

*К семидесятилетию профессора Владимира Николаевича Добрынина*

## **ИНФОРМАЦИОННАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ РОБАСТНЫХ БАЗ ЗНАНИЙ НЕЧЕТКИХ РЕГУЛЯТОРОВ.**

### **Ч. 3: КВАНТОВЫЙ НЕЧЁТКИЙ ВЫВОД И КВАНТОВАЯ ИНФОРМАЦИЯ**

**Ульянов Сергей Викторович<sup>1</sup>, Мишин Андрей Анатольевич<sup>2</sup>,  
Миногин Андрей Александрович<sup>3</sup>, Нефёдов Никита Юрьевич<sup>4</sup>,  
Петров Сергей Павлович<sup>5</sup>, Полунин Алексей Сергеевич<sup>6</sup>,  
Решетников Андрей Геннадиевич<sup>7</sup>**

<sup>1</sup>Доктор физико-математических наук, профессор;  
ГОУ ВПО Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,  
Институт системного анализа и управления;  
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;  
e-mail: ulyanovsv@mail.ru.

<sup>2</sup>Ассистент;  
ГОУ ВПО Международный университет природы, общества и человека «Дубна»,  
Институт системного анализа и управления;  
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;  
e-mail: andrmish@yandex.ru.

<sup>3</sup>Аспирант;  
ГОУ ВПО Международный университет природы, общества и человека «Дубна»,  
Институт системного анализа и управления;  
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;  
e-mail: andrey.minogin@gmail.com.

<sup>4</sup>Студент;  
ГОУ ВПО Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,  
Институт системного анализа и управления;  
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;  
e-mail: nefniket@gmail.com.

<sup>5</sup>Студент;  
ГОУ ВПО Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,  
Институт системного анализа и управления;  
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;  
e-mail: bloodthirsty\_89@mail.ru.

<sup>6</sup>Студент;  
ГОУ ВПО Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,  
Институт системного анализа и управления;  
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;  
e-mail: Aleksey\_Polunin@mail.ru.

<sup>7</sup>Студент;  
ГОУ ВПО Международный университет природы, общества и человека «Дубна»,  
Институт системного анализа и управления;  
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;  
e-mail: reshet@sunhe.jinr.ru.

*Использование разработанной модели квантового нечеткого вывода на основе квантовых вычислений приводит к самоорганизации знаний и повышению уровня робастности интеллектуальных систем управления в непредвиденных ситуациях управления.*

Ключевые слова: квантовый нечеткий вывод, интеллектуальное управление, робастность, квантовые вычисления, квантовая информация.

## INFORMATION DESIGN TECHNOLOGY OF ROBUST KNOWLEDGE BASES FOR FUZZY CONTROLLERS.

### PT 3: QUANTUM FUZZY INFERENCE AND QUANTUM INFORMATION

**Ulyanov Sergey<sup>1</sup>, Mishin Andrey<sup>2</sup>, Minogin Andrey<sup>3</sup>, Nefedov Nikita<sup>4</sup>,  
Petrov Sergey<sup>5</sup>, Polunin Aleksey<sup>6</sup>, Reshetnikov Andrey<sup>7</sup>**

<sup>1</sup>*Doctor of Science in Physics and Mathematics, professor;  
Dubna International University of Nature, Society, and Man,  
Institute of system analysis and management;  
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;  
e-mail: ulyanovsv@mail.ru.*

<sup>2</sup>*Teacher;  
Dubna International University of Nature, Society and Man,  
Institute of system analysis and management;  
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;  
e-mail: andrmish@yandex.ru.*

<sup>3</sup>*Postgraduate student;  
Dubna International University of Nature, Society and Man,  
Institute of system analysis and management;  
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;  
e-mail: andrey.minogin@gmail.com.*

<sup>4</sup>*Student;  
Dubna International University of Nature, Society, and Man,  
Institute of system analysis and management;  
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;  
e-mail: nefnukem@gmail.com.*

<sup>5</sup>*Student;  
Dubna International University of Nature, Society, and Man,  
Institute of system analysis and management;  
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;  
e-mail: bloodthirsty\_89@mail.ru.*

<sup>6</sup>*Student;  
Dubna International University of Nature, Society, and Man,  
Institute of system analysis and management;  
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;  
e-mail: Aleksey\_Polunin@mail.ru.*

<sup>7</sup>*Student;  
Dubna International University of Nature, Society, and Man,  
Institute of system analysis and management;  
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;  
e-mail: reshet@sunhe.jinr.ru.*

*Application of developed quantum fuzzy inference model based on quantum computing gives rise to the knowledge self-organization and the increasing robust level of intelligent control systems in unpredicted control situations.*

Keywords: quantum fuzzy inference, intelligent control, robustness, quantum computing, quantum information.

## Введение

Анализ результатов моделирования, полученных на основе технологий мягких вычислений, позволил установить следующий факт, важный для разработки технологии проектирования робастных интеллектуальных систем управления (ИСУ). Спроектированные (в общем виде для случайных условий) робастные нечёткие регуляторы (НР) для нелинейных неустойчивых динамических объектов управления (ОУ) на основе оптимизатора баз знаний (ОБЗ) (этап 1 технологии) с использованием мягких вычислений могут эффективно функционировать только при фиксированных (или слабо изменяющихся) описаниях внешней или внутренней среды. Это обусловлено возможной потерей свойства робастности при резком изменении условий функционирования ОУ: внутренней структуры ОУ, целей управления (задающего сигнала), наличия времени задержки в каналах измерения и управления, при вариации условий функционирования во внешней среде и введении других слабо формализованных факторов в стратегию управления. В статье дано описание стратегии проектирования робастных структур ИСУ, основанной на технологиях квантовых и мягких вычислений. Разработанная стратегия позволяет повысить уровень робастности НР при указанных непредвиденных или слабо формализованных факторах за счёт формирования и использования новых видов процессов самоорганизации робастной базы знаний (БЗ), базирующихся на методологии квантовых вычислений. Приведены необходимые сведения из теории квантовых вычислений, квантовых алгоритмов (КА) и квантовой теории информации. Конкретное решение данной проблемы достигается за счёт введения обобщения стратегий в моделях нечёткого вывода на конечном множестве предварительно спроектированных НР в виде нового, *квантового нечёткого вывода* (КНВ). Описывается принципиальная структура КНВ и его программная поддержка в процессах проектирования БЗ робастных НР в режиме реального времени, а также система моделирования робастных структур НР.

Отметим, что эффективность применения КНВ иллюстрируется на конкретном примере моделирования робастных процессов управления существенно-нелинейным динамическим ОУ со случайно изменяющейся структурой, что представляет самостоятельную проблему в теории и систем управления. В сложных и существенно-нелинейных, динамических моделях ОУ со слабо формализованной структурой и случайными параметрами достаточно трудно определить оптимальную структуру системы автоматического управления (САУ), в которой используется на нижнем (исполнительном) уровне управления, например, традиционный пропорциональный-интегральный-дифференциальный (ПИД) регулятор. Особенно эта трудность проявляется в задачах проектирования структур подобного вида САУ в присутствии различных по своей статистической природе случайных шумов и неполной информации о целях управления.

Методология проектирования ИСУ, основанная на технологии мягких вычислений, рассматривает в качестве базиса структуру НР как один из вариантов эффективного проектирования традиционных САУ. С самого момента своего появления (1974 г.) модели НР демонстрируют повышенную способность управления динамическими ОУ, которые обладают слабо формализованной структурой или функционируют в условиях неопределенности исходной информации. Как показала практика и результаты моделирования, в перечисленных ситуациях управления традиционный (использующий принцип глобальной, отрицательной обратной связи) ПИД-регулятор часто не справляется с поставленной задачей управления. Использование технологии мягких вычислений (основанной на генетических алгоритмах (ГА) и нечетких нейронных сетях (ННС)) расширило области эффективного применения НР за счет добавления новых функций в виде *обучения* и *адаптации*. Однако при этом очень трудно спроектировать глобально «хорошую» и робастную структуру ИСУ. Данное ограничение особенно характерно для непредвиденных ситуаций управления, когда ОУ функционирует в резко изменяющихся условиях (отказ датчиков или шум в измерительной системе, наличие времени задержки сигналов управления или измерения, резкое изменение структуры ОУ или её параметров и т. п.).

В ряде практических случаев такого рода условия могут быть предсказаны, но трудно реализовать робастное управление в непредвиденных ситуациях с применением спроектированной (для фиксированной ситуации) БЗ одного НР (даже на всём множестве) предсказанных случайных ситуаций. Одним из существующих решений представляется формирование конечного числа БЗ НР для множества фиксированных ситуаций управления.

Возникает вопрос: как определить, какая из БЗ должна быть использована в конкретный момент времени?

В этом случае особую важность приобретает выбор обобщённой стратегии, которая давала бы возможность переключать поток управляющих сигналов, поступающих с выхода различных БЗ НР, и (если необходимо) модифицировать их выходной сигнал под текущие условия функционирования ОУ. Простым вариантом решения этой проблемы является использование метода взвешенных весов и агрегирования выходных сигналов от каждого независимого НР. Но, к сожалению, такой метод (как показали результаты моделирования) имеет ограниченные возможности, так как распределение весовых факторов часто необходимо определять в динамике реального времени (см. ниже и [1, 2]), и процедура поиска носит комбинаторный характер.

Решение такого рода проблем может быть найдено на основе введения принципа самоорганизации в процесс проектирования БЗ НР, который реализуется и программно поддерживается разработанной моделью КНВ с применением методологий квантовых мягких вычислений и системной инженерии – System of Systems Engineering (синергетический принцип самоорганизации) [3 – 5].

В частности, реализация процесса самоорганизации робастных БЗ при таком подходе осуществляется за счёт обобщения стратегий нечёткого логического вывода в виде КНВ. В статье описывается структура КНВ и система моделирования робастных БЗ для НР, иллюстрирующая эффективность применения КНВ. Модель разработанного КНВ рассматривается как новый вид поискового квантового алгоритма на обобщённом пространстве БЗ НР. Как результат применения КНВ проектируется обобщённый робастный сигнал управления.

Предлагаемая модель КНВ использует частные индивидуальные БЗ НР, каждая из которых получена с помощью ОБЗ для соответствующих условий функционирования ОУ и фиксированных ситуаций управления во внешней случайной среде. Процесс проектирования частных индивидуальных БЗ НР с помощью ОБЗ для заданных ситуаций управления осуществляется в соответствии с технологией проектирования и подробно рассмотрен в [1, 6, 7] (см. в [7] рис. 3, Этап 2).

В частности, в [7] на основе сравнения результатов моделирования, полученных в [1, 6], показано, что при достаточно широком диапазоне изменения параметров, характеризующих заданную ситуацию управления, ОБЗ даёт существенный выигрыш (по сравнению с другими программными инструментариями) при достижении в проектировании требуемого уровня робастности БЗ. Другие промышленные инструментариумы формирования БЗ, такие как ННС ANFIS (встроенный модуль в систему моделирования MatLab) или AFM (разработка ST Microelectronics [6]) и др., как строго показано в [7], обладают повышенной чувствительностью, по сравнению с инструментарием ОБЗ, к изменению параметров (характеризующих заданную ситуацию управления) и приводят к потере робастности управления.

В результате в фиксированных ситуациях управления НР с БЗ (спроектированные с помощью ОБЗ) обладают повышенной робастностью, соответствующие законы управления содержат меньше *избыточной информации* и поэтому используются в качестве входного сигнала для КНВ (в соответствии с разработанной технологией проектирования робастных БЗ [7, рис. 3]).

Следует подчеркнуть, что наличие избыточности информации в законах управления является физической объективностью, которая присутствует вследствие использования в процессах оптимизации БЗ случайного поиска в виде ГА, а также следует из законов теории информации о необходимости наличия избыточности в ненадежных каналах передачи данных с помехами. Это неизбежная плата за возможность получить решение задачи оптимального управления существенно-нелинейным ОУ в условиях неопределенности исходной информации и многокритериальности условий оптимизации. В случае непредвиденной ситуации управления дополнительная избыточность информации в законах управления НР появляется как суммарный результат неадекватной реакции ОУ (в виде новой ошибки управления) и логически некорректной интерпретации используемыми НР инициализации соответствующих производственных правил в БЗ (обученных только на заданные ситуации управления).

Модель КНВ представляет собой новый вид квантового поискового алгоритма на обобщённом пространстве структурированных данных и на основе методов теории квантовых вычислений [8 – 10] позволяет эффективно решать задачи управления ранее алгоритмически неразрешимых на классическом уровне. Разработанный подход впервые применяется в теории и практике ИСУ. Поэтому настоящая статья является обобщением и развитием результатов [1, 2, 6, 7].

*Примечание 1.* С точки зрения теорий сложности вычислений и КА [8 – 10], разработанный КА относится к классу полиномиальных алгоритмов с ограниченной ошибкой – BPP-классу (bounded-

error probabilistic polynomial time), а его квантовое обобщение – к VQP-классу. Поэтому по определению является эффективным. Это означает, что структурно КА в КНВ имеет полиномиальную сложность, т.е. рандомизированный алгоритм обладает полиномиальной, а не экспоненциальной (как в классических поисковых алгоритмах) зависимостью от входных сигналов; а ограниченной вероятности (по уровню  $\frac{3}{4}$ ) точности измерения результата вычислений достаточно для принятия эффективно-го решения.

В модели КА для КНВ реализуются следующие действия [3 – 5]: 1) обрабатываются результаты нечеткого вывода каждого независимого НР; 2) на основе методов квантовой теории информации извлекается ценная квантовая информация, скрытая в независимых (индивидуальных) БЗ; и 3) в режиме реального времени проектируется обобщенный выходной робастный сигнал управления на всех множествах БЗ НР.

В этом случае выходной сигнал КНВ в режиме реального времени представляет оптимальный сигнал управления изменением коэффициентов усиления ПИД-регулятора, который включает в себя необходимые (наилучшие) качественные характеристики выходных сигналов управления каждого из НР, реализуя тем самым *принцип самоорганизации*. Поэтому область эффективного функционирования структуры ИСУ может быть существенно расширена за счёт включения такой важной характеристики качества управления, как *робастность*. Робастность управляющего сигнала – основа для поддержки надёжности и точности управления в условиях неопределённости информации или слабо формализованного описания условий функционирования и/или целей управления [7].

В статье описывается принципиальная структура КНВ и его программная поддержка в процессах проектирования БЗ робастных самоорганизующихся НР в режиме реального времени. В частности, приведена функциональная структура системы моделирования робастных БЗ для НР, позволяющая повысить эффективность применения КНВ. Сообщаются необходимые сведения из теории квантовых вычислений и квантовой теории информации, используемые для разработки и обоснования структуры КА в КНВ.

## 1. Постановка задачи

Одной из основных задач современной технологии проектирования НР является построение и внедрение робастных БЗ в структуры ИСУ [1] с целью повышения их способности к самообучению, самоадаптации, самоорганизации или саморазвитию. В связи с этим фактом в данной статье ставится следующая задача: разработать модель КНВ для построения робастных БЗ в интеллектуальных регуляторах, обеспечивающих достижение гарантированного качества управления в непредвиденных (внештатных) ситуациях управления. Решение данной задачи приводит, в конечном счете, к повышению уровня робастности разрабатываемой структуры ИСУ.

Вопросы проектирования структуры и БЗ самого интеллектуального НР для заданной ситуации управления рассматривались в Части 1 и 2 работы и в [1, 6, 7]), которые используются как исходные данные. В частности, рассмотрено подробно взаимоотношение между мерами качества управления и типами инструментария интеллектуальных вычислений (рис. 1 и 2 в [7]). Были исследованы также связи между устойчивостью, управляемостью и робастностью (рис. 1, уровень 1 и рис. 3 в [7]). Соответствующие количественные меры и закономерности взаимодействия данных критериев качества управления были включены в программное обеспечение ОБЗ.

В современной теории управления исследовались различные аспекты процессов обучения и адаптации НР. Многие из схем обучения основывались на алгоритме обратного распространения ошибки и их модификациях (см. [1] и цитированную литературу). Процессы адаптации базируются на итеративных моделях стохастических алгоритмов. Эти идеи хорошо работали при проектировании процессов управления в условиях отсутствия слабо формализованных шумов внешней среды или неизвестных шумов в измерительной системе и т.п. В более сложных непредвиденных ситуациях управления методы обучения и адаптации, использующие алгоритмы обратного распространения ошибки или итеративные стохастические алгоритмы, не гарантировали достижения требуемого уровня робастности и точности процессов управления. Эффективное решение данной проблемы с помощью ОБЗ для конкретных ситуаций управления было разработано в [1, 2, 7].

В [3] было показано, что для достижения самоорганизации (рис. 1, уровень 3 в [7]) в структуре ИСУ необходимо использовать КНВ. Общая функциональная структура блоков КНВ представлена на рис. 1. Принципы работы КНВ и его отдельных блоков подробно рассмотрены ниже.

В следующей таблице приведена структура ИСУ, включающая модель КНВ, описаны её преимущества и недостатки.

Таблица. Структура и качественные характеристики самоорганизующейся ИСУ на основе КНВ

Структура системы управления	Уровни качества управления	Преимущества и достоинства	Предельные возможности
	<p>Устойчивость</p> <p>Управляемость</p> <p>Точность управления</p> <p>Адаптация</p> <p>Обучение</p> <p>Самоорганизация</p> <p>Элементы саморазвития</p>	<p>Введен новый уровень качества управления (самоорганизация с элементами саморазвития).</p> <p>Гарантирует качество управления на различных пространствах поиска решений КНВ в режиме реального времени.</p> <p>Процесс проектирования унифицированной БЗ осуществляется автоматически операторами суперпозиции и квантовой интерференции с помощью «мудрого» контроллера, основанного на принципе минимума информационной энтропии и максимума квантовой корреляции (максимум квантовой амплитуды вероятности квантового состояния)</p>	<p>Гарантирует только необходимые условия для оптимизации процесса проектирования робастной БЗ.</p> <p>В КНВ отсутствует возможность оптимального управления квантовыми операторами.</p> <p>Процесс глобальной оптимизации зависит от выбора вида функции пригодности и осуществлён комбинаторным методом.</p> <p>Требует большого количества времени вычисления (высокая временная сложность вычислений)</p>

Модель КНВ основана на физических законах теории квантовых вычислений [8 – 10], а именно в вычислениях участвуют унитарные, обратимые квантовые операторы. В общем виде КА состоит из трёх основных унитарных операций: суперпозиция, квантовая корреляция (квантовый оракул или запутанные операторы) и интерференция. Четвёртый оператор, оператор измерения результатов квантовых вычислений, является необратимым (классическим).

Квантовые вычисления, основанные на перечисленных типах операторов, относятся к новому виду интеллектуальных вычислений [10]. В приложении (для более полного понимания принципов работы КА в КНВ) дано краткое описание перечисленных квантовых операторов, их взаимоотношений и свойств. Приведены необходимые сведения из квантовой теории информации и теории квантовых корреляционных процессов. Данные сведения позволяют более полно понять решение следующей трудной и принципиально важной для теории и систем управления проблемы: *Определение роли и влияния квантовых эффектов на повышение уровня робастности проектируемых интеллектуальных процессов управления* за счет извлечения дополнительной квантовой информации, скрытой (и только частично доступной) в корреляционных классических состояниях законов управления, и спроектированных только на основе классических методов технологии мягких вычислений.

Дополнительные сведения и подробное изложение данных вопросов с математическим доказательством требуемых утверждений можно найти в [10 – 51].

## 2. Модель КНВ, основанная на технологиях квантовых и мягких вычислений

Согласно общим идеям реализации моделей квантовых вычислений (см. Приложение) на квантовых алгоритмических ячейках (КАЯ) [8, 10, 23], логическое объединение отдельных БЗ, спроектированных на ОБЗ на конкретную ситуацию управления, в одно обобщённое пространство может быть реализовано с помощью оператора суперпозиции; затем с использованием оператора квантовой корреляции (который в поисковом КА описывается различными моделями квантового оракула [10]) формализуется поиск «успешного» маркированного решения, и с привлечением оператора интерференции совместно с классическими операциями измерений искомые «хорошие» решения извлекаются из процессов квантовых вычислений (как результат работы КА). Дополнительный оператор в локаль-

ной обратной связи блока КНВ (рис. 1) играет роль усиления квантовых корреляций в процессе управления поиском «успешных» решений.

Описываемый ниже метод проектирования робастных БЗ самоорганизующихся структур НР основан на специальном (упрощенном) варианте общей модели КНВ, представленного на рис. 1.

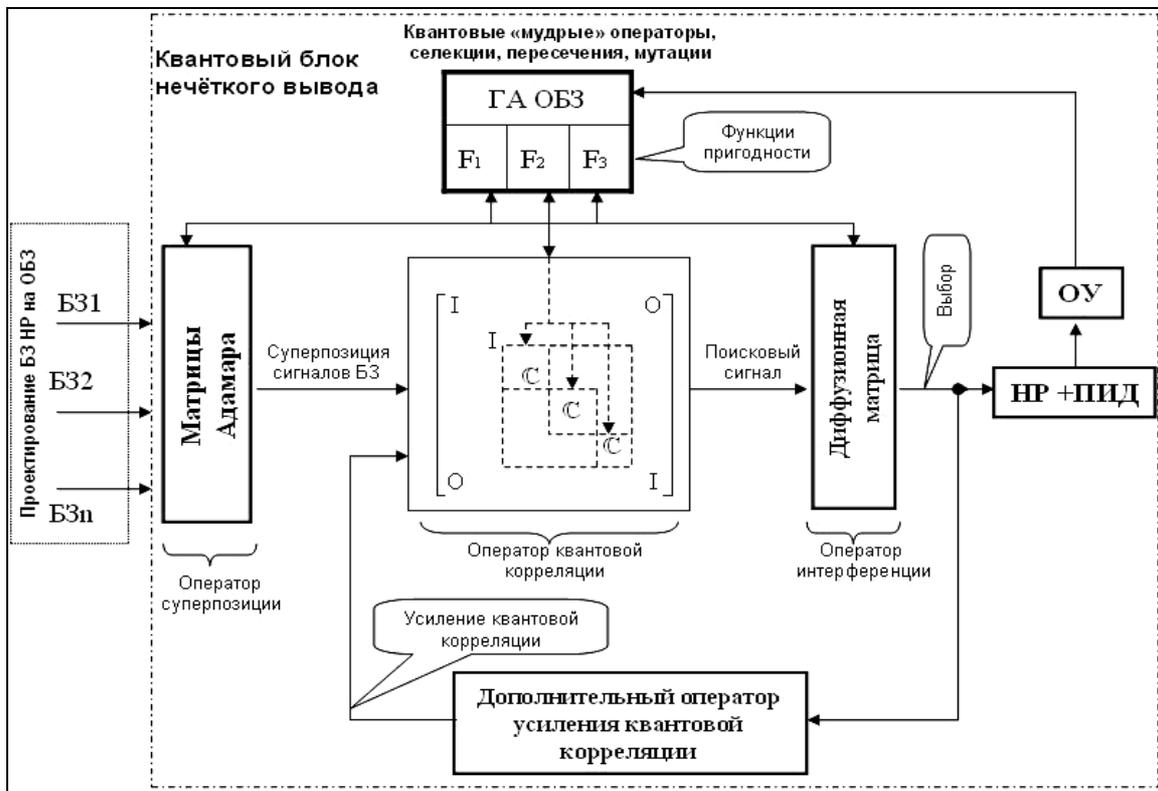


Рис. 1. Структура обобщённого квантового блока

Тогда рассматриваемая модель (как частный случай квантового блока на рис. 1) использует в качестве входного сигнала конечное множество частных БЗ, спроектированных с помощью ОБЗ [1, 2, 7]. Структура и КА упрощенной модели КНВ применяются в системе моделирования БЗ самоорганизующихся структур НР. Спроектированные самоорганизующиеся НР на основе КНВ присутствуют в контурах управления робастных ИСУ, функционирующих в режиме реального времени (см. ниже описание примера).

*Смежные работы и результаты: квантовые генетические алгоритмы (ГА) и квантовое эволюционное программирование.* Обобщением так называемых эволюционных классических алгоритмов в теории интеллектуальных вычислений служит квантовое эволюционное программирование, которое в свою очередь условно разделено на две области [4, 10]: ГА, порожденные аналогом квантовых процессов, и квантовые ГА.

