.
36. De Facio B., Dennis Ph.W., Retzliff D.G. Contact bundle approach to noninertial frames // *J. Math. Phys.* – 1980. – Vol. 21. – No 4. – Pp. 751-757.
37. De Facio B., Dennis Ph.W., Retzliff D.G. Equivalence of two approaches to noninertial observers // *Phys. Rev.* – 1979. – Vol. 20D. – No 2. – Pp. 570-571.  
Nesterov A.I. Riemann normal coordinates, Fermi reference system and the geodesic deviation equation // Departamento de Fisica, Universidad de Guadalajara, Guadalajara, Jalisco, Mexico; e-mail: nesterov@udgserv.cencar.udg.mx.
38. Mitskievich N.A. Relativistic physics in arbitrary reference frames. – N.Y.: Nova Science Publ. – 2006.
39. Manasse F.K., Misner C.W. Fermi normal coordinates and some basic concepts in differential geometry // *J. Math. Phys.* – 1963. – Vol. 4. – No 6. – Pp. 735-745.
40. Retzliff D.G., De Facio B., Dennis Ph.W. A new mathematical formulation of accelerated observers in general relativity Pts I, II // *J. Math. Phys.* – 1982. – Vol. 23. – No 1. – Pp. 96-108.
41. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. – М.: Наука, 1979.
42. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. – М.: Мир, 1981. – Т.1.
43. Avishai Y., Ekstein H. Presymmetry of classical relativistic fields // *Phys. Rev.* – 1973. – Vol. 7D. – No 4. – Pp. 983-991.
44. Гриффитс Ф. Внешние дифференциальные формы и вариационное исчисление. – М.: Мир, 1986.
45. Ольшанецкий М.А. Краткий путеводитель для физиков по современной геометрии // *УФН*. – 1982. – Т. 136. – Вып. 3. – С. 421-433.
46. Логунов А.А. Лекции по теории относительности и гравитации: Современный анализ проблемы. – М.: Наука, 1987.
47. Nelson R.A. Generalized Lorentz transformation for an accelerated, rotating frame of reference // *J. Math. Phys.* – 1987. – No 28. – Pp. 2379-2383.