В первом случае хромосомы в квантовых ячейках представляются в виде квантовых бит, и поиск решения осуществляется методом проектирования КАЯ (см. Приложение). Во втором случае делается попытка решить ключевой вопрос в этой области: как ГА может быть реализован на аппаратуре аппаратных средств поддержки квантовых вычислений. Одним из основных моментов для разработки семейства квантовых ГА является построение КА, который включает в себя способность и преимущество параллельных вычислений как от ГА, так и от квантовых вычислений, а благодаря наличию квантовых эффектов в процессах вычислений обеспечивает эффективный случайный поиск [10, 53]. Были разработаны различные модели квантового эволюционного программирования, такие как оптимизационный алгоритм на основе метода квантового потока частиц, интеллектуальных генетических операторов и т.п. [4, 10, 52]. Некоторые из этих моделей кратко изложены в [4, 52]. В [10] дано описание различий и общих свойств, таких как параллелизм вычислений в ГА и КА, оценки сложности вычислений в квантовых ГА и др. Следует отметить также, что модель квантового ГА,

представленного на рис. 1, обобщает перечисленные выше модели квантового эволюционного программирования.

Основной задачей предлагаемой в статье модели КНВ является обеспечение возможности реализации процессов самоорганизации в режиме реального времени при проектировании процессов управления на множестве новых непредсказуемых ситуаций управления или в условиях неполной информации о внешней среде, используя конечное множество БЗ, спроектированных на основе ОБЗ [7]. Выходом блока КНВ служит робастный сигнал управления изменением коэффициентов усиления нечёткого ПИД-регулятора для текущей ситуации управления.

## 2.1. Метод решения проблемы

Для решения поставленной задачи применяется процесс извлечения новой скрытой квантовой информации из конечного множества БЗ (спроектированных с помощью ОБЗ) на основе оператора суперпозиции, а также методы редукции и сжатия избыточной классической информации в БЗ индивидуальных НР, построенных также на основе ОБЗ (см. Введение). Процессы сжатия и редукции избыточной информации в классических индивидуальных БЗ, формирующих законы управления изменением коэффициентов усиления нечёткого ПИД-регулятора, базируются на законах и результатах квантовой теории информации [8, 10, 36, 37]. В частности, применяется эффективный алгоритм квантовой теории информации для сжатия данных. Используя критерий минимума энтропии фон Неймана, данный алгоритм отображает множество квантовых (неинформативных) битов в малое подмножество информативных квантовых битов, имеющих более высокую вероятность появления в сообщении. Редукция избыточной классической информации в законах управления БЗ НР приводит к увеличению ценности информации и, как следствие – к повышению уровня робастности в процессах управления без потери качества, такого как надёжность поддержки точности процессов управления (см. рис. 1 и 3 в [7]). В результате, спроектированная робастная БЗ для НР (с помощью модели КНВ) может адаптировать законы управления коэффициентами усиления нечёткого ПИД-регулятора к непредсказуемым изменениям внешней среды функционирования ОУ и неопределённости в исходной информации о ситуации управления.

В статье рассматриваются основные идеи квантовых вычислений и квантовой теории информации применительно к разработке методов проектирования робастной БЗ на основе КНВ.

*Прикладной аспект.* На базе результатов моделирования законов управления коэффициентами усиления нечётких ПИД-регуляторов, полученных с помощью модели КНВ, сформулирован новый принцип проектирования робастных структур ИСУ: *проектирование простого по структуре и в практической реализации, обладающего повышенным уровнем интеллектуальности (wise), НР для эффективного управления сложными ОУ.*

В данном разделе статьи кратко рассматриваются необходимые свойства и законы квантовых вычислений и квантовой теории информации, используемые в модели квантового блока (рис. 1) в виде КНВ для программной поддержки свойств самоорганизации робастных НР (см. ниже). Исследована упрощенная модель КНВ и алгоритм работы, позволяющие получить практические результаты в процессах проектирования робастных БЗ в различных структурах ИСУ.

## 2.2. Основные структуры и модели квантовых вычислений, используемые в КНВ

Модель КНВ использует и реализует процессы извлечения скрытой квантовой информации, содержащейся в классических, индивидуальных БЗ для НР, на основе физических законов квантовой теории информации и квантовых вычислений. Классические БЗ для НР спроектированы в [1, 7] преимущественно для конкретных фиксированных ситуаций управления, привлекая процессы обучения на основе ОБЗ, и НР формируют оптимальные сигналы управления коэффициентами усиления в традиционных ПИД-регуляторах. Для извлечения и агрегирования дополнительной скрытой ценной квантовой информации в БЗ на основе КНВ необходимо задействовать новые дополнительные логические операторы обработки информации, отсутствующие в инструментарии технологии мягких вычислений [3 – 5]. Дополнительные (необходимые для обработки классической информации) унитарные обратимые (квантовые) операторы носят следующие наименования: суперпозиция, квантовая корреля-

ция (запутанные операторы) и интерференция, являясь математическим инструментарием квантовых вычислений [8 – 10].

В теории квантовых вычислений (см. Приложение) можно выделить два направления исследований:

- задано множество точек функционала  $S = \{(x, y)\}$ , необходимо найти вид такого оператора  $U$ , чтобы выполнялось условие  $y = U \cdot x$ ;
- задана проблема (КА), необходимо найти вид квантовой схемы – КАЯ, решающей заданную проблему (реализующей данный КА).

Алгоритмы решения данных задач могут быть реализованы как на аппаратных средствах в виде КАЯ, так и на программном уровне с помощью соответствующего программного продукта с реализацией на классическом компьютере [10]. В [10, 23] показана возможность эффективного моделирования КА на классическом компьютере, и используется в данной статье для моделирования КА в КНВ. Фундаментальный результат теории квантовых вычислений заключается в том, что все операции (подобно классическому случаю) могут быть реализованы на схеме, состоящей из универсальных базисных элементов. В отличие от классического аналога КАЯ могут быть выполнены на различных классах универсальных элементов в зависимости от используемого вычислительного базиса. КАЯ (с фиксированными вычислительным и измерительным базисами) обеспечивают описание эволюции некоторого унитарного оператора  $U$ , которому соответствует квантовый вычислительный процесс:  $|\psi_{fin}\rangle = U|\psi_{in}\rangle$ , где вектор (волновая функция)  $|\psi_{in}\rangle$  задает начальные условия вычислений (решаемой проблемы), а  $|\psi_{fin}\rangle$  отражает результат вычислений за счёт действия оператора  $U$  на начальное состояние  $|\psi_{in}\rangle$ .

Выбирая различный вид оператора  $U$  (в частности, Гамильтониан), можно сформировать различные модели квантовых вычислений. В общем виде модель квантовых вычислений [8, 10] состоит из пяти этапов:

- приготовление начального (классического или квантового) состояния  $|\psi_{in}\rangle$ ;
- выполнение преобразования Адамара для начального состояния с целью подготовки состояния суперпозиции;
- применение запутанного оператора или оператора квантовой корреляции (квантового оракула) к суперпозиционному состоянию;
- исполнение оператора интерференции;
- использование оператора измерения для результата квантовых вычислений  $|\psi_{fin}\rangle$ .

Работа квантовых операторов осуществляется в итеративном режиме в зависимости от типа КА. При этом для общего случая предполагается, что определённые вычислительные проблемы могут быть решены на квантовом компьютере более эффективно (с меньшей вычислительной сложностью, так называемая  $NP$ -проблема), чем на классическом компьютере. Более того, с помощью эффективного применения квантового компьютера достигаются решения алгоритмически неразрешимых на классическом уровне проблем, т.е. эффективно решаемые с помощью применения КА, для которых не существует ни одного классического (рандомизированного) алгоритма.

Эти наблюдения свидетельствуют о том, что КА составляют физически обоснованный базис не только техники ускорения вычислений, но и поиска решений сложных проблем, используя такие квантовые законы, как *суперпозиция* для расширения пространства возможных решений, *квантовый параллелизм* процессов вычислений в интересах ускорения поиска решений и *квантовая интерференция* с целью извлечения искомого решения. Дополнительно к отмеченным вычислительным ресурсам *квантовая корреляция* рассматривается как новый физический вычислительный ресурс, позволяющий резко увеличить успешный поиск решений проблем ранее не рассматриваемых в классической области вычислений. К таким проблемам относятся: телепортация, сверхплотное кодирование, передача данных по квантовым каналам связи с повышенным уровнем секретности и защиты (от

несанкционированного доступа или подслушивания), коррекция квантовых кодов с заданным уровнем толерантности и др. [8 – 10].

С математической точки зрения, объединённые квантовые состояния формируются с помощью тензорного (кронекерского) произведения на гильбертовых пространствах базисных состояний. Результатом такой операции выступает квантовый регистр. Включение в вычислительный процесс квантовой корреляции приводит к увеличению скорости и достоверности поиска решений на основе соответствующего КА, а благодаря наличию данного физического вычислительного ресурса многие вычислительные операции можно выполнять параллельно. Поэтому квантовая корреляция в этом смысле демонстрирует новый специальный физический ресурс квантовых вычислений.

С точки зрения функциональных возможностей КА классифицируются на две группы: алгоритмы принятия решений и поисковые алгоритмы. При квантовых вычислениях в первую очередь интересуются качественными свойствами функции, кодируя их в начальных квантовых состояниях. Для поиска решения с помощью КА целенаправленно изменяют исходную суперпозицию начальных состояний, применяя последовательно перечисленные типы квантовых операторов. В этом случае может быть использован алгебраический формализм, который поддерживается абстрагированием логического вывода относительно квантовых эффектов и отображает важнейшие квантовые эффекты на программном уровне, устраняя трудность аппаратной реализации, такую как декогерентность.

Квантовая алгебра позволяет формализовать некоторые важные свойства квантовых эффектов путем включения их описания в определенные программные атрибуты. Тогда программный инструмент включает механизм компактного описания программных атрибутов и эффективного логического вывода на большом количестве квантовых битов и базисных состояний с высоким уровнем квантовой корреляции, а также обладает дескриптивным представлением физических свойств описываемых квантовых операторов [10, 27 – 34]. Данный подход является аппаратно независимым и может быть использован в качестве модели квантовых вычислений или базиса языка квантового программирования.

В Приложении рассмотрены примеры, иллюстрирующие основные квантовые операторы и их свойства. Поэтапное применение КАЯ и измерение результатов вычислений после применения квантовых операторов в КАЯ позволяет реализовать КНВ на классическом компьютере (см. рис. 1). Квантовый блок повторяет итеративно  $k$  раз квантовые операции с целью воспроизводства набора  $k$  базисных векторов, содержащих искомое решение. Поскольку измерение является в общем случае недетерминированной операцией, то полученные в наборе базисные векторы не идентичны, и каждый из них кодирует часть информации, необходимой для решения исследуемой проблемы. Последняя часть КА содержит блок интерпретации набора базисных векторов, позволяющий выделить конечное содержательное решение исследуемой проблемы с определенной вероятностью.

Как отмечалось, фундаментальный результат теории квантовых вычислений заключается в установленной возможности погружать все КА в квантовые ячейки, реализуемые на универсальных типовых элементных схемах (типа «И», «ИЛИ», «НЕТ», «контролируемое НЕТ» и т.п.), которые используются в структуре классического компьютера. Данные ячейки описываются математически унитарными операторами, отражающими эволюцию вычислительного процесса. В теории квантовых вычислений показано также, что возможна реализация квантовых вычислений на основе классически эффективного симулятора.

Таким образом, метод проектирования КАЯ, разработанный в [10, 23], можно применять для моделирования процессов глобальной оптимизации БЗ в робастных структурах ИСУ, используя технологию квантовых вычислений, которая содержит такие инструментальные программные средства, как квантовый генетический поисковый алгоритм или квантовые обучающие процессы оптимизации. Модель КНВ – базис таких инструментальных программных средств оптимизации.

*Примечание 2.* Задача оценки роли квантовых эффектов в КА и разработка самих моделей КА относится к классу проблем повышенной сложности. В квантовых вычислениях есть много технических трудностей, связанных с необходимостью манипуляции нетрадиционными свойствами квантовой информации. К ним относятся невозможность копировать квантовую информацию о неизвестном квантовом состоянии; разрушение ценной информации, содержащейся в суперпозиции, при измерении результата вычислений; оперирование с такими нестандартными для классической теории вычислений понятиями, как квантовая корреляция, относительная фаза или суперпозиция. Суперпозиция и квантовая корреляция (запутанные состояния) не имеют классических аналогов и составляют,

как отмечалось выше, базис мощности квантовых вычислений. Фаза имеет традиционную интерпретацию непрерывной величины, но в квантовых вычислениях базовая единица фазы играет дополнительную роль различения квантовых состояний промежуточных вычислений без возможности копирования. При этом описательное представление квантовых операторов указывает на необходимость включения искомым, качественных свойств функций в процесс приготовления исходной суперпозиции начальных квантовых состояний как потенциальных решений.

Многие из наиболее популярных моделей квантовых вычислений являются прямыми квантовыми обобщениями соответствующих конструкций классических вычислений. К ним относятся квантовая машина Тьюринга, квантовые ячейки и квантовые случайные блуждания. Данные модели основаны на унитарной эволюции (как базисного механизма информационных процессов). Только в конце вычислений проводятся конечные измерения, в результате чего квантовая информация отображается в классическую информацию (для считывания результата вычислений в классическом виде). Рассматриваются две основные идеи. Первая из них связана с усилением амплитуд вероятностей искомого решения, вторая утверждает, что классические вычисления можно моделировать на квантовом компьютере. Таким образом, вместо описания КА можно оперировать соответствующим классическим алгоритмом, который дает решение с заданной вероятностью ошибки. Затем классический алгоритм трансформируется в КА, и применяется процедура усиления амплитуды вероятности искомого решения в КА.

Другие модели квантовых вычислений основаны на применении только необратимых измерений (one-way quantum computing), на теории скрытых параметров (hidden variable), адиабатические КА (adiabatic quantum computing). Существует также модель квантовых вычислений на «дуальном» квантовом компьютере, использующая корпускулярные и интерференционные свойства квантовых систем (duality quantum computer) и т.п. Данные модели исследованы в [10] с точки зрения квантовой теории оптимальных процессов управления. С учётом сделанных замечаний проведем краткий анализ функциональной модели КНВ на основе типовых квантовых операторов квантовых вычислений.

### 2.3. Модель КНВ

Как отмечалось, основной задачей, решаемой КНВ, является формирование БЗ с повышенным уровнем робастности из конечного множества БЗ для НР, сформированных с применением технологии мягких вычислений и стохастического моделирования. Рассмотрим кратко функциональную структуру и работу основных блоков КНВ. В качестве примера, без потери общности результата, обсудим процессы извлечения скрытой квантовой информации, обработки данных и формирования робастной БЗ НР, используя БЗ двух НР, спроектированных для фиксированных (отличных друг от друга) ситуаций управления.

На рис. 2 показана функциональная структура упрощенной модели КНВ как частный случай обобщенной модели, представленной на рис. 1. На вход КНВ в реальном времени поступают сигналы управления от сформированных заранее БЗ НР (шаг «Начальное состояние» на рис. 2). Следующим шагом является процесс нормализации (блок 1 на рис. 2) полученных сигналов в интервале  $[0, 1]$  путем деления амплитуд траекторий сигналов управления на максимальные амплитуды (блок « $\max K$ » совместно с блоком 1 на рис. 2).

После нормировки сигналов осуществляется формирование квантовых битов (блок 2 на рис. 2) из текущих значений нормированных сигналов управления. С этой целью предварительно определяются функции плотности распределения вероятностей по представительным выборочным траекториям сигналов управления. Далее путем интегрирования полученных функций плотности распределения вероятностей определяются интегральные функции распределения вероятностей (блоки «Р» и 2 на рис. 2). Полученные таким образом функции распределения вероятностей позволяют выделить «виртуальные» состояния  $|1\rangle$  сигналов управления для формирования суперпозиции с помощью преобразования Адамара из текущего состояния введенных сигналов управления. При этом используется закон вероятностей типа  $P(|0\rangle) + P(|1\rangle) = 1$ , где  $P(|0\rangle)$  и  $P(|1\rangle)$  – вероятности текущего реального и виртуального состояний сигнала управления, соответственно. Для текущего реального нормированного состояния сигнала управления  $|0\rangle$  с помощью интегральной функции распределения вероят-

ностей определяется его вероятность. Далее из закона сохранения вероятностей рассчитывается вероятность виртуального состояния нормированного сигнала управления.

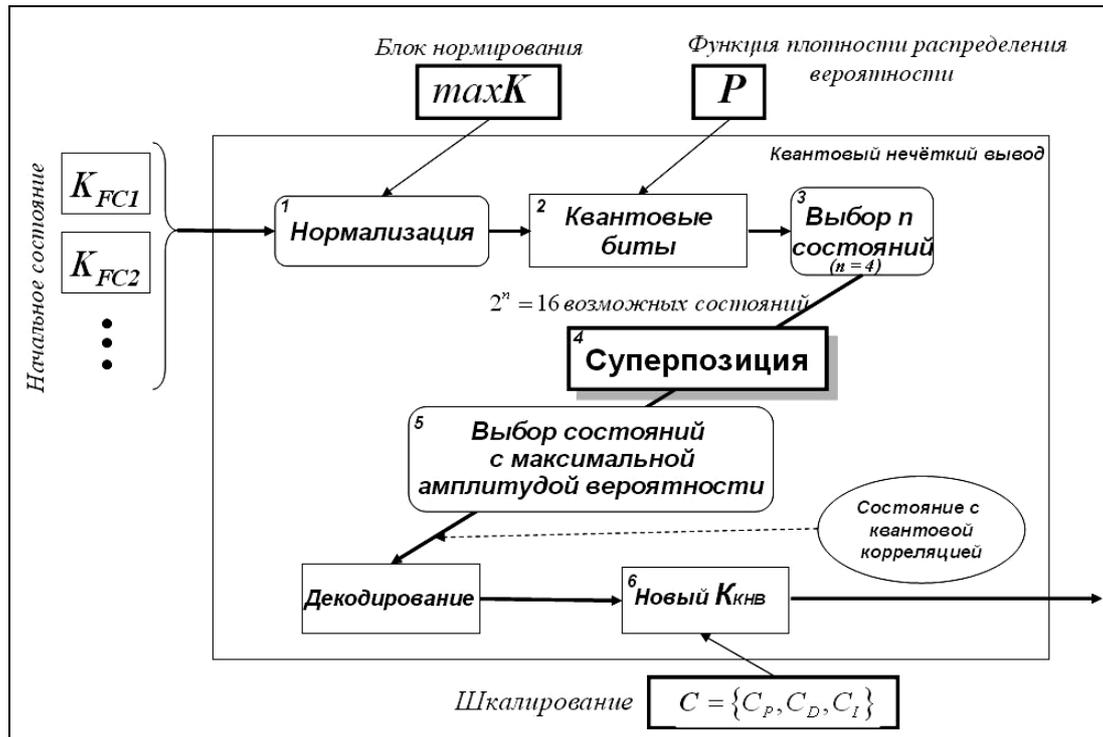


Рис. 2. Функциональная структура КНВ в процессе реального времени

Используя тот же интегральный закон распределения вероятностей, путём обратного отображения, вычисляется численное значение соответствующего виртуального состояния сигнала управления.

Следовательно, суперпозиция квантовой системы «реальное состояние – виртуальное состояние» имеет следующий вид:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{P(|0\rangle)} |0\rangle + \sqrt{1-P(|0\rangle)} |1\rangle \right) = \text{квантовый бит}.$$

На рис. 3 отображен схематично вычислительный процесс и формирование квантового бита для текущего состояния нормированного сигнала управления, описывающего коэффициенты усиления нечеткого ПИД-регулятора в структуре ИСУ (таблица).

Далее осуществляется выбор типа квантовой корреляции (рис. 2, блок 3) и соответствующих компонент для используемого типа корреляции из нормированных сигналов управления. Для рассматриваемой ситуации возможны три типа квантовой корреляции (содержащих скрытую в спроектированных БЗ ценную квантовую информацию): *пространственная, временная и пространственно-временная*.

На рис. 4 показаны перечисленные три типа корреляции между процессами управления коэффициентами усиления двух нечётких ПИД-регуляторов.



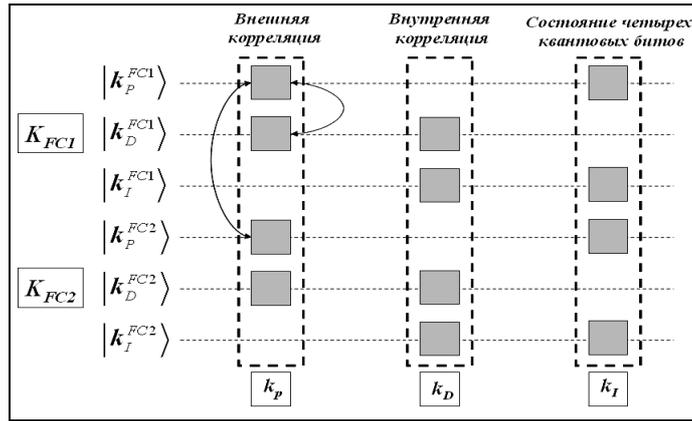


Рис. 5. Процесс формирования внутренней и внешней пространственной корреляции для новых коэффициентов усиления  $k_p, k_D, k_I$

Согласно рис. 5 квантовая пространственная корреляция (как тип) классифицируется, в свою очередь, на два вида корреляций: *внутренняя* и *внешняя*. Внутренняя корреляция формируется за счет установления статистических взаимосвязей между выходными сигналами управления коэффициентами усиления заданного первого НР типа  $K_{FC1}$ . Внешний вид корреляции характеризует связь между соответствующими сигналами управления первого  $K_{FC1}$  и второго  $K_{FC2}$  НР, где индекс «FC1» означает нечёткий регулятор 1 (НР1), а индекс «FC2» означает нечёткий регулятор 2 (НР2). Более подробное описание обозначений на рис. 5 дано ниже.

Отметим также, что аналогичные рассуждения справедливы для временной и пространственно-временной корреляций. В результате формирования таких типов и видов квантовой корреляции осуществляется *координационное управление* между коэффициентами усиления за счёт соответствующей внутренней и внешней силы корреляции. Следовательно, для конкретного рассматриваемого случая двух НР каждое квантовое состояние суперпозиции выбранного коэффициента усиления описывается четырьмя квантовыми битами.

Рассмотрим алгоритм формирования суперпозиции (рис. 2, блок 4) для вычисления оптимального значения, например, пропорционального коэффициента усиления нечёткого ПИД-регулятора (рис. 2, блок 5), используя БЗ двух НР из разных ситуаций управления. Остальные коэффициенты вычисляются по аналогичному алгоритму.

На рис. 6 показан пример вычисления искомого множества значений пропорционального коэффициента усиления из множества комбинаций  $\{k_p^{FC1}, k_p^{FC2}, k_D^{FC1}, k_D^{FC2}\}$ .

$$\begin{aligned}
 & |k_p^{FC1}\rangle \otimes |k_p^{FC2}\rangle \otimes |k_D^{FC1}\rangle \otimes |k_D^{FC2}\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y_{1,P}^0 \cdot |0\rangle_{1,P} + y_{1,P}^1 \cdot |1\rangle_{1,P}) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(y_{2,P}^0 \cdot |0\rangle_{2,P} + y_{2,P}^1 \cdot |1\rangle_{2,P}) \\
 &\quad \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(y_{1,D}^0 \cdot |0\rangle_{1,D} + y_{1,D}^1 \cdot |1\rangle_{1,D}) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(y_{2,D}^0 \cdot |0\rangle_{2,D} + y_{2,D}^1 \cdot |1\rangle_{2,D}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} (\alpha_1 |0000\rangle + \alpha_2 |0001\rangle + \dots + \alpha_{2^{n-1}} |1110\rangle + \alpha_{2^n} |1111\rangle) \\
 &\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{16 \text{ возможных состояний}} \quad (n = 4) \\
 &\alpha_1 = y_{1,P}^0 \cdot y_{2,P}^0 \cdot y_{1,D}^0 \cdot y_{2,D}^0 : \text{амплитуда вероятности}
 \end{aligned}$$

Рис. 6. Пример вычисления пропорционального коэффициента усиления  $k_p$  на основе множества

$\{k_p^{FC1}, k_p^{FC2}, k_D^{FC1}, k_D^{FC2}\}$ : новый  $k_p$  (суперпозиция четырех выбранных состояний)

Здесь  $k_p^{FC1}$  – используемое значение сигналов управления пропорциональным коэффициентом усиления БЗ первого НР, спроектированного для первой фиксированной ситуации управления;  $k_D^{FC2}$  – значение сигналов управления дифференциальным коэффициентом усиления БЗ второго НР, разработанного для второй ситуации управления (существенно отличающейся от первой по внешним условиям функционирования ОУ).

Применяя тензорное произведение между преобразованиями Адамара, получим члены вида  $k_p^{FC1} \otimes k_D^{FC2}$  и аналогичные комбинации коэффициентов усиления. Как видно из обозначений на рис. 6, имеется 16 возможных состояний, описывающих комбинации корреляций (с учетом их типа и вида) между соответствующими коэффициентами усиления двух НР, спроектированных для разных ситуаций управления.

Следует отметить принципиальную особенность процесса формирования и проектирования нового вида робастных коэффициентов усиления нечёткого ПИД-регулятора за счёт применения квантового оператора суперпозиции. Операция суперпозиции позволяет осуществить логическое объединение различных БЗ и выделить приоритет корреляции отдельных состояний в суперпозиции БЗ с применением разнообразных критериев оптимизации. При использовании ОБЗ на мягких вычислениях формирование БЗ осуществляется путем случайного поиска в ГА на фиксированном пространстве поиска. При этом случайный поиск ведется независимо для трех коэффициентов усиления в нечетком ПИД-регуляторе. Это означает, что могут существовать другие наборы коэффициентов усиления, имеющие эквивалентный суммарный эффект управления.

Новые типы и виды квантовой корреляции позволяют осуществить координационное управление коэффициентами усиления только за счёт физических ресурсов используемого вида корреляции. Это приводит к сжатию и устранению (редукции) избыточности информации в независимых законах управления коэффициентами усиления, извлечению наиболее ценной информации, и, как следствие, к повышению уровня робастности новой спроектированной БЗ за счет нового вида координации. Применение запутанных состояний в трёх типах корреляции даёт возможность повысить уровень робастности спроектированной БЗ (с помощью физических свойств перепутанных состояний), используя эффект телепортации между квантовыми состояниями в сформированной суперпозиции (см. рис. 1). Такой подход к проектированию робастных БЗ не имеет классических аналогов и отличается чисто квантовой природой получаемых эффектов проектирования.

Выбор приоритетного в суперпозиции квантового состояния при фиксированном типе корреляции (в данном случае пространственном) осуществляется в блоке 5 на рис. 2. Рассмотрим возможный подход к выбору критерия оптимизации извлечения приоритетного состояния из сформированной (блоке 4 на рис. 2) суперпозиции закодированных возможных состояний коэффициентов усиления нечёткого ПИД-регулятора. Для этой цели используется понятие «интеллектуального квантового состояния», введенное в квантовую теорию измерений как состояния с минимальной неопределенностью (в смысле минимума неравенства неопределенности Гейзенберга) [54, 55]. Данное понятие связывают также с решениями квантовых волновых уравнений (типа Шредингера и др.), для которых волновой пакет состояния квантовой системы является когерентным состоянием. На нем соотношение неопределенности достигает глобального минимума. Определение и вычисление состояния в КА дано в работе [26, 56] на основе определения энтропии фон Неймана и информационной энтропии Шеннона в данном квантовом состоянии. Согласно [10, 26], «интеллектуальное квантовое состояние» в КА есть минимум разности между информационной энтропией квантового состояния Шеннона и физической энтропией квантового состояния фон Неймана:

$$I(|\text{Квантовое состояние}\rangle) = \min(H^{Sh} - S^{vN}), \quad (1)$$

где  $H^{Sh}$  и  $S^{vN}$  – энтропии Шеннона и фон Неймана соответственно.

Согласно законам квантовой теории информации, имеем следующее неравенство:

$$H^{Sh} \geq S^{vN} \text{ т.е., } I(|\text{Квантовое состояние}\rangle) \geq 0.$$

*Примечание 3.* Напомним, что квадрат амплитуды вероятностей состояния в квантовой механике равен классической вероятности нахождения квантовой системы в данном состоянии (постулат Бора, который имеет несколько вариантов строгого обоснования [57]).

С точки зрения квантовой теории информации чистое квантовое состояние характеризуется, как известно, нулевым значением энтропии фон Неймана. Следовательно, «интеллектуальное квантовое состояние» в рассматриваемом КА имеет место для минимума информационной энтропии квантового состояния Шеннона. Искомый минимум достигается, в свою очередь, при максимуме вероятности состояния (по определению информационной энтропии квантового состояния Шеннона  $H^{Sh} = -\sum_i p_i \ln p_i$ , т.е. глобальный минимум наблюдается при максимуме вероятности  $p_i$ ). Так как

$p_i$  по определению есть квадрат соответствующей амплитуды вероятностей, то принцип максимума амплитуды вероятностей при коррелированном состоянии может быть принят за критерий отбора приоритетного «интеллектуального» корреляционного (когерентного) состояния в суперпозиции возможных кандидатов.

Таким образом, вычислением амплитуд квантовых состояний в суперпозиции состояний со смешанными видами квантовой корреляции (блок 5 на рис. 2) и выбором среди них максимальной реализуется модель квантового оракула, обладающего (по определению понятия квантового оракула) необходимой информацией об искомом решении. Схематично данный алгоритм показан на рис. 7.

Используя стандартную процедуру декодирования (внутреннего произведения векторов в Гильбертовом пространстве) и выбирая коэффициенты шкалирования для выходных значений проектируемых коэффициентов усиления (рис. 2, блок 6), осуществляется итерационная работа КА КНВ. Приведенная модель КА для КНВ позволяет решать классические проблемы проектирования робастных БЗ НР в структурах ИСУ, не имеющих аналогов решений среди семейства рандомизированных классических алгоритмов, и отличается полиномиальной вычислительной сложностью (*BQP*-класс вычислительной сложности).

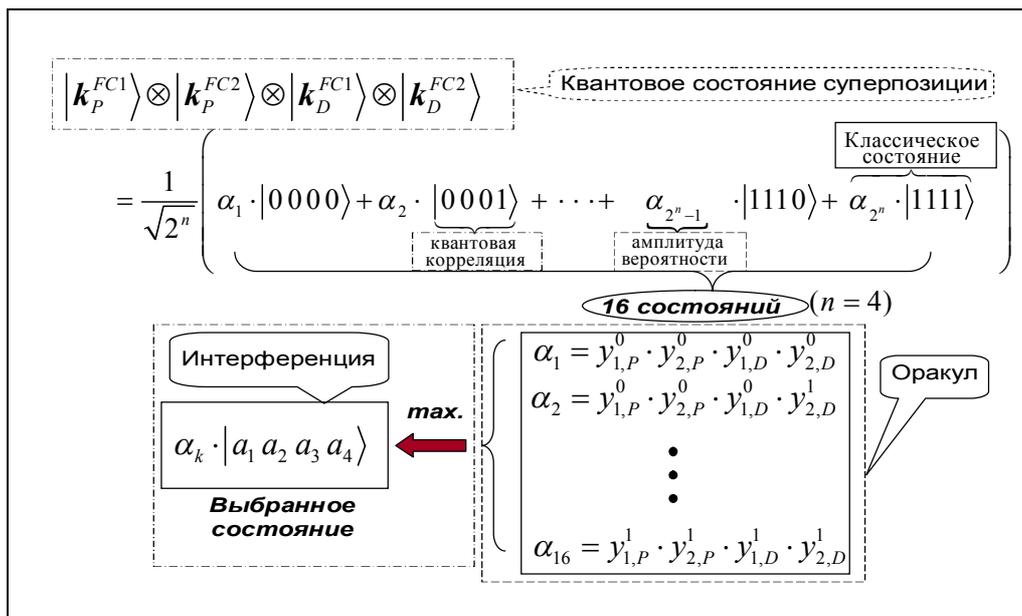


Рис. 7. Выбор квантового состояния по принципу максимума амплитуды вероятностей (минимума информационной энтропии Шеннона)

## 2.4. Квантовый информационный ресурс в КНВ-алгоритме

Алгоритм поиска, извлечения и кодирования дополнительной, ценной информации из двух нечетких ПИД-регуляторов (спроектированных с помощью ОБЗ) на основе КНВ-алгоритма описан кратко в Приложении и подробно в [3 – 5, 10]. Основные этапы и структура КНВ-алгоритма приведены выше в разд. 2.3. Здесь дается структура информационного ресурса КНВ-алгоритма с позиции квантовой теории информации [8, 10, 45].

Как показано в Приложении, процесс оптимального извлечения ценной информации из множества БЗ, полученных на основе технологии мягких вычислений, базируется на следующих четырех фактах в квантовой теории информации [4, 10]: 1) имеется эффективный алгоритм квантового сжатия

данных; 2) существует сцепленное представление классической и квантовой информации в квантовом состоянии; 3) полная корреляция в квантовом состоянии представляет собой «смесь» классической и квантовой корреляций; 4) присутствует скрытая (наблюдаемая, т.е. доступная извлечению) классическая корреляция в квантовом состоянии [40 – 48].

КНВ-алгоритм использует указанные четыре факта следующим образом: осуществляет сжатие классической информации путем кодирования в вычислительном базисе  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  и формирования квантовой корреляции между различными вычислительными базисами спроектированных БЗ (факт 1); разделяет и выполняет «сцепление» полной информации и корреляции на «классическую» и «квантовую» части, используя преобразование Адамара (факты 2 и 3); обеспечивает извлечение скрытой информации в квантовом состоянии и проводит операцию редукции избыточной информации в классическом сигнале управления (факт 4), применяя критерий максимума соответствующей амплитуды вероятности.

Поэтому перечисленные факты составляют основу информационного ресурса КНВ-алгоритма и дают возможность извлекать дополнительное количество ценной квантовой информации из индивидуальных робастных БЗ, а также использовать ее для проектирования робастных процессов управления с повышенным уровнем интеллектуальности. Основу прикладного эффекта составляют процедуры сжатия и редукции избыточной информации в классических сигналах управления. В следующих разделах статьи рассматривается применение данного информационного ресурса в структуре КНВ-алгоритма.

### 3. Программная поддержка и особенности процесса проектирования робастных БЗ для самоорганизующихся НР с применением КНВ

В разделе 2.3 рассмотрен конкретный КА в КНВ, который может быть реализован на классическом компьютере в виде КАЯ в соответствии с технологией проектирования, разработанной в [23]. В данном разделе рассмотрена структура программного продукта КАЯ, разработанного для реализации КНВ на классическом компьютере.

На рис. 8 показано основное программное меню КНВ.

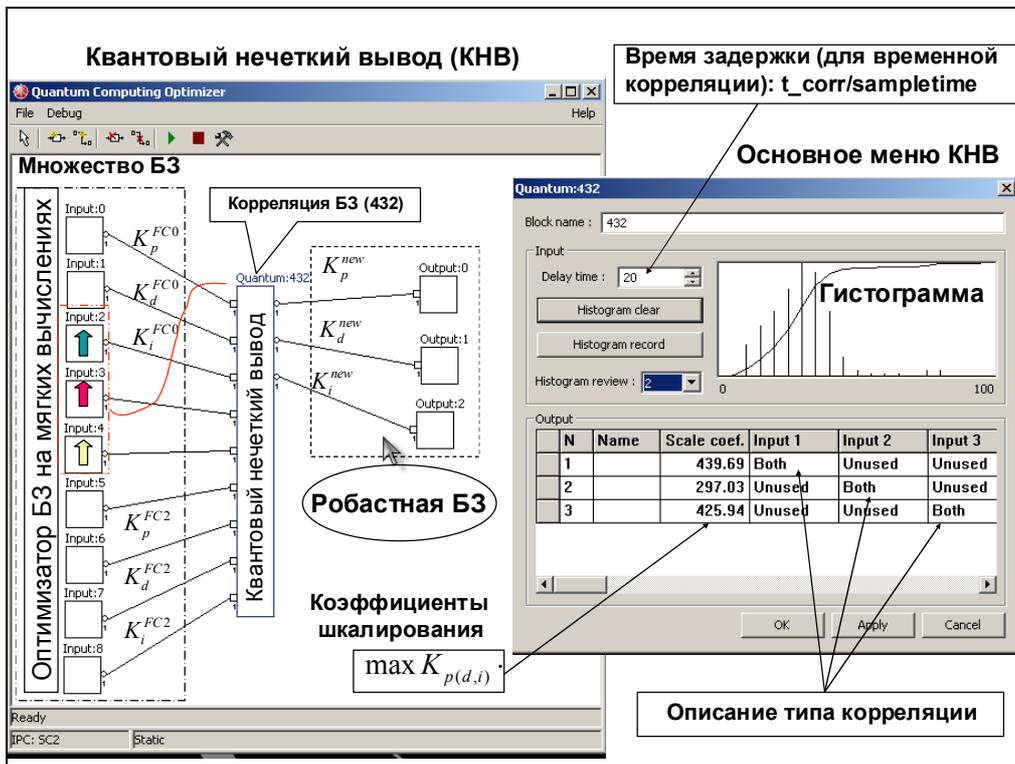


Рис. 8. Основное меню КНВ с использованием квантового оптимизатора БЗ

На рис. 9 приведен пример структуры, основные этапы формирования и проектирования структуры самоорганизующейся ИСУ, использующей КНВ для проектирования одной робастной БЗ НР из двух БЗ НР, полученных с помощью инструментария ОБЗ.

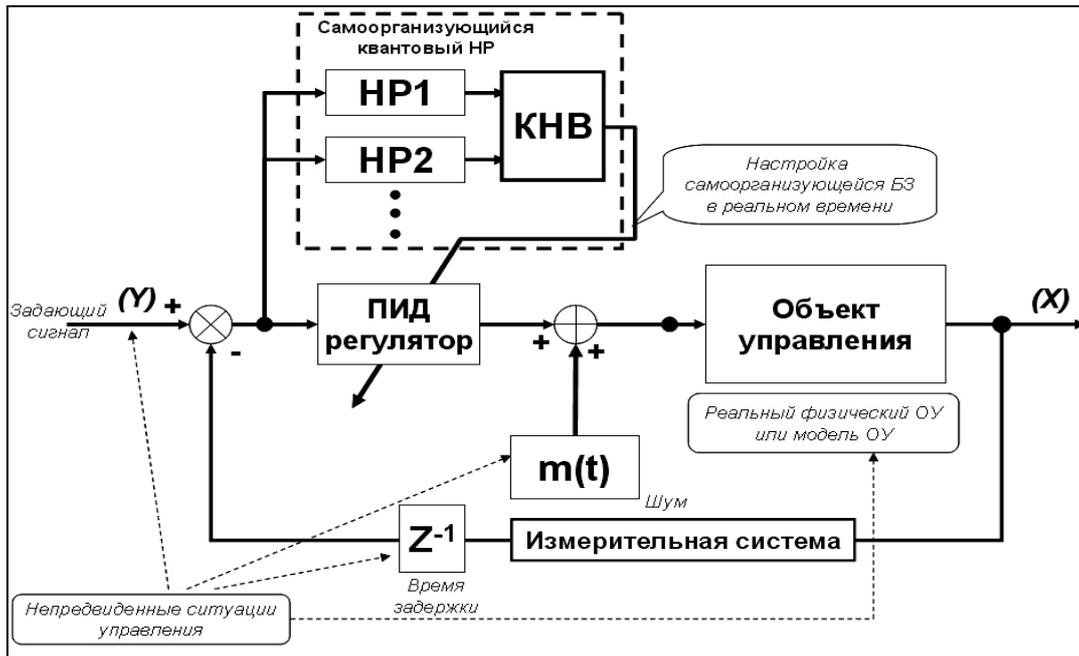


Рис. 9. Принципиальная структура самоорганизующейся ИСУ в непредвиденных ситуациях управления

Там же указаны возможные источники непредвиденных ситуаций управления.

Все блоки КНВ и КА представлены программными окнами, отражая наглядно в графической форме работу КНВ.

На рис. 10 показана блок-схема моделирования КА в КНВ, реализованная в системе Simulink.

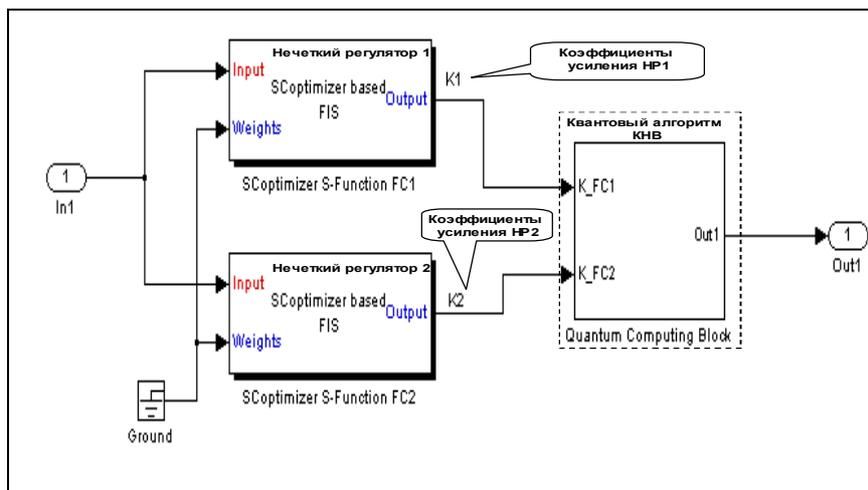


Рис. 10. Блок-схема моделирования квантового алгоритма КНВ в Simulink

В данном разделе рассмотрим поэтапно работу КА и подробнее особенности блоков КНВ на рис. 10, представленных в структурном виде на рис. 2 и 9.

### 3. 1. Входные сигналы в КНВ

Первым этапом работы вышеупомянутого инструментария является проектирование множества исходных БЗ для НР на основе ОБЗ с использованием технологии мягких вычислений (см. окно «КНВ» в меню на рис. 8). На структурном уровне [1, 7] ОБЗ рассматривается как новый гибкий про-

граммный продукт для реализации интеллектуальных вычислений, эффективно используемый для проектирования оптимальных структур и требуемого уровня робастности БЗ в НР. В структуре ОБЗ задана цепочка логически взаимосвязанных ГА с функциями пригодности в виде информационно-термодинамических критериев качества управления для «грубой» оптимизации структуры БЗ. Стандартный алгоритм обучения на основе метода обратного распространения ошибки используется для «тонкой» настройки параметров функций принадлежности в БЗ.

Следует также напомнить, что корректное определение оптимального вида нечеткого вывода, типа и количества продукционных используемых правил и функций принадлежности лингвистических переменных в БЗ и БД для используемого НР является центральной и наиболее сложной проблемой в процессе проектирования робастных БЗ. Именно эту проблему на первом этапе технологии проектирования оптимально решает ОБЗ для фиксированной ситуации управления.

Входом для ОБЗ может быть сигнал физических измерений динамического поведения ОУ или результаты данных моделирования (именуемые как обучающий сигнал – ОС). Для проектирования ОС (или оценки функции пригодности ГА) применяется система стохастического моделирования с целью извлечения знаний из динамического поведения ОУ на основе соответствующей физической или математической модели. Подробное описание структуры и функциональных особенностей ОБЗ приведено в [1, 2]. Система стохастического моделирования, основанная на методе нелинейных формирующих фильтров и решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова, описана дополнительно в [7].

Таким образом, робастные индивидуальные БЗ спроектированы на фиксированную ситуацию управления. Выходные сигналы из спроектированных БЗ поступают в реальном времени в виде сигналов управления изменением коэффициентов усиления используемых ПИД-регуляторов на вход КНВ как текущей реакции на новую ошибку управления. В этом случае для работы КА в КНВ принципиально не нужна другая информация о физической структуре используемого НР и его БЗ, а также, какие продукционные правила сработали в непредвиденной ситуации управления.

### **3. 2. Основные операторы в КНВ (на примере суперпозиции входных сигналов)**

Как показано в разд. 2.2, структурно КА в КНВ-блоке (рис. 1) базируется на основных квантовых операторах теории КА: *суперпозиции* классических состояний, сформированных на выходе ОБЗ; операторе формирования *запутанных* состояний (квантовый оракул); *интерференции*, а также классических необратимых измерениях (см. рис. 7).

*Примечание 4.* Напомним, что используемые БЗ двух НР спроектированы в режиме off-line для заданной цели и различных ситуаций управления (при разных внешних шумах, действующих на ОУ и наличии времени задержки в канале измерения ошибки управления). Используя отмеченные выше четыре факта из квантовой теории информации, КНВ осуществляет извлечение ценной скрытой квантовой информации из БЗ двух спроектированных НР. С точки зрения квантовой теории информации в этом случае между БЗ двух НР за счет квантовой корреляции достигается обмен информацией по каналу связи, сформированному за счёт различных видов квантовой корреляции (см. Приложение). Отмеченный эффект обмена информацией является чисто *квантовым эффектом* и невозможен на классическом уровне описания процессов проектирования робастных БЗ НР.

В статье в качестве конкретного примера рассматривается простой случай КНВ как частный вариант квантового логического вывода, представленного на рис. 1 (без оптимизации процесса выбора вида и типа квантовой корреляции). Модель упрощенного КНВ и его особенности подробно рассмотрены были также в [4, 10].

Входные сигналы в КНВ преобразуются в суперпозиционное состояние  $K_1(t) \otimes K_2(t)$ , где  $\otimes$  – операция тензорного произведения, и  $K_{1,2}(t)$  – коэффициенты усиления ПИД-регулятора, формируемые с помощью БЗ двух НР (FC0, FC1). Алгоритм вычисления суперпозиции из сигналов управления различных БЗ НР был разработан в [3 – 5] и подробно рассмотрен ниже.

Для понимания физической сущности квантовой суперпозиции классических состояний рассмотрим особенности определения квантового состояния суперпозиции и его характерные отличия от классического состояния на нечетком множестве событий.

В теории нечетких множеств физическое состояние отображается в заданную экспертом лингвистическую (в общем случае субъективную) шкалу в виде лингвистической переменной. На рис. 11 показана ситуация для лингвистической переменной «большой» и «маленький», описывающей физическое состояние в виде числового измерения 4,23.

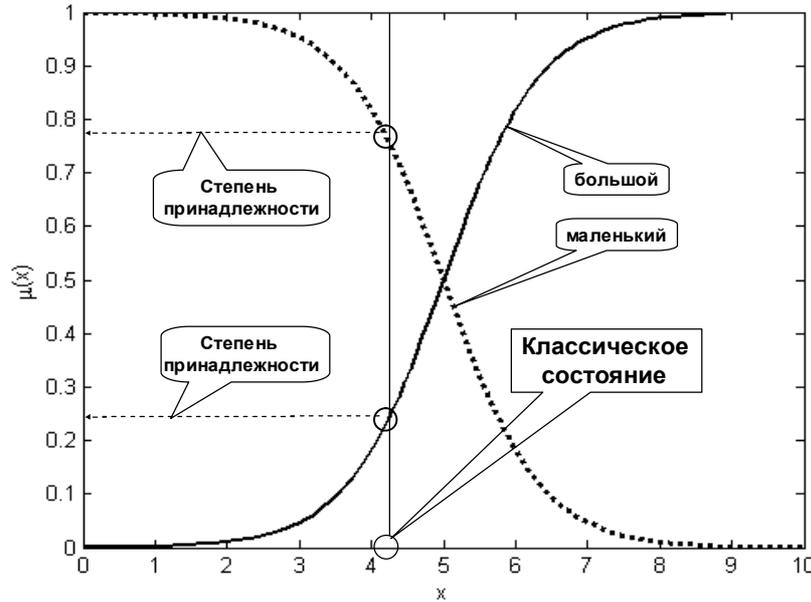


Рис. 11. Определение нечеткого состояния

Согласно определению теории нечетких множеств имеем нечеткое состояние «маленький» как 4,23/0,79 и «большой» как 4,23/0,21.

Таким образом, одно число характеризуется двумя лингвистическими переменными и может интерпретироваться одновременно как «маленький» со степенью принадлежности 0,79 и как «большой» со степенью принадлежности 0,21. В этом случае лингвистическая переменная «большой» характеризуется функцией принадлежности  $\mu_B$ , которая определяется через функцию принадлежности  $\mu_M$  лингвистической переменной «маленький» в виде  $\mu_B = 1 - \mu_M$ , т.е. включает в себя закон отрицания. При этом закон исключения третьего не выполняется, а само нечеткое состояние является неизмеримым в силу отсутствия процессов измерения в теории нечетких множеств.

В квантовой механике квантовое состояние суперпозиции состоит из двух и более классических состояний с заданными амплитудами вероятности и физически представляет собой одно наблюдаемое состояние (на языке квантовой механики называется «наблюдаемой»).

На рис. 12 показано квантовое состояние суперпозиции двух состояний «большой» и «маленький».

Существенным отличием квантовой суперпозиции от нечеткого состояния состоит в том, что результатом измерения наблюдаемой (в заданном измерительном базисе) является одно классическое состояние, имеющее наибольшую амплитуду вероятности. Все остальные состояния в суперпозиции недоступны наблюдателю. Квантовое состояние суперпозиции является объективным, не зависит от наблюдателя и подтверждено многими экспериментами в квантовой механике. При этом в квантовой суперпозиции выполняется «принцип дополнительности» для численных значений самих состояний, который как частный случай включает закон логического отрицания. Так, например, для квантового состояния суперпозиции «большой»  $|1\rangle$  и «маленький»  $|0\rangle$  в виде  $\frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + \sqrt{2}|1\rangle)$ , представленного на рис. 12, выполняется закон сохранения вероятности в виде

$$\sum_{i=1,2} p_i = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1.$$

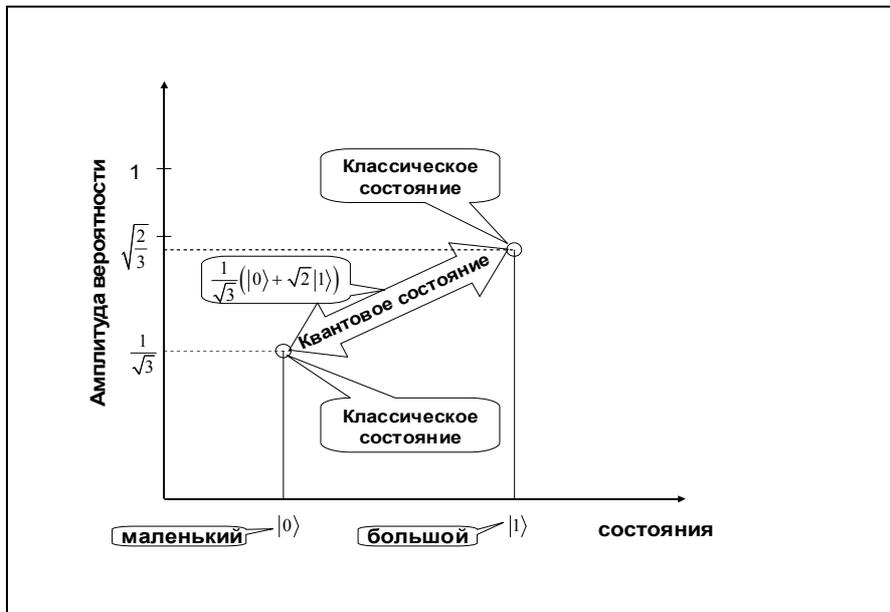


Рис. 12. Определение квантового состояния суперпозиции

Однако лингвистические переменные «большой» и «маленький» в отличие от рассмотренного ранее нечеткого состояния характеризуются в общем случае разными численными значениями.

В теории квантовых вычислений (см. Приложение) процесс вычислений начинается с действия оператора эволюции  $U_f$  на «начальное состояние»  $|00\dots 0\rangle$  в виде унитарного обобщенного преобразования Уолша-Адамара:

$$U_f = \otimes U_{f(i)}, \text{ где } U_{f(i)} = \begin{pmatrix} \sqrt{f(i)} & -\sqrt{1-f(i)} \\ \sqrt{1-f(i)} & \sqrt{f(i)} \end{pmatrix}$$

и  $\sqrt{f(i)}$  определяет амплитуду вероятности  $i$ -го классического состояния в квантовой суперпозиции.

В результате имеем  $U_f |00\dots 0\rangle = |s_f\rangle$ , где  $|s_f\rangle$  определяет состояние суперпозиции из конечного числа классических состояний. Таким образом, каждый оператор  $U_{f(i)}$  отображает отдельный квантовый бит из начального состояния в смешанное состояние суперпозиции с заданной вероятностью состояния  $f(i)$ . Геометрической интерпретацией оператора  $U_{f(i)}$  является сфера Блоха с вращением вокруг оси  $y$  на угол:

$$\theta_i = 2 \arcsin(\sqrt{f(i)}).$$

На рис. 3 и 6 показан сам процесс проектирования состояния квантовой суперпозиции из классических состояний изменения коэффициентов усиления ПИД-регуляторов по схеме рис. 9.

Так, например, если нормированное состояние  $|0\rangle$  (кодированное значение коэффициента пропорционального усиления) для текущего момента времени было 0,91, то вероятность данного состояния равна 0,8 (см. рис. 3). Согласно закону сохранения вероятности виртуальное дополнительное состояние  $|1\rangle$  имеет вероятность проявления 0,2 с численным значением 0,6 (при этом  $0.91+0.7 \neq 1$  в силу принципа дополнителности, а не применения закона логического отрицания  $1-0.91 = 0.09$ ).

Рис. 13 показывает блок проектирования квантового состояния суперпозиции, который встроен в основное меню (см. рис. 8).

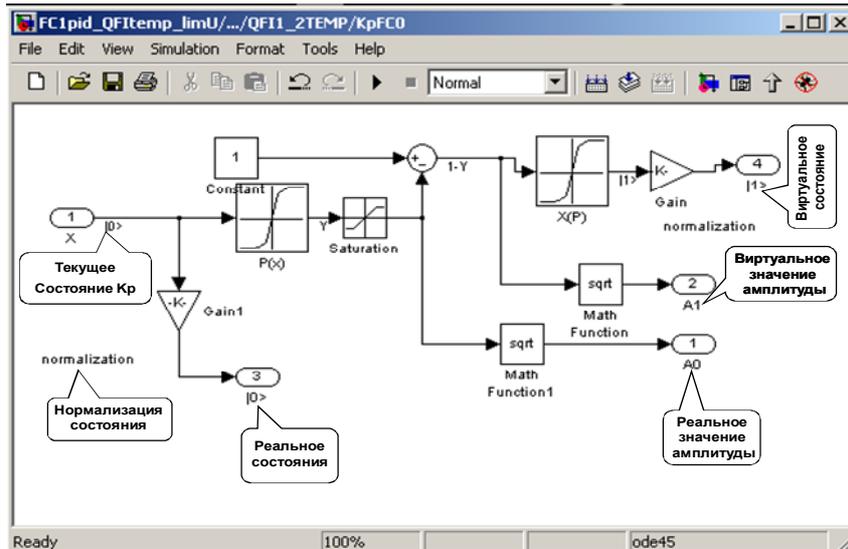


Рис. 13. Проектирование квантового состояния суперпозиции

Инициализация функций КНВ в разработанном программном продукте показана на рис. 14.

```

%this script prepares Histograms (probabilities)for all specified training pattern;
global Q_A_params;

% Case 4 oscillator, Example 3: beta= 0.1, Ref=0 DELAY=0.025; tc=0.05
% LIMITED control force U
filename0=['cdex3limU_TSO_FCO', '.pat'];% Case 4 pattern file name for FCO
filename1=['cdex3limU_TSI_FCI', '.pat'];% Case 4 pattern file name for FCI

maxKp=50; % value used for Kp normalization
maxKd=30; % value used for Kd normalization
maxKi=20; % value used for Ki normalization
% CALCULATIONS
indexes=[4 5 6];% indexes of collums of the pattern containing Kp, Kd and Ki
%after this script, probabilities and corresponding values will be
%allocated row wise, e.g. simulink block parameter P for Kp=P(1,:), and x for Kp will be X(1,:);

pat=load(filename0);
P0=[];
X0=[];
for i=1:length(indexes);
    [p,x]=makemap(pat(:,indexes(i)));
    P0=[P0;p];
    X0=[X0;x];
end

pat=load(filename1);
P1=[];
X1=[];
for i=1:length(indexes);
    [p,x]=makemap(pat(:,indexes(i)));
    P1=[P1;p];
    X1=[X1;x];
end

Q_A_params =[1 1 1] % for initialization
% NEW FCOnew TSI TEMP
%Q_A_params = [2.3969 2.0594 1.4125] %gal GOOD chosen
    
```

Файл образов:  $\{[E \ dE \ IE] \ [Kp \ Kd \ Ki]\}$  Индексы = [ 4 5 6]

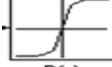
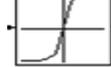
Вычисление распределения вероятностей	Операция инвертирования
	

Рис. 14. Инициализация функций КНВ: Matlab функция (initQFI.m)

Рис. 15 показывает в графической форме результат инициализации процесса формирования квантового состояния суперпозиции на основе преобразования Уолша-Адамара.

С помощью применения преобразования Уолша-Адамара организуется процесс формирования скрытой (ненаблюдаемой) смешанной корреляции в суперпозиции сигналов из двух классических БЗ НР; запутанные состояния моделируются квантовым оракулом, который может определить максимальную амплитуду вероятности на множестве соответствующих классических суперпозиционных состояний. По максимуму амплитуды вероятности извлекается корреляционное состояние с помощью оператора интерференции (в виде оператора идентичности) совместно с процедурой классического измерения (наблюдения).

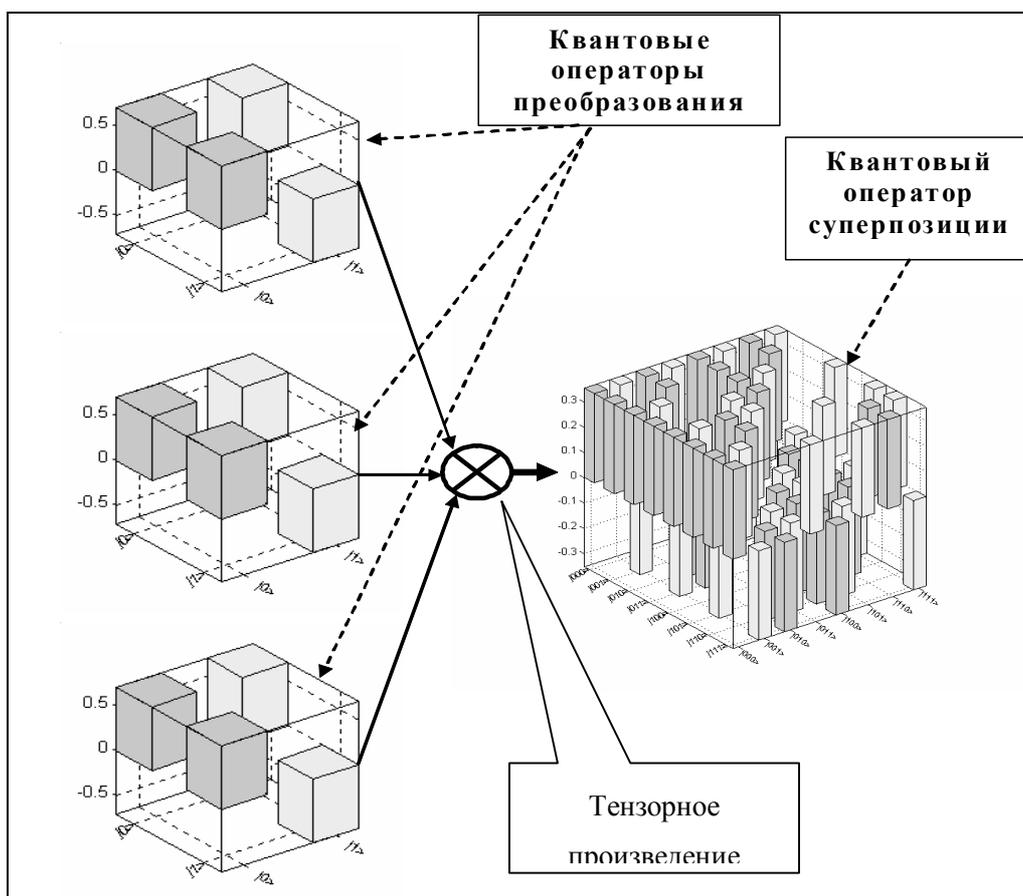


Рис. 15. Подготовка состояния суперпозиции на основе преобразования Уолша-Адамара и тензорного произведения

Рис. 7 иллюстрирует смысловое содержание вычислительного процесса КА в КНВ и работу квантовых операторов в целом.

### 3. 3. Особенности применения КНВ

Подчеркнем принципиально важную особенность работы КА (в модели КНВ) в процессе проектирования робастных законов управления коэффициентами усиления на основе спроектированных индивидуальных БЗ.

**А.** Робастные законы управления, проектируемые моделью КНВ, определяются в режиме обучения на выходных реакциях индивидуальных БЗ (с фиксированным набором продукционных правил) на текущую непредвиденную ситуацию управления в виде сигналов управления коэффициентами усиления ПИД-регулятора и реализуют процесс адаптации в реальном времени.

Такой эффект достигается только за счет использования законов квантовой теории информации в разработанной структуре КНВ (см. описание четырех фактов из квантовой теории информации в Приложении). С точки зрения квантовой теории информации структура КА в КНВ выполняет одновременно функции квантового фильтра. БЗ состоят из логических продукционных правил, которые по заданной ошибке управления формируют законы изменения коэффициентов усиления в используемых нечетких ПИД-регуляторах. КА в этом случае позволяет извлечь необходимую ценную информацию из реакции двух (или более) БЗ на непредвиденную ситуацию управления за счет устранения дополнительной избыточности информации в законах изменения коэффициентов усиления используемых регуляторов. Выходным сигналом КНВ являются новые законы изменения коэффициентов усиления ПИД-регулятора (см., ниже рис. 16).

При этом для формирования робастной БЗ в реальном времени входом для КНВ могут служить любые сигналы обучения, полученные из индивидуальных БЗ независимо от используемого про-

граммного инструментария моделирования (или экспериментально полученных сигналов обучения) [10].

**Б.** На втором этапе проектирования с применением модели КНВ уже не требуется формирования новых продукционных правил. Достаточно только в реальном времени получить реакцию продукционных правил в используемых НР на текущую непредвиденную ситуацию управления в виде выходных сигналов управления коэффициентами управления нечеткого ПИД-регулятора. В этом случае для работы модели КНВ само знание сработанных в индивидуальных БЗ конкретных продукционных правил не требуется. Наличие такой возможности дает большое преимущество, которое выражается в виде возможности проектирования процессов управления с требуемым уровнем робастности в реальном времени. При этом достижение требуемого уровня робастности в непредвиденной ситуации управления в ряде случаев может существенно зависеть от качества и количества используемых индивидуальных БЗ.

Таким образом, сам КА в модели КНВ служит физическим прототипом продукционных правил, реализует программным путем «виртуальную» робастную БЗ для нечеткого ПИД-регулятора (для текущей непредвиденной ситуации управления) и является проблемно независимым инструментарием.

Приведенные факты дают возможность использовать экспериментальные данные обучающего сигнала без построения математической модели ОУ. Такой подход открывает новые перспективы использования КНВ в задачах управления ОУ со слабо формализованной структурой и большой размерностью фазового пространства управляемых параметров.

Рассмотрим эффективность применения КНВ на конкретном примере.

#### ***4. Результаты моделирования работы самоорганизующегося НР с применением КНВ в непредвиденных ситуациях управления***

Рассмотрим практическое применение разработанной модели КНВ для формирования процессов управления коэффициентами усиления нечёткого ПИД-регулятора в зависимости от типа и вида квантовой корреляции. Данный подход используется для моделирования робастных БЗ для НР в структурах ИСУ существенно-нелинейными ОУ. Модели ОУ обладают различными видами динамической неустойчивости и функционируют в различных непредвиденных ситуациях управления.

На рис. 16 показана блок-схема моделирования самоорганизующегося НР в системе Simulink.

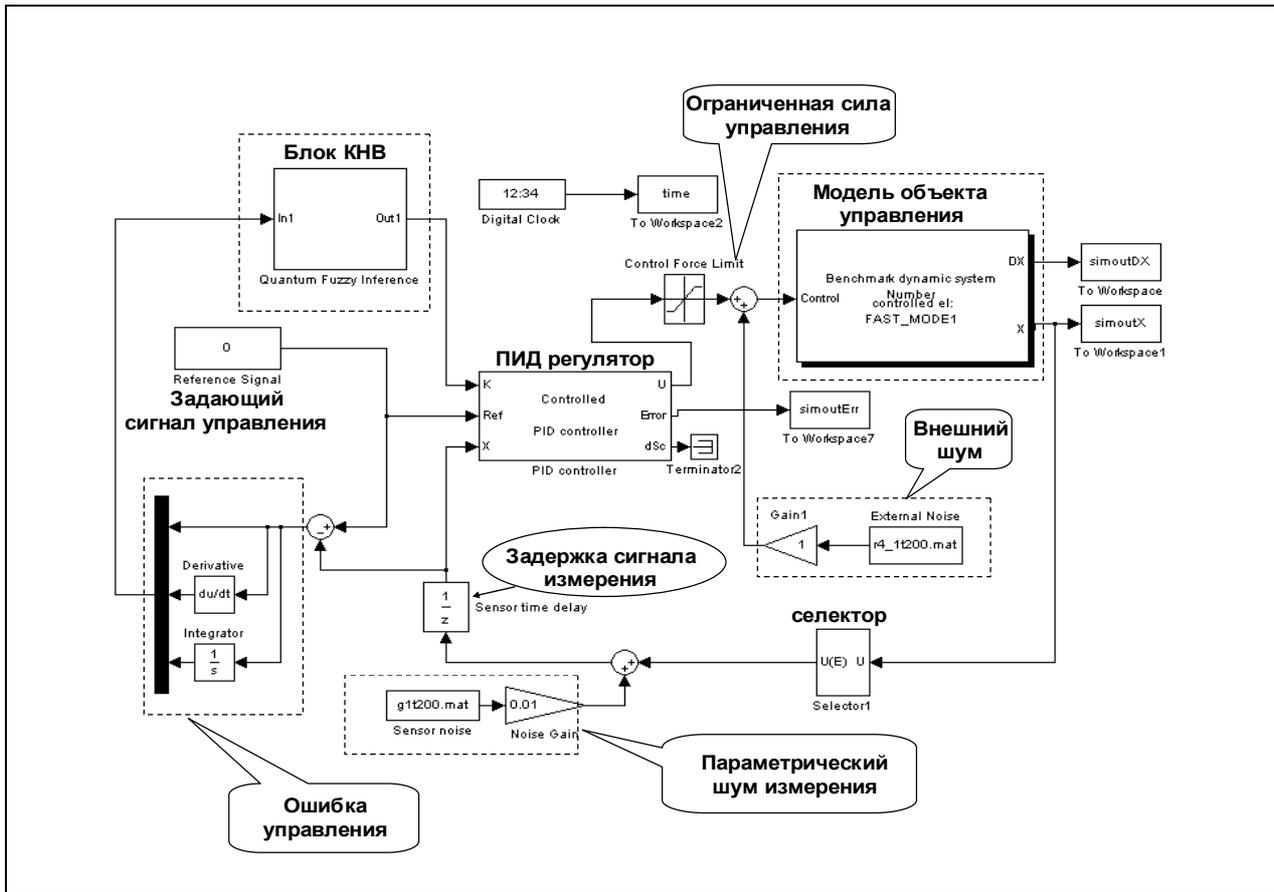


Рис. 16. Блок-схема моделирования самоорганизующегося НР в Simulink

В соответствии с КА в КНВ на первом этапе были осуществлены следующие операции: нормировка данных двух БЗ (TS0 и TS1); кодирование состояний, статистическая обработка с целью формирования интегрального закона распределения вероятностей; сформированы суперпозиции соответствующих кодированных сигналов управления для трёх типов квантовой корреляции: пространственной, временной и пространственно-временной. Далее, согласно следующему шагу КА, осуществлялось: вычисление амплитуд и определение максимальной амплитуды вероятностей квантовых состояний (действия оракула и интерференции) в сформированных суперпозициях; при этом для каждого момента времени формировались законы управления для трёх типов корреляций с применением процедур декодирования и шкалирования коэффициентов усиления нечеткого ПИД-регулятора в режиме реального времени.

Рассмотрим важный вопрос извлечения квантовой информации из классических состояний спроектированных законов управления на основе выбора типа квантовой корреляции, используя результаты сравнительного анализа их влияния на робастность управления.

**Пример 1: Влияние типов квантовой корреляции на вид процессов управления коэффициентами усиления нечёткого ПИД-регулятора**

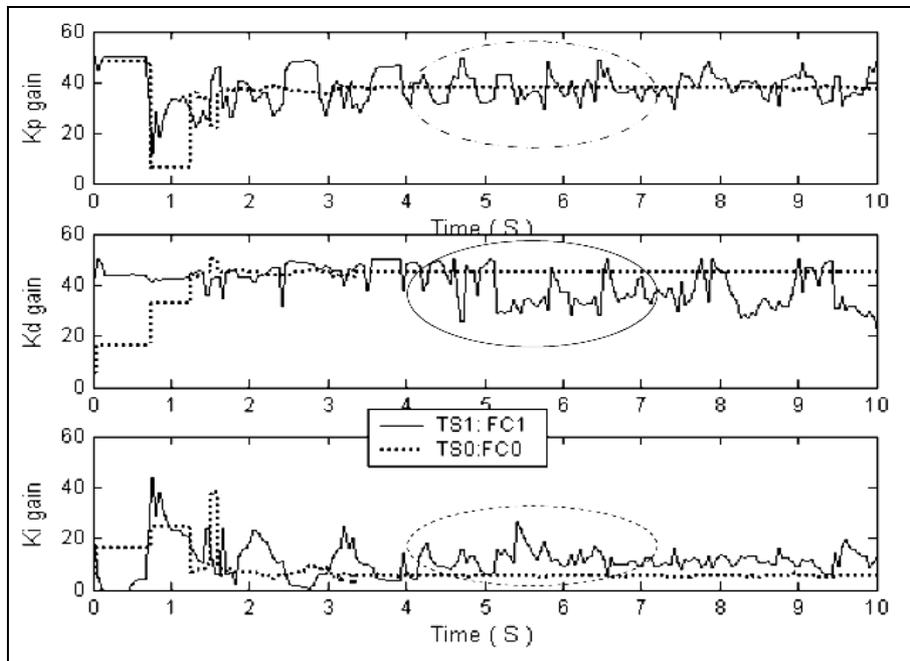
Согласно рис. 4 имеем три типа квантовой корреляции: пространственную, временную и пространственно-временную. В качестве исходных БЗ используем сигналы управления коэффициентами усиления двух нечетких ПИД-регуляторов, спроектированных с помощью ОБЗ (см. результаты моделирования соответствующих сигналов управления в [7] и ниже пример 2).

**А. Чувствительность спроектированных индивидуальных БЗ**

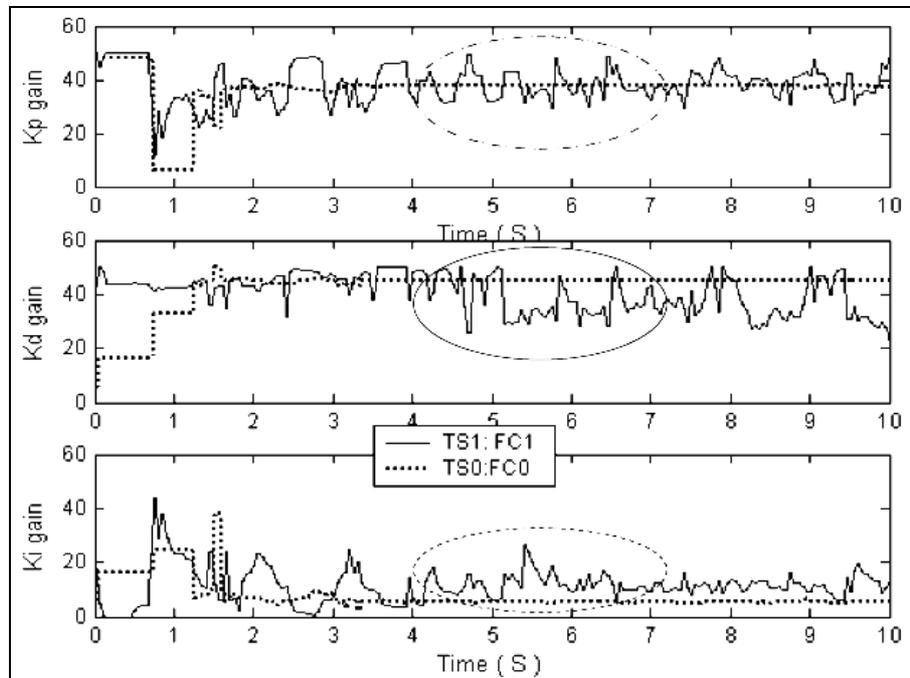
Рассмотрим в первую очередь чувствительность спроектированных БЗ на обучающих ситуациях к изменению условий ситуации управления на основе схем моделирования рис. 9 и 16. В качестве модели ОУ использовалась описанная ниже модель (2). Чувствительность БЗ определяет реакцию ОУ на непредвиденную ситуацию управления. Данные два источника информации совместно являются

физическим ресурсом для извлечения дополнительной скрытой квантовой информации в классических состояниях изменяющихся коэффициентов усиления ПИД-регулятора.

На рис. 17, а показаны законы управления коэффициентами усиления двух нечётких ПИД-регуляторов, спроектированные для следующих ситуаций управления в режиме обучения (off-line) на ОС от ОБЗ: (i) при воздействии Гауссовского шума на ОУ (ситуация обучения TS0); (ii) в условиях влияния Рэлеевского шума на ОУ (ситуация обучения TS1).



(a)



(б)

Рис. 17. Влияние вида шума на законы процессов управления коэффициентами усиления нечётких ПИД-регуляторов:

а – ситуации управления в режиме обучения; б – вид законов управления в непредвиденной ситуации

Законы управления получены на основе блок-схемы моделирования, приведенной на рис. 16. Все характеристики используемых случайных шумов описаны в [1, 7], в данном разделе использованы как заданные исходные данные. Вид используемых шумов показан на рис. 18.

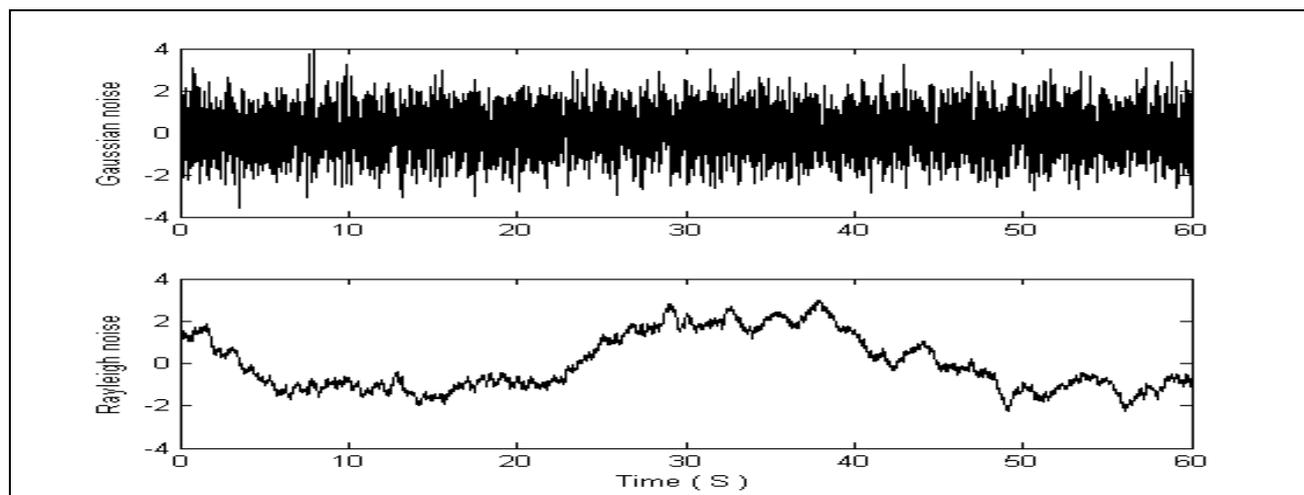


Рис. 18. Вид случайных шумов – Гауссовский шум (вверху) и Рэлеевский шум (внизу) с одинаковыми корреляционными функциями

Шумы имеют одинаковую корреляционную функцию

$$R(\tau) = \sigma^2 \exp\{-\alpha|\tau|\} \left( \cos \omega\tau + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega|\tau| \right),$$

но различаются по функциям распределения вероятностей. Вид и параметры формирующих фильтров приведены в [1, 7].

Влияние вида шума на изменение закона управления коэффициентами усиления для второй ситуации рассмотрено на рис. 17, б (воздействие Гауссовского шума в ситуации управления TS1, когда БЗ для НР была спроектирована на Рэлеевский шум). На рис. 17 (а, б) выделены характерные изменения законов управления коэффициентами усиления для ситуации TS1 при изменении типа случайного шума.

### **Б. Моделирование типов квантовой корреляции и законов управления**

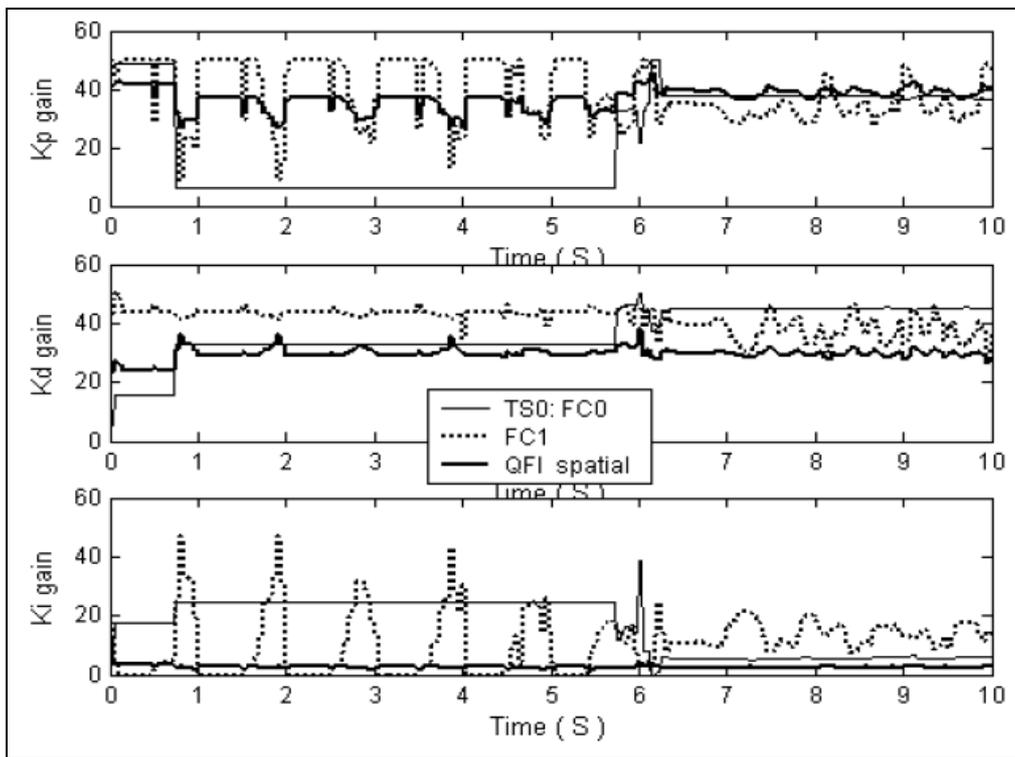
На рис. 19 показаны результаты моделирования законов управления коэффициентами усиления нечёткого ПИД-регулятора на основе программной поддержки и инструментария, представленного на рис. 8 (см. меню выбора типа корреляции), для выбранных трёх типов квантовой корреляции и блок-схемы на рис. 16.

Анализ результатов моделирования на рис. 19, полученных с помощью КНВ, выявляет строгую тенденцию формирования простых (для программно-аппаратной реализации) законов управления коэффициентами усиления нечеткого ПИД-регулятора для всех трех типов квантовой корреляции. Эффективность и выбор окончательного закона управления определяется выбранным критерием оптимальности управления и динамического поведения ОУ (см. ниже пример 17).

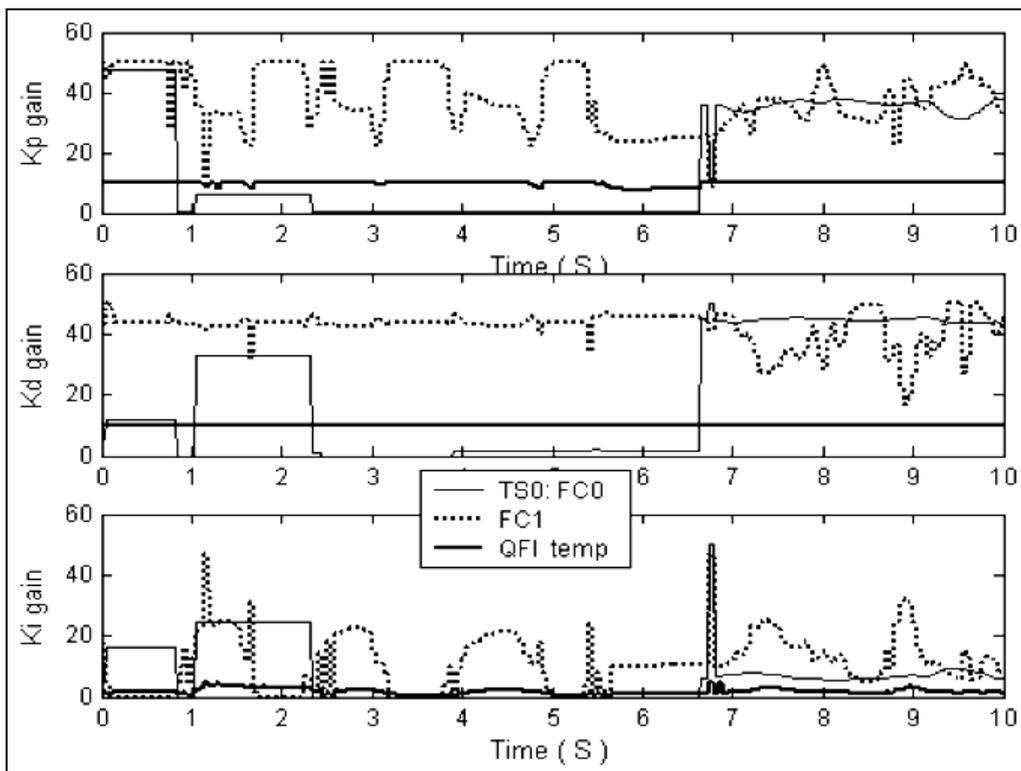
На рис. 20 показан результат сравнения качества управления для трех исследуемых типов квантовой корреляции по критерию минимума ошибки управления.

Квантовая временная корреляция дает лучшее качество управления, и используется в дальнейшем моделировании и исследовании робастного управления в примере 2.

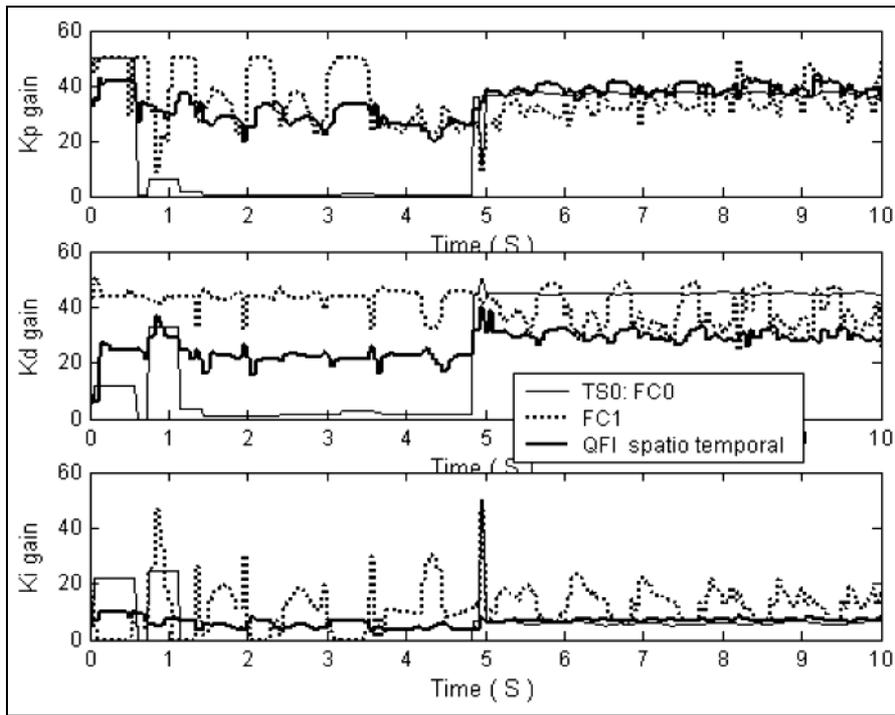
Приведем пример проектирования самоорганизующегося робастного НР, основанного на применении КНВ для нелинейного ОУ в непредвиденных ситуациях управления.



(a)



(b)



(в)

Рис. 19. Влияние типов квантовых корреляций на вид законов управления коэффициентами усиления нечёткого ПИД-регулятора: а – пространственная; б – временная; в – пространственно-временная

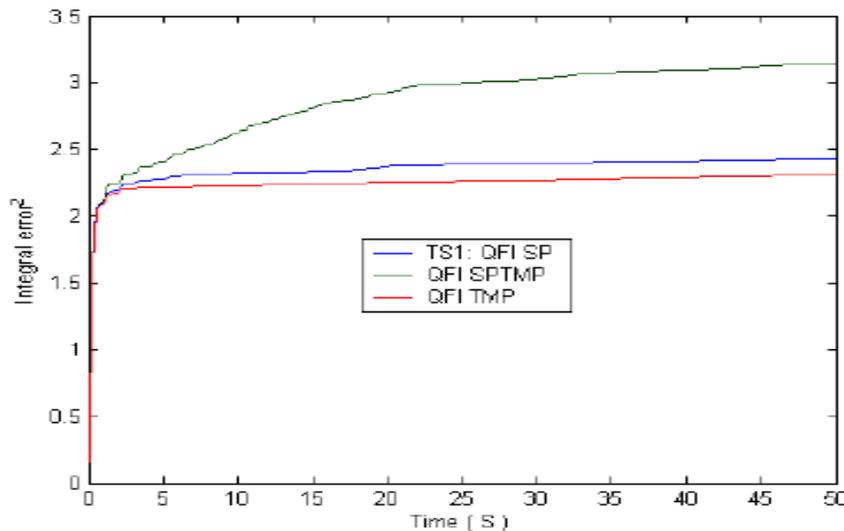


Рис. 20. Сравнение качества управления по критерию минимума ошибки управления для трех типов квантовой корреляции (в ситуациях обучения)

**Пример 2: Робастное интеллектуальное управление нелинейным ОУ (с существенной диссипацией и локальной неустойчивостью)**

Уравнения движения ОУ и формирование управляющей силы рассматриваются совместно с термодинамическими условиями в следующем виде:

$$\ddot{x} + \left[ 2\beta + a\dot{x}^2 + k_1x^2 - 1 \right] \dot{x} + kx = \xi(t) + u(t);$$

$$\frac{dS_x}{dt} = \left[ 2\beta + a\dot{x}^2 + k_1x^2 - 1 \right] \dot{x} \cdot \dot{x}, \tag{2}$$

где  $\xi(t)$  описывает случайные возмущения с заданной функцией плотности распределения вероятностей;  $u(t)$  задает искомую оптимальную управляющую силу;  $S_x$  представляет производство энтропии в ОУ.

Физической (реологической) моделью (2) ОУ является электромеханическая часть подвески движущегося объекта (автомобиля, мотоцикла, железнодорожного вагона и т.п.) с повышенной нелинейной диссипацией для повышения эффекта гашения (компенсации) колебаний, которая описывается обобщённым уравнением типа Дуффинга – Ван дер Поля (Халмоша – Рендэра). При условии  $2\beta + \alpha x^2 + k_1 x^2 \leq 1$ , система обладает локальной неустойчивостью, и скорость производства энтропии отрицательна, т.е.  $\frac{dS_x}{dt} \leq 0$ .

Система (2) проявляет различное динамическое поведение при смене структурных параметров: если  $\beta = 0.5$  (другие параметры, например  $\alpha = 0,3, k_1 = 0,3; k = 5$ ), то система асимптотически устойчива; когда  $\beta = -1$  (прочие параметры, такие же, как выше), система локально неустойчива и обладает автоколебательным режимом. Динамическая система (2) характеризуется на фазовом портрете областью притяжения (странным аттрактором).

На рис. 21 показаны свободные и вынужденные колебания, а также соответствующие фазовые портреты рассматриваемой системы при указанных параметрах.

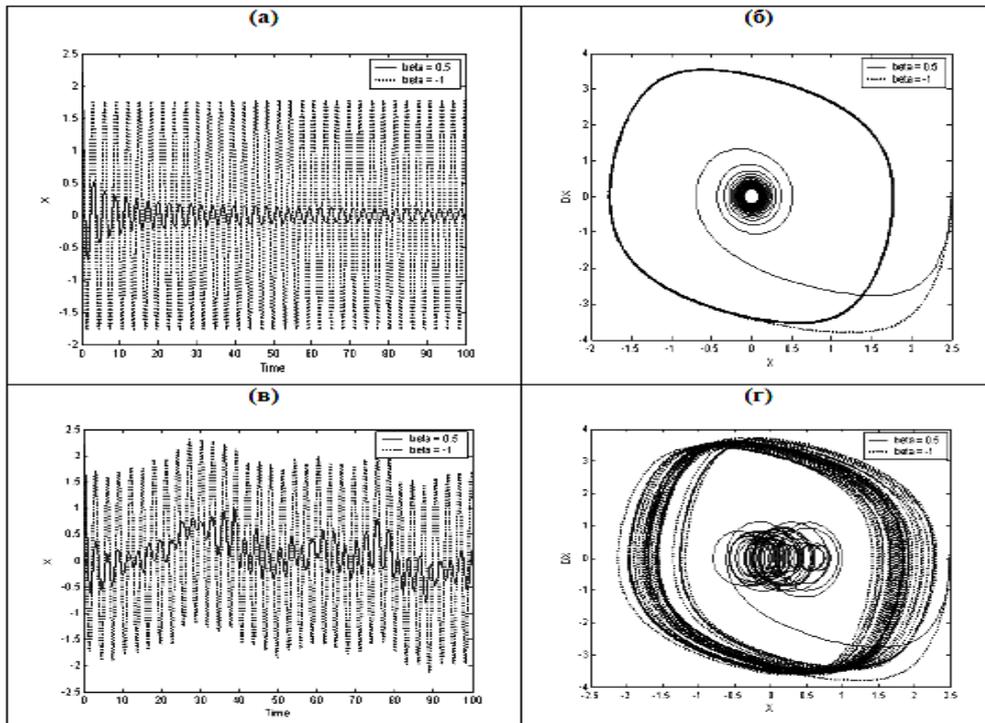


Рис. 21. Динамическое поведение ОУ: (а) – свободные колебания; (б) – фазовый портрет свободных колебаний; (в) – вынужденные колебания; (г) – фазовый портрет вынужденных колебаний

Отметим особенность условий управления ОУ: при малых колебаниях система (2) локально неустойчива, что создаёт трудности в проектировании робастного управления данной системой при задающем сигнале (цели управления) типа  $x = 0$  и наличии малых случайных возмущений.

На рис. 22 (а, б) показаны производство и скорость производства энтропии в динамическом поведении ОУ (режим свободных колебаний) в зависимости от изменения параметра  $\beta$  в (2).

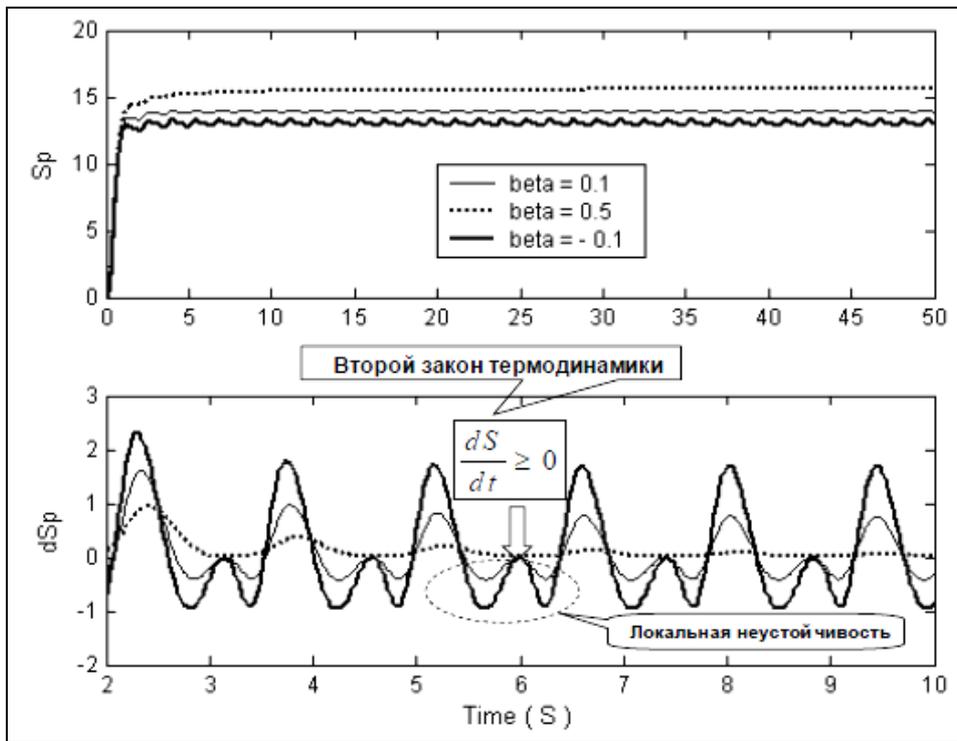


Рис. 22. Термодинамическая интерпретация феномена локальной неустойчивости

**А.** Рассмотрим следующие ситуации обучения.

*Ситуация обучения для проектирования БЗ НР1 – FC1.* В качестве исходных параметров системы (2) примем  $\beta = 0,5$ ;  $\alpha = 0,3$ ,  $k_l = 0,2$ ;  $k = 5$  и начальные условия равными  $x_0$ ;  $\dot{x}_0 = 2,5$ ;  $0,1$ ; задающий сигнал  $x_{ref} = 0$ ; область изменения коэффициентов усиления  $[0, 10]$ ; внешнее возмущение – случайное воздействие с Рэлеевским законом распределения вероятностей. Данную ситуацию управления обозначим **TS1**.

*Ситуация обучения для проектирования БЗ НР2 – FC2.* В качестве исходных параметров системы (2) примем  $\beta = -1$ ;  $\alpha = 0,3$ ,  $k_l = 0,2$ ;  $k = 5$  и начальные условия:  $x_0$ ;  $\dot{x}_0 = 2,5$ ;  $0,1$ ; задающий сигнал  $x_{ref} = -1$ ; область изменения коэффициентов усиления примем  $[0, 10]$ ; внешнее возмущение (как и в TS1) – случайное воздействие с Рэлеевским законом распределения вероятностей. Данную ситуацию управления выделим как **TS2**.

БЗ для данных ситуаций обучения (TS1,TS2) были спроектированы в [1, 7]. Случайный сигнал воздействия на систему (2) с Рэлеевским законом распределения вероятностей моделировался (см. рис. 18) с помощью нелинейного формирующего фильтра, описанного в [7]. Используя инструментарий ОБЗ и ОС, полученный с помощью стохастического моделирования с ГА из [7], для заданных ситуаций обучения были спроектированы БЗ1(КВ1) и БЗ2(КВ2) для НР1(FC1) и НР2(FC2) при воздействии Рэлеевского шума соответственно, которые оптимально аппроксимировали ОС (с точки зрения принятой функции пригодности и заданных ситуаций управления ОУ).

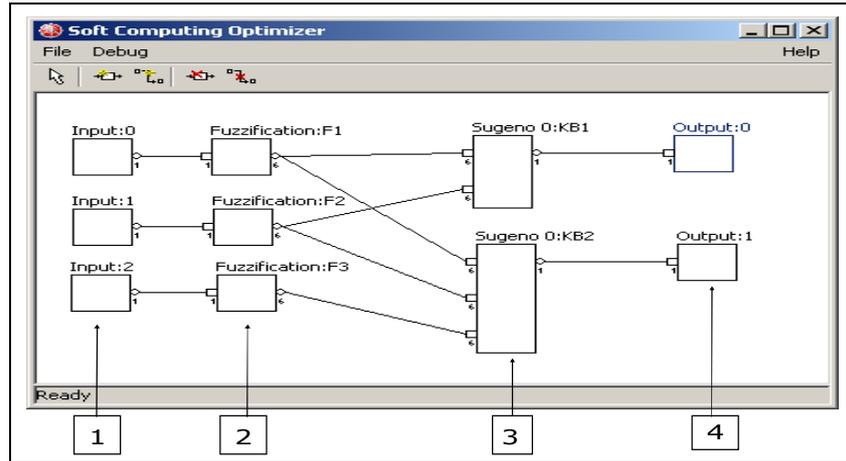
*Особенности проектирования БЗ на основе ОБЗ.* Для более полного восприятия результатов моделирования и проектирования НР отметим некоторые особенности программной поддержки ОБЗ (предварительно описанные в разделе 3) и технические характеристики спроектированных на его основе БЗ для НР, а также приведем сравнение с результатом проектирования на инструментарии ННС типа AFM.

На рис. 23 приведена общая структура моделирования основных блоков НР и структура основных блоков программной поддержки проектирования БЗ.

На рис. 23, в показан пример встроенного в ОБЗ блока нечеткого вывода с использованием модели Сугено. Структурно ОБЗ имеет программный интерфейс сопряжения с МатЛаб, и программно сопряжен с блоком КНВ через встроенный интерфейс (см. рис. 8).

Рассмотрим кратко процесс проектирования ОС оптимального управления как выходного сигнала БЗ в НР. В качестве ситуации обучения примем ситуацию TS1. В этом случае критерий качества управления в виде минимума ошибки управления рассматривается как функция пригодности ГА с пространством поиска коэффициентов усиления (0,5).

Для проектирования БЗ в заданной ситуации управления задаются 1) три входные переменные  $\{e, \dot{e}, \int edt\}$ , описывающие динамическое поведение ошибки управления; и 2) три выходные переменные  $\{k_p, k_d, k_i\}$ , представляющие коэффициенты усиления проектируемого нечеткого ПИД-регулятора.



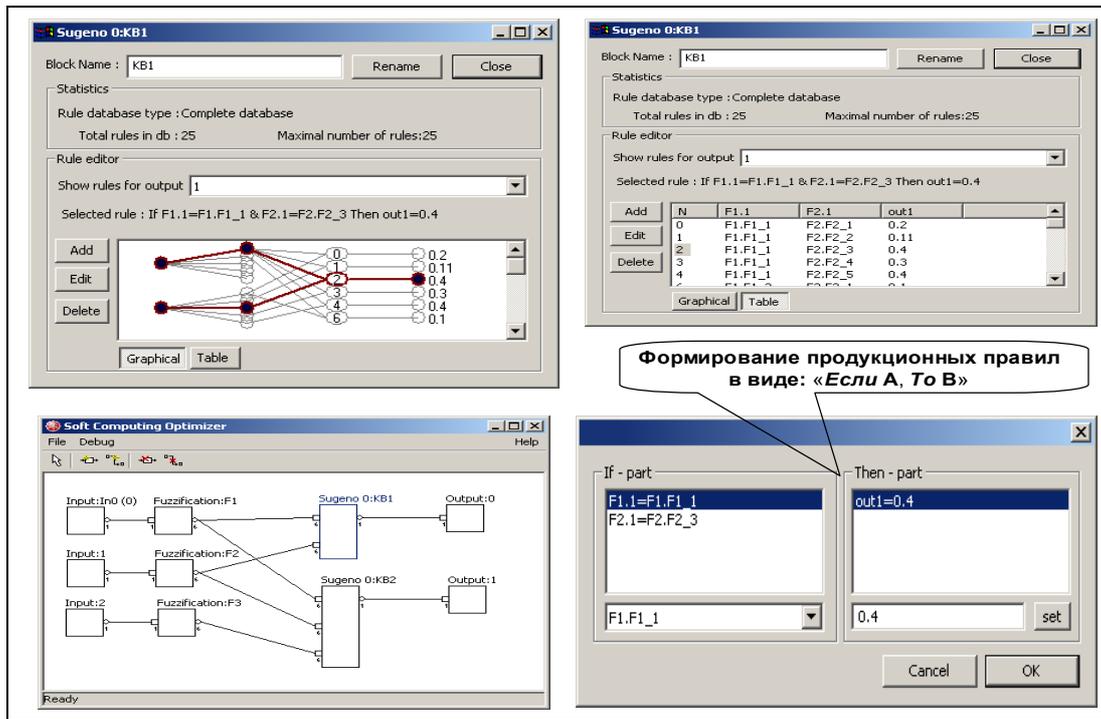
(a)

Name	Distribution	left	right	Modal Value
F1_1	Triangular	0.5	0.1	0.1
F1_2	Triangular	0.38755	0.1	0.1
F1_3	Triangular	0.10241	0.1	0.234538
F1_4	Triangular	0.616466	0.1	0.1
F1_5	Triangular	0.893574	0.23253	0.1

Name	Distribution	left	right	Modal Value
F1_4	Triangular	0.000000	0.000000	0.616466

(б)



(в)

Рис. 23. Структура программной поддержки проектирования БЗ в НР

(а) – структура проектируемого НР; 1- порт входа; 2 – фазификатор; 3 – блок нечеткого вывода и дефазификатора; 4 – порт выхода; (б) – фазификатор; (в) – блок нечеткого вывода

В ОБЗ процесс проектирования БЗ дал следующие характеристики: 1) количество функций принадлежности для каждой выходной лингвистической переменной (7, 9, 9) (оптимально определяемые ГА1), соответственно; 2) полное количество продукционных нечетких правил  $7 \times 9 \times 9 = 567$ ; 3) оптимальное число выбранных для БЗ продукционных правил по критерию частоты запроса из БЗ составило 20; (3) оптимальное число продукционных правил, отобранных ГА2 составило 20.

На рис. 24 представлен оптимальный вид функций принадлежности для третьей выходной переменной  $k_j$  (коэффициент усиления интегральной ошибки).

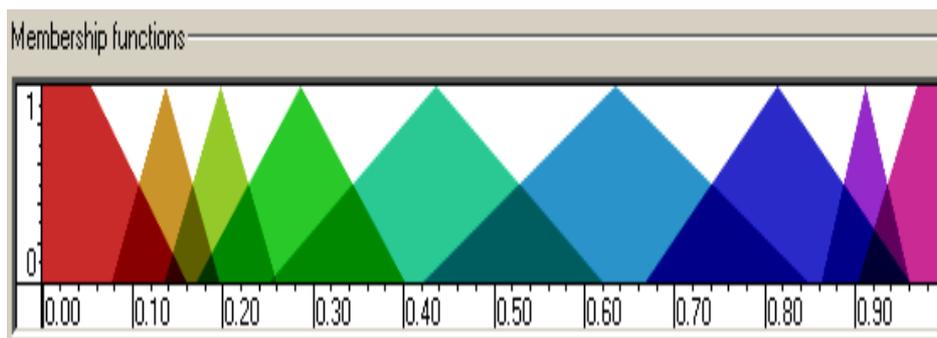


Рис. 24. Оптимальный вид функций принадлежности для описания третьей выходной лингвистической переменной

Для сравнения приведем на рис. 25 результаты работы с ННС типа AFM.

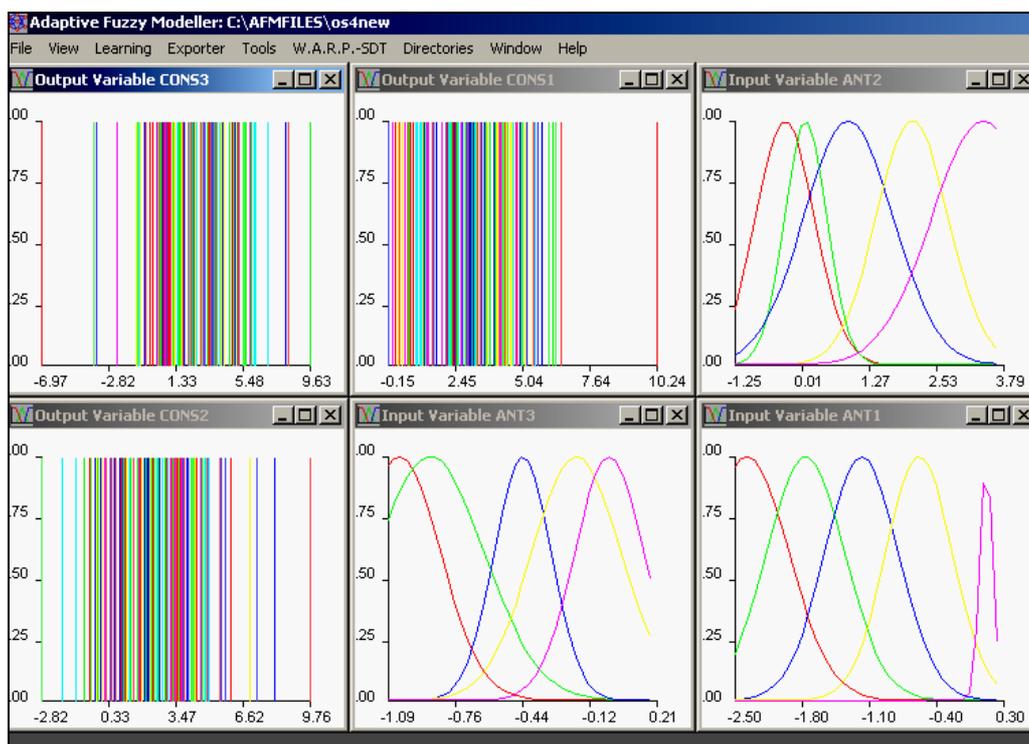


Рис. 25. Пример выбора функций принадлежности в ННС

Число заданных вручную функций принадлежности составило 5 по каждой лингвистической переменной; полное число продукционных нечетких правил составило 125 и число активированных правил также составило 125.

В АФМ число и вид функций принадлежности определяются экспертом, в то время как в ОБЗ все операции проектирования автоматизированы оптимальным образом на основе ГА.

Анализ результатов показал, что структура БЗ с указанными параметрами, спроектированная на основе ОБЗ, обеспечивает более высокий уровень робастности НР по сравнению с ННС (125 правил) и ПИД-регулятором с постоянными параметрами (5, 5, 5).

**Б.** Сформулируем следующие задачи управления:

1) перевести ОУ из начального состояния  $x_0$ ;  $\dot{x}_0 = 2,5; 0,1$  в конечное заданное состояние (представляющее задающий сигнал (ЗС)) при внешних шумах, действующих на ОУ, при наличии изменений параметров модели ОУ и целей управления (ЗС);

2) провести оценки чувствительности и уровня робастности спроектированных НР(1, 2), сравнить с традиционным ПИД-регулятором и самоорганизующимся регулятором с БД, полученной на основе применения КНВ в непредвиденной ситуации управления.

На рис. 26 показаны результаты моделирования процессов управления в указанных условиях для ситуации TS2.

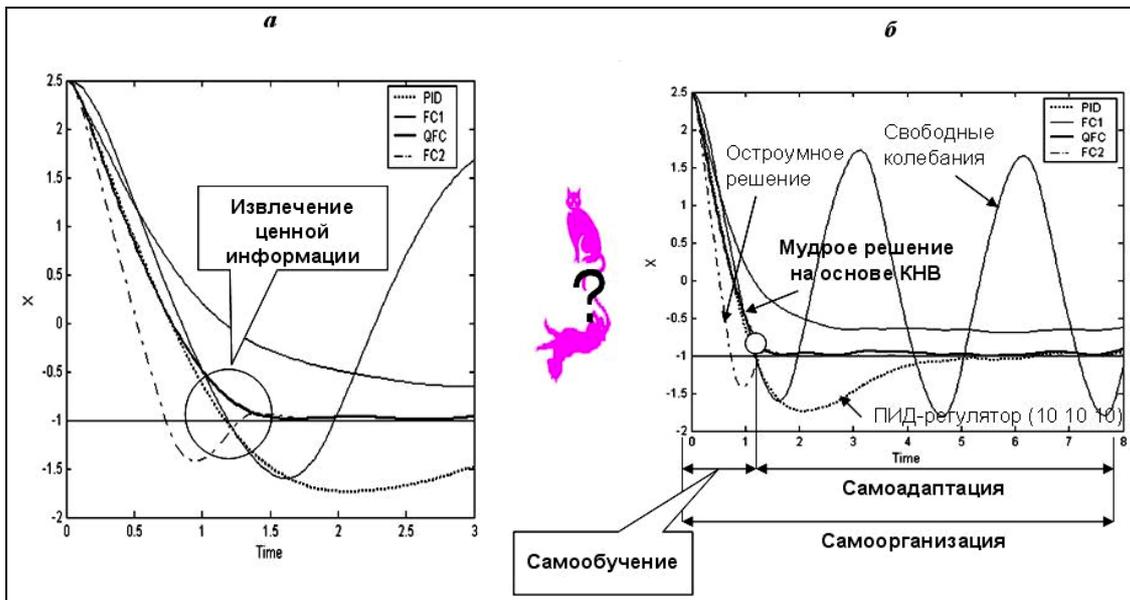


Рис. 26. Результаты моделирования робастного управления нелинейным ОУ самоорганизующимся НР в непредвиденной ситуации управления: а – формирование процесса самообучения интеллектуального НР; б – формирование процесса самоадаптации интеллектуального НР

В этом случае для НР1 данная ситуация управления является непредвиденной (существенно изменился параметр структуры ОУ и цель управления). Анализ результатов моделирования дан ниже.

На рис. 27, а приведен используемый для моделирования Рэлеевский шум и на рис. 27, б – полученные с помощью КНВ законы управления коэффициентами усиления при использовании реакции двух БЗ НР (1, 2) на непредвиденную ситуацию управления.

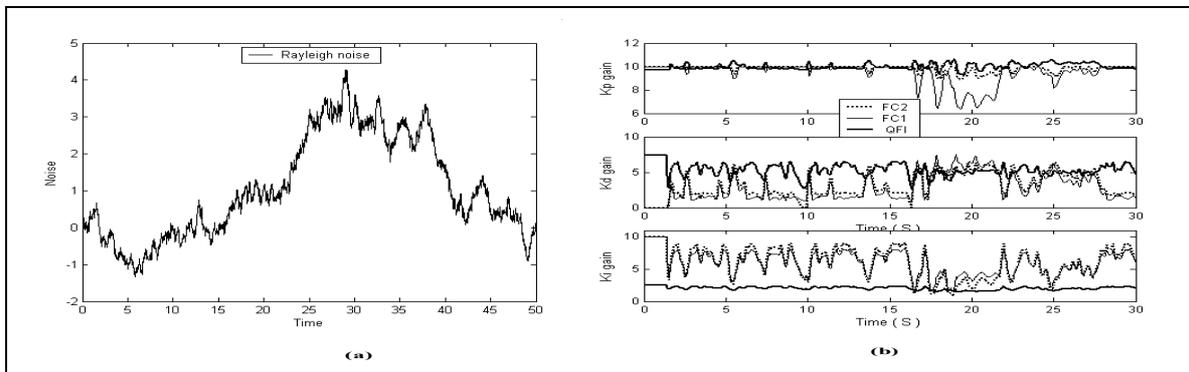


Рис. 27. Виды случайного процесса с рэлеевской функцией распределения вероятностей (а) и законов управления коэффициентами усиления нечёткого ПИД-регулятора (б)

**В.** Анализ результатов моделирования и физическая интерпретация процесса самоорганизации в НР. Рисунок 26, а отражает основные преимущества и работу принципа самоорганизации. На этапе переходного процесса самоорганизующийся НР качественно следует по траектории традиционного ПИД-регулятора, но с уменьшенным интегральным коэффициентом усиления (см. рис. 27, б). За счет снижения указанных коэффициентов усиления понижается расход ресурса в виде полезной работы ПИД-регулятора (значение произведенной энтропии). На данном этапе используется движение самого ОУ (на этапе переходного процесса до достижения ОУ цели управления коэффициенты усиления самоорганизующегося ПИД-регулятора имеют постоянные значения).

На рис. 28 приведены значения обобщённых энтропий системы «ОУ+НР», вычисленные в соответствии с (2).

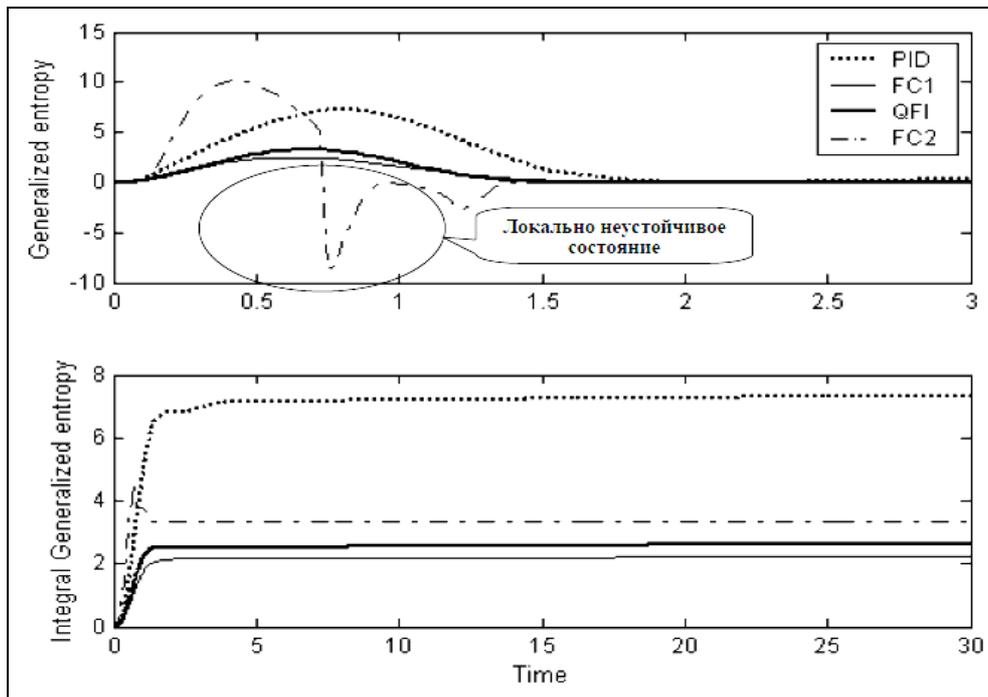


Рис. 28. Динамическое поведение обобщённых энтропий (ОУ+НР):  
 (а) – временная обобщённая энтропия; (б) – накопленное значение обобщённой энтропии

Согласно [1, 6, 7], в этом случае корректно устанавливаются необходимые соотношения между качественными и количественными определениями устойчивости по Ляпунову, управляемости и робастности процессов управления заданным ОУ. До достижения цели управления (ЗС управления, равного в данном случае  $-1$ ) реализуется процесс самообучения НР и извлечение ценной информации из результатов реакций двух НР на непредвиденную ситуацию управления в реальном времени с помощью квантовой корреляции.

Поскольку в квантовую корреляцию входит информация о текущих значениях соответствующих коэффициентов усиления, то самоорганизующийся НР использует, в результате, для достижения цели управления преимущество быстрогодействия НР2 и аperiодический характер динамического поведения НР1. Как следствие, обеспечивается повышенное качество управления.

Напомним, что для рассматриваемого случая НР2 был обучен на ситуацию управления TS2, а для НР1 ситуация TS2 является непредвиденной (существенно изменился параметр структуры ОУ и цель управления). Поэтому за счет квантовой корреляции осуществляется координация между соответствующими законами управления. За счет данного эффекта самообучающийся НР извлек ценную информацию о перерегулировании НР2 и реакции НР1 на непредвиденную ситуацию управления, использовал в законах управления коэффициентами усиления данные о быстрогодействии (рис. 26, а) НР2 и перешел на режим самоадаптации, сохранив преимущество аperiодического процесса НР1 (достижение цели управления без перерегулирования). Подчеркнем, что сам НР1 в данной ситуации цели управления не достигает (рис. 21), а НР2 имеет перерегулирование и локально неустойчиво (рис. 28).

### Пример 3: Робастное управление в непредвиденной ситуации управления

В примере 2 была рассмотрена оценка робастности ИСУ на обучающих ситуациях, когда одна из ситуаций TS2 была непредвиденной для первого НР (существенно изменились параметр  $\beta$  в структуре ОУ) и цель управления), обученного на ситуацию TS1. Несмотря на парадоксальный факт, что сам НР1 в данной ситуации цели управления не достигает (см. рис. 21), а использование НР2 приводит к перерегулированию и локально неустойчивому движению ОУ (см. рис. 23), самоорганизующийся НР с использованием КНВ успешно справился с задачей управления.

Ставится вопрос: сохраняется ли данный эффект применения КНВ в более сложных (чем на ситуациях обучения) непредвиденных ситуациях управления?

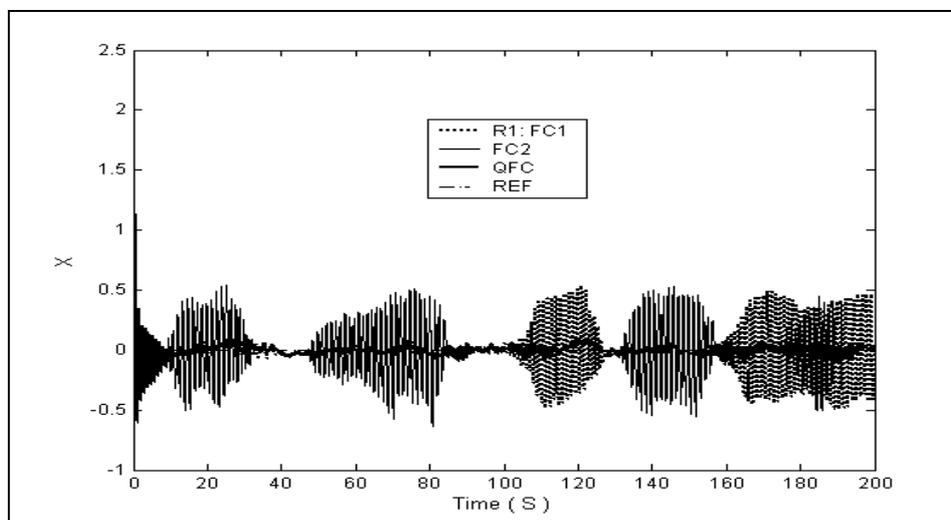
Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим более сложную непредвиденную (одновременно для НР1 и НР2) ситуацию управления.

Для создания новой непредвиденной ситуации управления в блок-схему на рис. 16 введем новые формирующие параметры. Так, для новой ситуации управления были заданы: 1) задающий сигнал (цель) управления  $x_{ref} = 0$ ; 2) Рэлеевский внешний шум (см. рис. 27, а); 3) новый параметр  $\beta = -0,1$  в модели ОУ; 4) ограничение на силу управления  $u \leq |10| [N]$ ; 5) в систему измерения введен Гауссовский случайный шум (см. рис. 18) с коэффициентом усиления равным 0,02; 6) введена временная задержка сигнала ошибки управления, равная 0,0125 сек. Остальные параметры ОУ остались неизменными.

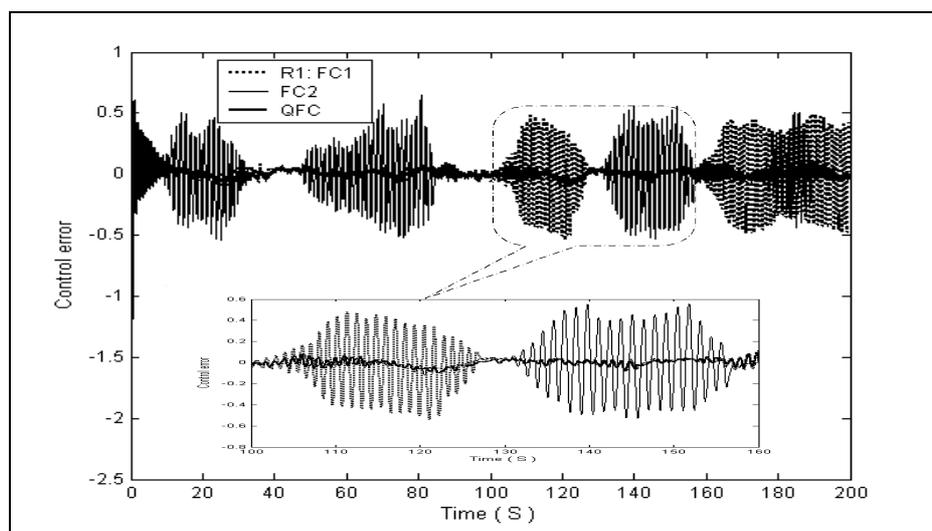
Таким образом, непредвиденная ситуация управления содержит шумы в системе измерения, задержку информации для НР1 и НР2 о текущем значении ошибки управления и скачкообразное изменение параметра в структуре ОУ.

Рассмотрим результаты моделирования для оценки робастности рассматриваемых НР.

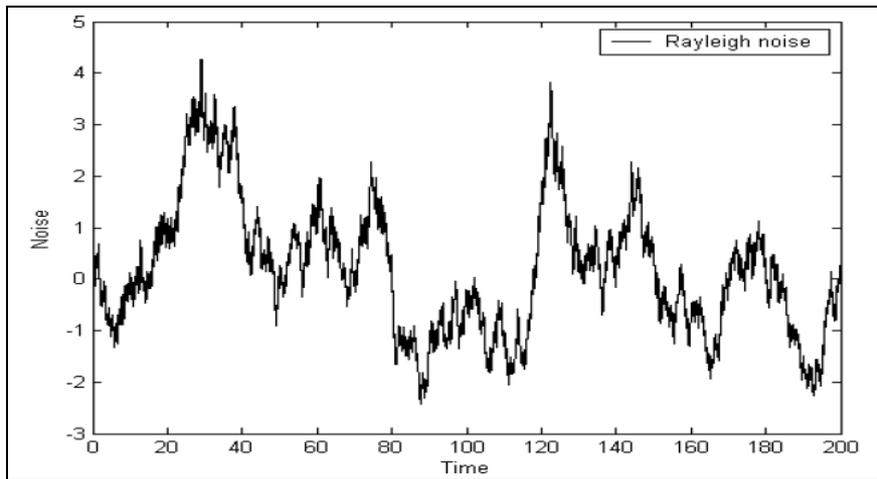
На рис. 29 показан результат моделирования динамического поведения ошибки управления, а на рис. 30 приведен результат моделирования интегральной квадратичной ошибки управления.



(a)



(б)



(в)

Рис. 29. Оценка робастности в новой ситуации управления:  
 (а) – движение системы; (б) – ошибка управления; (в) – Рэлеевский шум

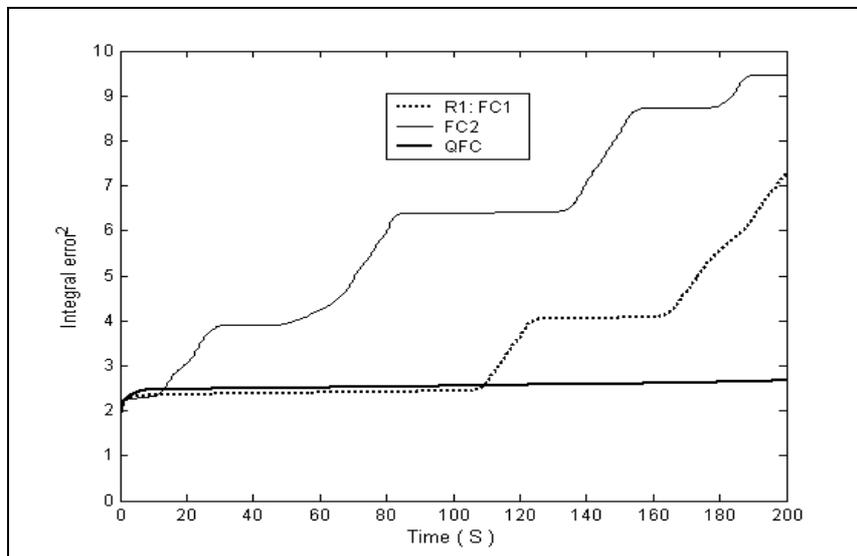


Рис. 30. Оценка робастности в новой ситуации управления: интегральная квадратичная ошибка управления

Полученные законы управления изменением коэффициентов усиления и силы управления при заданных физических ограничениях приведены на рис. 31 и 32, соответственно.

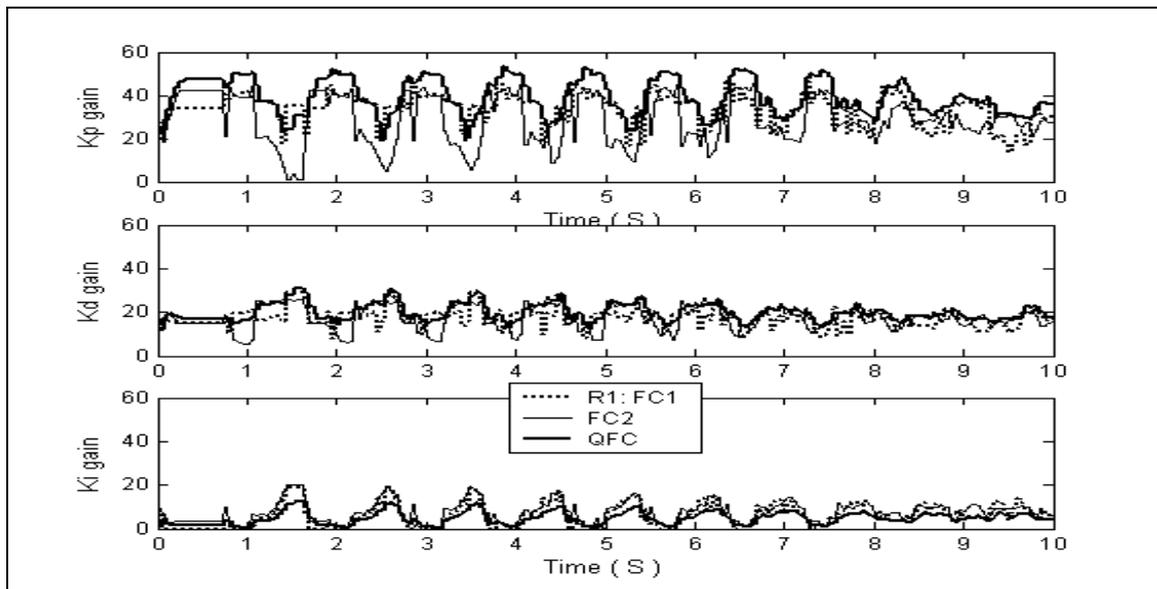


Рис. 31. Оценка робастности в новой ситуации управления: самоорганизация законов управления коэффициентами усиления квантового нечеткого ПИД-регулятора

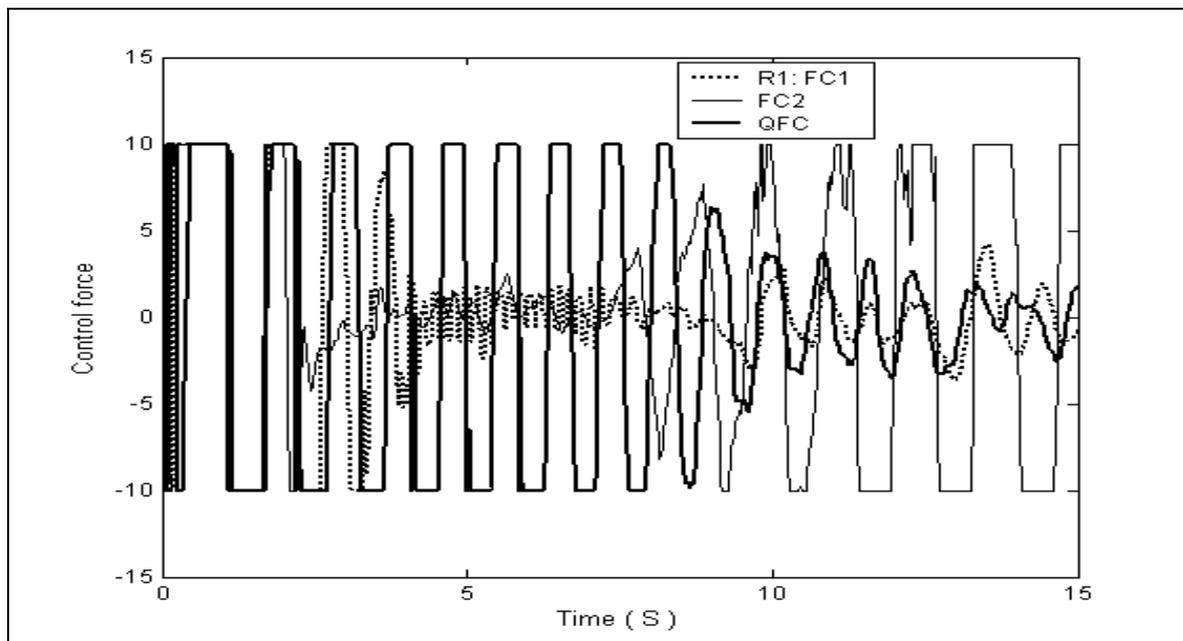


Рис. 32. Оценка робастности в новой ситуации управления: сила управления

Рис. 33 отражает потери ресурса ИСУ в виде возрастания интегральной обобщенной энтропии в системе «ОУ + нечеткий ПИД-регулятор».

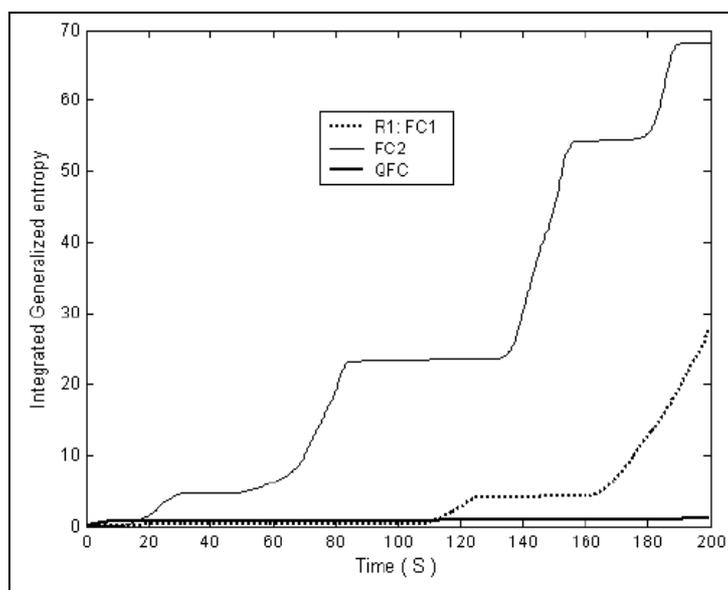


Рис. 33. Оценка робастности в новой ситуации управления: интегральная обобщенная энтропия

Анализ приведенных результатов показывает, что оба НР1 и НР2 не справляются с поставленной задачей управления и имеют большой расход ресурса. С помощью КНВ самоорганизующийся НР извлек из динамического поведения ОУ, НР1 и НР2 ценную скрытую квантовую информацию и достиг цели управления с наименьшими потерями ресурса.

Таким образом, в сложной непредвиденной ситуации управления сохраняется эффект применения модели КНВ, что и является ответом на поставленный вопрос.

Подчеркнем, что примеры 2 и 3 служат только иллюстрацией возможностей применения разработанной модели КНВ в задачах проектирования ИСУ с повышенным уровнем робастности в непредвиденных ситуациях управления. Более подробный анализ эффективного применения модели КНВ требует самостоятельного обсуждения и здесь не рассматриваются. Отметим только первоочередные задачи исследования эффективного применения разработанной модели КНВ: ОУ с глобальной динамической неустойчивостью, с различными типами неустойчивости по обобщенным координатам (с локальной и глобальной неустойчивостью), различным сочетанием внутренних и внешних шумов, изменением параметров структуры ОУ, оценка потерь ресурса, сложность обработки и физической реализации законов управления, а также многие другие смежные вопросы.

Результаты моделирования показали преимущество квантовых стратегий управления на основе КНВ, позволяющих спроектировать универсальный робастный НР из двух не робастных НР (1, 2) с простыми законами управления коэффициентами усиления ПИД-регулятора.

Таким образом, процесс самоорганизации может быть условно разделен на взаимодополняющие процессы самообучения и самоадаптации, повышающие уровень робастности интеллектуальных процессов управления в режиме реального времени.

*Примечание 4.* С точки зрения квантовой теории игр данный эффект является демонстрацией «Паррondo парадокса»: в игровой ситуации (в непредвиденной ситуации управления) между двумя классическими НР (1, 2) (игроки **A** и **B** соответственно), которые не являются победителями при использовании классических стратегий в различных ситуациях управления, с помощью квантовой стратегии принятия решений на основе КНВ можно спроектировать из них победителя в виде нового самоорганизующегося НР. Подобный эффект описан также в [4, 58, 59].

Рассмотренный пример иллюстрирует эффективность методологии применения квантовых вычислений для решения алгоритмически неразрешимых классических задач в теории и практике интеллектуального нечеткого управления, разработанной в [60 – 64].

## Заключение

В статье изложены основные идеи квантовых вычислений и квантовой теории информации применительно к разработке стратегии и методов проектирования робастной БЗ на основе КНВ. Реализация КНВ эффективно осуществляется на персональном компьютере стандартной конфигурации. Показана необходимость применения нового вида интеллектуальных вычислений (квантовых мягких вычислений) для эффективного решения алгоритмически неразрешимых классических проблем управления таких, как робастность управления. Дано описание программной поддержки процессов проектирования робастных БЗ для ИСУ на основе КНВ.

Робастность интеллектуальных НР демонстрируется на примере самоорганизующейся ИСУ локально неустойчивым и существенно нелинейным динамическим ОУ. На основе результатов моделирования законов управления коэффициентами усиления нечетких ПИД-регуляторов, полученных с помощью КНВ-модели, может быть сформулирован новый принцип проектирования робастных структур ИСУ: *проектирование простого по структуре и в практической реализации НР с повышенным уровнем интеллектуальности (wise controller [3 – 5]) для эффективного управления сложными ОУ.*

Приведенные примеры показали, что интеллектуальное управление позволяет в непредвиденных ситуациях управления гарантированно достигать цели управления с минимальным расходом ресурсов, что по своей сути отражает на содержательном уровне само определение целенаправленной деятельности ИСУ.

Таким образом, показана эффективность и необходимость применения квантовых вычислений и алгоритмов управления не только для квантовых систем (предложение Фейнмана), но и классических ОУ, что находится в соответствии с результатами [23, 53, 58 – 64].

## Приложение:

### Квантовые вычисления (примеры и свойства основных операторов)

В качестве примера рассмотрим традиционный математический формализм описания моделей основных квантовых операторов с точки зрения второй квантовой проблемы описания КА. Данный формализм может быть выражен на языке квантовых состояний или преобразований, но мы интересуемся также возможностью адекватного описания квантовых состояний и эффектов на языке логического вывода: применение традиционного формализма, его мощности и выразительности как *квантовой системы нечёткого логического вывода* [10, 11].

#### Пример П1: Квантовый бит как квантовое состояние

Классический бит может находиться в одном из двух состояний: 0 или 1. Таким образом, его физическое состояние можно представить как  $b = a_1 0 + a_2 1$ , которое имеет одну из форм: или  $a_1 = 1$  и  $a_2 = 0$ , тогда  $b = 0$ , или  $a_1 = 0$  и  $a_2 = 1$ , и тогда  $b = 1$ . Состояние квантового бита  $|\psi\rangle$  задается вектором в двумерном комплексном векторном пространстве. Здесь вектор имеет две компоненты, и его проекции на базисы векторного пространства являются комплексными числами. Квантовый бит  $\psi$  представляется (в обозначениях Дирака в виде *кет*-вектора) как  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  или в векторном обозначении  $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ ,  $\langle\psi| = [\alpha \ \beta]^T$  (*бра*-вектор). Если  $|\psi\rangle = |0\rangle$ , то  $|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Амплитуды  $\alpha$  и  $\beta$  – комплексные числа, для которых выполнено следующее условие:  $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1$ , где «\*» – операция комплексного сопряжения;  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  образует пару ортонормальных базисных векторов, называемых *состоянием вычислительного базиса*. Если  $\alpha$  или  $\beta$  принимают нулевые значения, то  $\psi$  определяет классическое, чистое состояние. В противном случае говорят, что  $\psi$  находится в состоянии суперпозиции двух *классических* базисных состояний.

Геометрически квантовый бит находится в непрерывном состоянии между  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , пока не производятся измерения его состояния. Понятие амплитуды вероятностей квантового состояния является комбинацией концепции состояния и фазы. В случае, когда система состоит из двух квантовых битов, она описывается как тензорное произведение. Например, в обозначениях Дирака двухуровневая бит-система задается, как

$$|\psi_1\psi_2\rangle = \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle.$$

Число возможных состояний комбинированной системы возрастает экспоненциально при добавлении квантового бита. Это приводит к проблеме оценки квантовой корреляции, которая присутствует между квантовыми битами в составной системе (см. пример П4).

В квантовой механике квантовое состояние  $|\psi\rangle$  выражается оператором плотности состояния  $\rho$ . Матрица плотности  $\rho$  квантовой системы имеет следующие свойства:  $\rho^\dagger = \rho$  (эрмитова матрица);  $\rho > 0$  (положительная матрица);  $Tr\rho = 1$  (нормированная матрица). Если состояние квантовой системы известно точно, то система описывается оператором плотности в матричном виде  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  и находится в *чистом* состоянии. В противном случае система пребывает в *смешанном* состоянии. В этом случае имеем смесь из различных чистых состояний, описываемую оператором плотности  $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$  в ансамбле  $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ . Матрицы, удовлетворяющие перечисленным условиям, образуют выпуклое множество. Поэтому они могут быть записаны в виде  $\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ , где  $|\psi_k\rangle$  – единичные векторы Гильбертова пространства и  $p_k > 0$ ,  $\sum_k p_k = 1$ . Коэффициент  $p_k$  для заданного  $k$  может интерпретироваться как вероятность нахождения квантовой системы в чистом состоянии  $|\psi_k\rangle$ . Однако данная физическая интерпретация зависит от представления  $\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ , которое не является однозначным: разные состояния могут иметь одинаковую матрицу плотности. В частности, векторы могут быть выбраны ортонормальными и интерпретированы как собственные векторы матрицы плотности  $\rho$  с собственными значениями  $p_k$ , а форма  $\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$  называется спектральным представлением  $\rho$ . Чистые состояния представляют собой одномерные проекторы  $|\psi\rangle\langle\psi|$  и являются экстремальными точками выпуклого множества матриц плотности.

Таким образом, на основе матриц плотности чистых состояний воспроизводятся все остальные матрицы плотности, соответствующие смешанным состояниям как выпуклая комбинация в виде:

$$\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|,$$

но сами они не допускают описания в виде нетривиальной выпуклой комбинации других матриц. Существует простой критерий определения типа состояния квантовой системы: если след матрицы плотности  $Tr(\rho^2) = 1$ , то квантовая система находится в чистом состоянии; если  $Tr(\rho^2) < 1$ , имеет место смешанное состояние. Определение и вычисление следа оператора плотности дано ниже.

С точки зрения теории информации в квантовом бите содержится точно такое же количество информации, как и в классическом бите, несмотря на бесконечное множество виртуальных состояний квантового бита. Квантовый бит может быть описан бесконечным числом суперпозиций классических состояний, но из-за необратимого характера процесса измерения можно извлечь только простой классический бит информации из одного среди возможных состояний. При этом остальные виртуальные состояния разрушаются, и происходит потеря информации. Основанием для данного утверждения (в квантовом бите содержится не больше количества информации, чем в классическом бите) является тот факт, что информация извлекается в результате физического процесса измерений. За

счёт измерения квантового бита происходит изменение его состояния и в результате он переходит в одно из возможных базисных состояний. Каждый квантовый бит существует в двухмерном пространстве, его измерение ассоциируется с соответствующим базисом и выражает результат только в одном из двух состояний, т.е. один из базисных векторов ассоциирован с данным измерительным прибором.

Таким образом, как и в классическом случае, при измерении квантового бита существует только два возможных результата. Поскольку измерение изменяет состояние квантового бита, то невозможно осуществить одновременно регистрацию состояния в двух различных базисах. При моделировании классической динамической системы, её состояние можно измерить на первом этапе в одном базисе, затем – на втором этапе в другом базисе. В истинно квантовой системе подобное невозможно, так как при измерении происходит разрушение волновой функции, описывающей состояние квантового бита. Более того, квантовые состояния в истинно квантовой системе невозможно клонировать, т.е. существуют объективные физические ограничения, в силу которых не удаётся проводить измерение двумя разными путями, используя, например, копирование квантового бита и его регистрацию в различных базисах [12]. В отличие от квантового бита состояние классического бита можно копировать и осуществлять измерение в различных вычислительных базисах. Более того, неизвестный квантовый бит нельзя «расщепить» на взаимно дополняющие части [13], т.е. содержащаяся в неизвестном состоянии квантового бита информация неразделима.

Следовательно, в квантовой механике допустимы операции, невозможные в классической механике. И, наоборот, в классической механике существуют операторы решения задач, недопустимые в квантовой механике.

### **Примечание П1. Вычислительный базис $\{|+\rangle, |-\rangle\}$**

Для описания и измерения квантового бита ранее использовался вычислительный базис  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ . Однако такой выбор вычислительного базиса не является единственным. Возможно использование различных множеств векторов в качестве ортонормальных базисов. Например, базисные векторы допустимо представлять в виде состояний  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ , определяемых как  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right\}$ , соответственно. Используя данное представление базисных векторов, можно перейти к традиционному базису:

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \text{ и } |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle).$$

### **Пример П2: Формирование состояния суперпозиции с помощью оператора Адамара (Уолша-Адамара)**

Существование состояния суперпозиции и эффекта измерения квантового состояния (см. пример П6) физически означает, что присутствует *скрытая от наблюдателя информация*, которая содержится в замкнутой квантовой системе (до момента ее возбуждения от внешнего возмущения) в виде наблюдения квантового состояния. Система остается замкнутой до взаимодействия с внешней средой (т.е. до действия наблюдения системы). Важнейшим в этом случае является следующий вопрос: как эффективно использовать скрытую в суперпозиции информацию? В традиционном формализме квантовых вычислений квантовые операторы описываются в эквивалентной матричной форме. Умножение матрицы оператора на вектор состояния означает действие операции на исследуемую систему.

Например, действие матрицы Адамара ( $H$ ) на систему  $|\psi\rangle = |0\rangle$  может быть представлено как

$$H|\psi\rangle = H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle).$$

Аналогично,

$$H|\psi\rangle = H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle),$$

т.е. преобразование Адамара порождает состояние квантового бита в виде суперпозиции двух классических состояний. Формирование суперпозиции с эквивалентными амплитудами вероятностей – важный шаг для многих КА.

Применяя  $H^{\otimes n}$  на соответствующих базисных состояниях  $|x\rangle \in \mathbb{H}_n$ ,  $x \in \{0,1\}^n$ , получим в результате эквивалентную форму преобразования Адамара  $H|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{z=0,1} (-1)^{x \cdot z} |z\rangle$ , где  $x \cdot z = x_1 z_1 + \dots + x_n z_n$  для  $x = 0$  и  $x = 1$ . Таким образом, суперпозицию с эквивалентными амплитудами вероятностей  $\frac{1}{\sqrt{2^n}}$  для каждого базисного состояния получают применением оператора  $H^{\otimes n}$  к состоянию  $|0\rangle$ . Значение состояния суперпозиции для теории вычислительных процессов становится более понятным, если интерпретировать результирующее суперпозиционное состояние как набор  $2^n$  классических траекторий (путей) вычислений с эквивалентными весами, по которым квантовый компьютер физически проводит вычисления параллельно. В этом смысле суперпозиция выступает как первый этап на пути организации *квантового параллелизма*.

### **Пример П3: Квантовый параллелизм и модели вычислений с квантовым оракулом**

Рассматриваемый эффект является одним из важнейших в квантовых вычислениях и используется (так же как и суперпозиция) во многих моделях КА. Он особенно широко применяется в различных моделях «чёрного ящика» или «квантового оракула» при проектировании разного класса КА [8 – 10, 14 – 19], например, для вычислений функций следующего вида:  $g : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^m$ . Поскольку отображение  $x \rightarrow (x, g(x))$ ,  $x \in \{0,1\}^n$  обратимо, то существует унитарное преобразование  $U_g$ , эффективно моделируемое классическими вычислениями  $(x, g(x))$  так, что  $|x, y\rangle \rightarrow |x, y \oplus g(x)\rangle$  для некоторого  $y \in \{0,1\}^m$ . При этом дополнительные квантовые биты, необходимые для реализации обратимых схемных преобразований, здесь не рассматриваются. Преобразование  $U_f$ , описывающее «чёрный ящик» (как частный случай  $U_g$ ), представляет унитарное преобразование в виде Булевой функции  $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^m$ . Если  $|y\rangle$  – начальное состояние  $|0\rangle$ , то после применения преобразования  $U_f$  выход преобразования  $f(x)$  будет  $|x, f(x)\rangle$ . Физический смысл квантового параллелизма заключается в наличии эффекта параллелизма вычислений после использования преобразования  $U_f$  для суперпозиционного состояния, представляющего различные значения  $x$ . Так применяя  $U_f$  к состоянию

$$|x, y\rangle = |\psi, 0\rangle, \quad |\psi\rangle = H^{\otimes n} |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{z \in \{0,1\}^n} |z\rangle,$$

имеем в результате  $U_f |\psi, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{z \in \{0,1\}^n} |z, f(z)\rangle$ , т.е. суперпозицию всех возможных значений вычисляемой функции. Таким образом, применение только одного шага для оценки значений функции  $f(x)$  является достаточным для вычисления параллельно значений  $f(x)$  от всех возможных входных аргументов  $x$ . Данный эффект эквивалентен применению свойств «чёрного ящика» (одноразовое применение внутренней квантовой схемы).

Однако в действительности только одно значение функции  $f(x)$  доступно при измерении результата вычисления  $f(x)$  в суперпозиции возможных состояний, так как из-за эффекта разрушения состояний в суперпозиции доступно только одно случайно измеренное состояние. Обсуждение выбора модели квантового оракула для КНВ и его обоснование дано ниже.

**Примечание П2. О вычислении значений функции с помощью фазы**

Применение оператора  $U_f$  к управляемому квантовому биту в состоянии суперпозиции  $|\varphi\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$  даёт следующий результат:

$$U_f|x, \varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x, f(x)\rangle - |x, 1 \oplus f(x)\rangle) = (-1)^{f(x)}|x\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = (-1)^{f(x)}|x, \varphi\rangle.$$

Опуская  $|\varphi\rangle$ , можно определить новое преобразование типа  $V_f : |x\rangle \rightarrow (-1)^{f(x)}|x\rangle$ . Следовательно,  $V_f$  позволяет вычислить значения функции  $f(x)$  через фазу. Другими словами, вычисление возможно через преобразование значений  $f$  из базовых состояний в амплитуды относительно данных базовых состояний. Теперь, применяя  $V_f$  к вектору  $|\psi\rangle$ , получим следующее состояние:

$$|\psi'\rangle = V_f|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{z \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(x)}|z\rangle.$$

Это соответствует применению к управляемому квантовому биту операции

$$\left[ U_f H^{\otimes(n+1)} (|0\rangle^{\otimes n} |1\rangle) \right].$$

**Пример П4: Моделирование квантовой корреляции (запутанных состояний – entanglement) с помощью CNOT-подобных операторов**

Корректная оценка вычислительной мощности квантовых вычислений возможна только с помощью установления корреляций между значениями переменных в КА в различные моменты времени. В качестве примера рассмотрим систему из двух квантовых битов  $A$  и  $B$ . В соответствии с законом тензорного произведения векторных пространств размерность пространства  $H_{AB}$  составной системы  $AB$  определяется как произведение размерностей пространств  $H_A$  и  $H_B$ , т.е. как  $H_{AB} = H_A \otimes H_B$ . Вычислительный базис состояний  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  для составной системы  $AB$  выражается через базисные состояния систем  $A$  и  $B$   $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  тензорным произведением:

$$|x_1 x_2\rangle = |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle, \forall (x_1, x_2) \in \{0,1\}^2.$$

При этом в составной системе квантовых битов существуют состояния, которые не могут быть выражены через тензорное произведение отдельных компонент квантовых бит. Это свойство называется *запутыванием (entanglement)* или неразделимостью (*nonseparability*) квантовых состояний.

Допустим, что  $|\psi_{AB}\rangle$  состоит из двух состояний. Если существуют два состояния  $|\varphi_A\rangle$  в  $H_A$  и  $|\varphi_B\rangle$  в  $H_B$  такие, что  $|\psi_{AB}\rangle = |\varphi_A\rangle \otimes |\varphi_B\rangle$ , то состояние называется *разделимым (или unentangled)*. В противном случае оно является *запутанным (entanglement)* или *неразделимым (unseparable)* [8, 10, 20]. В качестве примеров можно привести систему из двух квантовых битов, известную как состояния Белла или ЭПР-состояния (в честь пионеров этих примеров Белла и Эйнштейна, Подоль-

ского и Розена):  $|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$ ;  $|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$ . Когда производится измерение таких состояний, как подсистем в составной системе запутанных состояний, то при известном результате об одном состоянии подсистемы можно точно определить состояние другой подсистемы (без проведения над ней измерений). Поэтому существует другой вариант в интерпретации таких состояний. Если рассматривают одно из состояний как запутанное, это означает, что состояние нельзя факторизовать в состояние произведения из подсистем двух состояний. Таким образом, если применяется оператор к одной из компонент запутанного состояния, то результат действия не факторизуется по остальным компонентам, а вычисляется для этих компонент непосредственно по одной из измеряемых компонент.

Действуя оператором Адамара  $H$  на состояние Белла  $|\phi^+\rangle$  на первую компоненту, в результате получим  $H_1 \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(H_1|0\rangle)|0\rangle + (H_1|1\rangle)|1\rangle\} = \frac{1}{2}(|00\rangle + |10\rangle + |01\rangle - |11\rangle)$  или в матричной форме

$$H_1 \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

т.е. имеем новое запутанное состояние, которое используется в обратной связи квантового генетического поискового алгоритма для обогащения квантовой корреляции запутанного состояния (см. рис. 1). Последовательно действуя на вторую компоненту полученного состояния оператором Адамара  $H_2$ , приходим  $H_2 H_1 \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ . К сожалению, сложность реализации операций квантовыми ячейками в данном подходе возрастает с числом запутанных состояний, связанных с управляемым битом.

### **Примечание П3. Эффективное моделирование КА на классических компьютерах**

Запутанные состояния в квантовых вычислениях рассматриваются как дополнительный физический ресурс, позволяющий существенно увеличить расчетную мощность по сравнению с классическими моделями вычислений. Число параметров, необходимых для описания незапутанных (чистых) состояний в заданном Гильбертовом пространстве  $H_n$  (представленных как тензорное произведение квантовых битов), возрастает только линейно с увеличением числа  $n$  квантовых битов. Однако для описания общего вида состояния (незапутанного или запутанного) требуется экспоненциальное число  $(2^n)$  векторных коэффициентов. Поэтому вопрос о физическом ресурсе квантовых вычислений не имеет простого ответа.

Данная проблема обсуждалась в деталях с общих позиций теории квантовых вычислений в [21]. Было показано, в частности, что для КА (оперирующих чистыми состояниями) для повышения эффективности по сравнению с классическими аналогами с увеличением размерности входных квантовых битов требуется неограниченное число перепутанных состояний. Более того, эффективно КА можно моделировать классическим инструментарием (классическими алгоритмами) только при наличии малого количества квантовой корреляции и фиксированном уровне толерантности вычислительных операций в КА. Независимо в [22] показано, как можно эффективно классическими алгоритмами моделировать КА со сравнительно слабой квантовой корреляцией. Вычислительная стоимость возрастает линейно с числом входных квантовых бит и экспоненциально – с увеличением требуемого количества квантовой корреляции. Независимое обобщение такого подхода приведено в [23] и разработано соответствующее программно-аппаратное обеспечение для эффективного моделирования КА на классических компьютерах. Этот подход использован в данной статье для моделирования в реальном времени робастных БЗ для интеллектуальных НР.

Изложенные аргументы и результаты свидетельствуют о предпочтительной роли квантовой корреляции как движущей силы квантовых вычислений (на чистых состояниях эволюции квантовой динамики).

**Пример П5: Моделирование квантовой интерференции с помощью преобразования Адамара и квантового преобразования Фурье (КПФ)**

С целью повышения вероятности измерения и извлечения искомого (маркированного) решения основной единой идеей в процессах проектирования моделей КА служит использование явления конструктивной/деструктивной интерференции в качестве инструментария извлечения результатов эффективных вычислений КА. Для увеличения вероятности извлечения «успешного» решения применяется конструктивная интерференция, а для редукции «плохих» решений – деструктивная интерференция. Конструктивный (деструктивный) эффект можно проиллюстрировать наглядно на примере применения преобразования Адамара к состояниям  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ,  $\{|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)\}$ . Очевидно, что  $H|0\rangle = |+\rangle$  и  $H|1\rangle = |-\rangle$ , т.е. воспроизводится состояние суперпозиции классических состояний в виде квантовых бит. При этом применение преобразований Адамара к состояниям  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  порождает состояния с одинаковым распределением вероятностей. Поскольку состояние  $|+\rangle$  является суперпозицией обоих классических состояний  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , то при повторном применении преобразования Адамара к  $|+\rangle$  классическая модель логического вывода (модель Колмогорова) предполагает одинаковую вероятность результирующего классического состояния (принцип сохранения вероятности). Однако вследствие оперирования в квантовых вычислениях с понятием амплитуды вероятностей [24, 25] применение преобразования Адамара к состоянию  $|+\rangle$  дает следующий результат:

$$H|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) = |0\rangle.$$

Таким образом, проявился эффект *интерференции* между вероятностями обоих классических состояний. С одной стороны, интерференция (в силу своего физического характера) усилила амплитуду вероятности одного ( $|0\rangle$ ) классического состояния (*конструктивная* интерференция) и ослабила существенно (до нуля) амплитуду вероятности другого ( $|1\rangle$ ) классического состояния (*деструктивная* интерференция). Действуя на суперпозицию возможных решений, интерференция реализует процесс формирования финальной фазы квантовых вычислений и является (так же, как и квантовая корреляция) физическим ресурсом усиления квантовых вычислений, а также для решения различных проблем проектирования моделей КА. Например, применяя преобразование  $H^{\otimes n}$  к состоянию  $|\psi'\rangle$  в виде (2.1), получим в результате квантовое состояние вида

$$\frac{1}{2^n} \sum_{z \in \{0,1\}^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{x \cdot z + f(x)} |z\rangle,$$

служащее основой для проектирования квантовой ячейки, например, при решении проблемы Deutsch-Jozsa [10].

В модели КА Шора при факторизации произведения на простые числа интерференцию обеспечивает оператор КПФ: оператор  $QFT_n \otimes I_n$  действует на каждый базисный вектор, принадлежащий линейной комбинации исходного вектора  $|\psi\rangle$ . Это означает, что любой вектор в такой комбинации воспроизводит суперпозицию базисных векторов. Комплексные весовые коэффициенты базисных векторов равны по модулю (т.е. амплитуды вероятностей равны), но имеют различные фазы. Каждый базисный вектор является взвешенной суммой амплитуд вероятностей, полученных из разных последовательностей базисных векторов. Данная сумма может увеличивать или уменьшать результирующую амплитуду вероятностей.

Так как этот эффект подобен эффекту интерференции классических волн, то говорят, что оператор  $[QFT_n]_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \exp \left\{ 2\pi J \left[ \frac{(i-1)(j-1)}{2^n} \right] \right\}$  играет роль оператора интерференции. С математической точки зрения, когда оператор  $QFT_n \otimes I_n$  действует на состояние, то все столбцы результирующей матрицы задействованы при вычислении, и интерференция осуществляется между весовыми коэффициентами из разных последовательностей базисных векторов [26]. Рассмотрим теперь особенности очень важного (и часто дискутируемого в работах по описанию основ квантовой механики) квантового оператора, описывающего необратимый процесс извлечения результата квантовых вычислений.

**Пример Пб: Измерения в разных вычислительных базисах**

Постулат квантовых измерений был введен фон Нейманом. Рассматривались только проективные измерения, в которых «стандартные» квантовые наблюдаемые  $A$  имеют спектральное представление в терминах ортогональных проективных операторов. Постулат утверждает, что во время измерения  $A$  вектор состояния квантовой системы редуцируется в собственный вектор наблюдаемой  $A$ , соответствующий результату измерения.

Таким образом, базис основного подхода к построению моделей процессов измерений в квантовых вычислениях составляет постулат о проекциях фон Неймана: результат действия наблюдения состояния  $\psi$  над наблюдаемой  $A$  как результат измерения есть одно из собственных значений  $A$ , т.е. измерение разрушает состояние  $\psi$  и ренормализует его. Для конечномерного Гильбертова пространства математически это означает следующее: пусть  $H$  – Гильбертово пространство размерности  $n$  квантовой системы  $S$ . Допустим, что  $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$  – спектральное представление наблюдаемой  $A$ , где  $\lambda_i$  – собственные значения и  $\phi_i$  – собственный вектор, соответствующий  $\lambda_i$ ;  $\{\phi_i\}_{i=1}^n$  – ортонормальный базис пространства  $H$  и  $P_i$  – проекция на собственное пространство оператора  $A$  (натянутое на собственные векторы) с собственными значениями  $\lambda_i$ .

Возможное значение проективного измерения отвечает собственному значению  $\lambda_i$  наблюдаемой  $A$ . Наблюдаемая  $A$  состояния  $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n |\phi_i\rangle$  воспроизводится как значение  $\lambda_i$  с вероятностью  $\left| \sum_{j=1}^k c_{i_j} \right|^2$ , где  $c_{i_1}, \dots, c_{i_k}$  такие, что  $\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} = \dots = \lambda_{i_{k-1}} = \lambda_{i_k} = \lambda_i$ , и при этом состояние системы после измерения определяется как  $\sum_{j=1}^k \lambda'_{i_j} |\phi_{i_j}\rangle\langle\phi_{i_j}|$ , где  $\lambda'_{i_j} = \frac{\lambda_{i_j}}{\sqrt{\sum |c_{i_j}|^2}}$ . Таким образом, до измерения для квантовой системы в состоянии  $|\psi\rangle$  возможный результат измерения определяется как  $p(m) = \langle\psi|P_m|\psi\rangle$ , а после измерения система ренормализуется в состояние  $|\psi'\rangle = \frac{P_m|\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}}$ .

Полнота уравнений устанавливается фактом из теории вероятностей

$$1 = \sum_m p(m) = \sum_m \langle\psi|P_m|\psi\rangle.$$

Постулат о проективных измерениях получил развитие в разных направлениях.

**Постулат обобщённого квантового измерения.** Модель обобщенного квантового измерения (замкнутая квантовая система  $S$  в конечномерном пространстве состояний) описывается набором

$\{M_m\}$  операторов измерений на Гильбертовом пространстве  $H$  квантовой системы  $S$ , где индекс  $m$  указывает на возможный исход (результат) процесса измерений. Операторы измерений удовлетворяют условию полноты:  $\sum_m M_m^\dagger M_m = I$ . Если состояние системы  $S$  есть  $|\psi\rangle$  до измерения, то вероятность получить выходное значение  $m$  определяется как  $p(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle$ . В последнем выражении и далее символ « $\dagger$ » означает операцию сопряжения унитарного оператора. После измерения система  $S$  ренормализуется как

$$|\psi'\rangle = \frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}}.$$

Из данной модели измерений как частный случай следуют модели проективных измерений и положительно-определённые операторно-значимые (ПООЗ) меры измерений. Так, например, если  $M_m$  удовлетворяет двум дополнительным ограничениям:  $M_m = M_m^\dagger$ ,  $M_m M_{m'} = \delta_{mm'} M_m$ , то получим представленную ранее модель проективных измерений. При выполнении условия  $E = M_m^\dagger M_m$ , имеем ПООЗ меры измерений.

В квантовой теории информации существуют строгие правила и законы, описывающие процессы извлечения информации из неизвестного квантового состояния. Результат проективных измерений квантовых битов должен быть сформулирован в классических терминах. Более точно любое проективное измерение одного квантового бита приносит только один классический бит информации. Поэтому, несмотря на существование бесконечного множества возможных квантовых состояний квантового бита, эти состояния не различимы. Не существует процессов измерений в рамках модели фон Неймана, с помощью которых можно извлечь информации больше, чем один ожидаемый бит информации из квантового бита. Идентификация состояния квантового бита не является полной, т.е. для неизвестного состояния квантового бита  $|\psi\rangle$  с помощью проективных измерений невозможно определить его истинное состояние. Измерение состояния квантового бита  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ , соответствующее наблюдению  $\{O_1, O_2\}$  (где  $O_1$  ( $O_2$ ) – подпространство, натянутое на состояние  $|0\rangle$  ( $|1\rangle$ ), или, другими словами, в соответствии со стандартным вычислительным базисом  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ), имеет выходным результатом бит 0 (1) с вероятностью  $|a|^2$  ( $|b|^2$ ) и состояние  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  коллапсирует в состояние  $|0\rangle$  ( $|1\rangle$ ). Вся другая информация, содержащаяся в суперпозиции, необратимо потеряна. Поэтому для наблюдателя квантовый бит представляется как случайная величина с определенным распределением вероятностей. Однако квантовый бит  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  можно измерить также относительно других вычислительных базисов бесчисленным образом.

Например, часто используется дуальный вычислительный базис:

$$D = \left\{ |+\rangle \equiv |0'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), |-\rangle \equiv |1'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right\}, |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0'\rangle + |1'\rangle), |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0'\rangle - |1'\rangle).$$

Тогда  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}([a+b]|0'\rangle + [a-b]|1'\rangle)$  и измерение  $|\psi\rangle$  в этом базисе дает 0 (или 1) с вероятностью

$$\frac{1}{2}|a+b|^2 \quad \left( \text{или} \quad \frac{1}{2}|a-b|^2 \right).$$

**Примечание П4. Квантование классических операторов в различных вычислительных базисах (о соответствии квантовых и классических операторов)**

Рассмотрим в качестве примера проблему «квантования» заданного классического оператора. Допустим, что классическим оператором является однобитовая операция отрицания «НЕТ» (NOT gate), которая конвертирует бит  $(a)$  в его дополнение  $(1-a)$ ,  $(a=0,1)$ . Нетрудно показать, что в качестве квантовой составляющей этой операции достаточно выбрать унитарную матрицу Паули типа  $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Однако, если принять операцию отрицания квантового бита в виде матрицы

$\gamma_a = |a\rangle\langle a|$ , где  $|a\rangle = \begin{pmatrix} 1-a \\ a \end{pmatrix}$ , то выполняется точно отношение  $\gamma_a \xrightarrow{\sigma_x} \gamma_{1-a}$ . С другой стороны,

матрица Паули  $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  также реализует операцию отрицания «НЕТ»:  $\eta_a \xrightarrow{\sigma_z} \eta_{1-a}$  при усло-

вии, что вычислительный базис выбран другим образом, т.е. в виде  $\eta_a = |a'\rangle\langle a'|$ , где

$|a'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^a \end{pmatrix}$ . Данный простой пример показывает зависимость процедуры установления кван-

тово-классического соответствия от выбора состояний в вычислительном базисе. Более того, даже если выбран вычислительный базис, существует множество вариантов для дальнейшего описания

операции. Так, например, если выбрана операция  $\gamma_a$ , то оператор  $\tilde{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta} \\ e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}$  тоже реализует

конвертирование бита  $\gamma_a \xrightarrow{\tilde{\sigma}_x} \gamma_{1-a}$  для заданных значений углов  $(\theta, \phi)$ . Стандартная операция отрицания при  $\theta = \phi = 0$  является только вариантом, но не единственно возможным. Этот факт объясняется физической природой квантовых состояний, которые описываются лучами, а не векторами в Гильбертовом пространстве. Приведенные аргументы имеют место и при установлении обратного соответствия между квантовыми и классическими операторами, т.е. квантовому оператору могут соответствовать разные классические операторы. Так, например, оператору  $\sigma_z$  соответствуют как операция идентичности:  $\gamma_a \xrightarrow{\sigma_z} \gamma_a$ , так и отрицания:  $\eta_a \xrightarrow{\sigma_z} \eta_{1-a}$ .

Рассмотрим пример применения моделей измерений в квантовых вычислениях. Пусть задана составная квантовая система из двух квантовых битов в виде вектора состояний в комплексном пространстве  $C^4$  в вычислительном базисе

$$|\psi\rangle = a_0|00\rangle + a_1|01\rangle + a_2|10\rangle + a_3|11\rangle. \tag{П.3}$$

Отметим, что (П.3) является обобщённым перепутанным состоянием. Если измеряется первый бит в состоянии  $|\psi\rangle$ , то существуют две возможные ситуации результата измерений ( $m=0,1$ ): первый бит равен нулю ( $m=0$ ), или он равен единице ( $m=1$ ).

В первом случае соответствующий оператор обобщённого измерения определяется как  $M_0 = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01|$ .

Во втором  $M_1 = |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|$ . Вероятность события «первый бит в состоянии  $|\psi\rangle$  есть нуль» вычисляется в виде  $p(0) = \langle \psi | M_0^\dagger M_0 | \psi \rangle = |a_0|^2 + |a_1|^2$ . После измерения состояние определяется как:

$$|\psi'\rangle = \frac{M_0|\psi\rangle}{\sqrt{p(0)}} = \frac{M_0|\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_0^\dagger M_0 | \psi \rangle}} = \frac{a_0|00\rangle + a_1|01\rangle}{\sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2}}.$$

Во втором случае вероятность, что первый бит в состоянии  $|\psi\rangle$  есть единица, вычисляется как  $p(1) = \langle \psi | M_1^\dagger M_1 | \psi \rangle = |a_2|^2 + |a_3|^2$ , и после измерения состояние системы описывается в следующем виде:  $|\psi^n\rangle = \frac{M_1 |\psi\rangle}{\sqrt{p(1)}} = \frac{M_1 |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_1^\dagger M_1 | \psi \rangle}} = \frac{a_2 |01\rangle + a_3 |11\rangle}{\sqrt{|a_2|^2 + |a_3|^2}}$ .

Для рассматриваемого примера оператор обобщённого измерения  $M_m$  можно определить через операторы проективного измерения:  $M_0 = P_{00} + P_{01}$ ,  $M_1 = P_{10} + P_{11}$ , где  $P_{00}, P_{01}, P_{10}, P_{11}$  – соответствующие проекции на пространство  $C^4$  следующего вида:

$$P_{00} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $P_{00} + P_{01} + P_{10} + P_{11} = I^{(4)}$  и  $I^{(4)}$  – идентичный оператор в  $C^4$ . Матрицы  $M_0, M_1$  являются двухмерными проекторами в  $C^2 \otimes C^2$  и могут быть переписаны в виде блочных матриц

$$M_0 = \begin{pmatrix} I^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I^{(2)} \end{pmatrix},$$

где  $I^{(2)}$  – идентичный оператор в комплексном пространстве  $C^2$ . Нетрудно проверить прямым вычислением, что выполняется следующее необходимое условие:

$$M_0^\dagger M_0 + M_1^\dagger M_1 = I^{(4)}.$$

Рассмотрим соответствующую взаимосвязь с ПООЗ-мерами измерений. В этом случае для двух ПООЗ-мер, следуя определению, верны следующие соотношения:

$$E_0 = M_0^\dagger M_0 = M_0, E_1 = M_1^\dagger M_1 = M_1 \text{ и } E_0 + E_1 = I^{(4)}.$$

Аналогично приведенному выше варианту измерений, если измеряется второй бит в состоянии  $|\psi\rangle$ , то существуют два других варианта возможных результатов измерений ( $m = 2,3$ ): или второй бит нуль, или единица. В первом варианте соответствующий оператор обобщённого измерения –  $M_2 = |00\rangle\langle 00| + |10\rangle\langle 10|$  и для второго случая  $M_3 = |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|$ , где  $M_2 = P_{00} + P_{10}$ ,  $M_3 = P_{01} + P_{11}$ . Очевидно, что данные измерения с возможными значениями ( $m = 2,3$ ) отличаются от предыдущего варианта ( $m = 0,1$ ).

Рассмотрим особенности обсуждаемого формализма описания квантовых процессов измерений на важном примере обобщенных измерений состояний Белла. Напомним, что четыре состояния Белла  $|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$ ;  $|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$ , являются максимально запутанными и образуют базис запутанных состояний в пространстве  $C^4$ . Их часто называют «магическими» в силу необычных физических свойств и важной роли в квантовых вычислениях.

Выделим частный случай:  $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ . Если измерять первый бит в  $|\phi^+\rangle$ , то, как и ранее, существует два возможных варианта результата измерений ( $m = 0,1$ ): или первый бит нуль, или единица. Для случая  $m = 0$  имеем ранее приведенный вариант обобщённого измерения  $M_0$ .

Вероятность, что первый измеренный бит в состоянии  $|\phi^+\rangle$  будет 0, определяется в виде  $p(0) = \langle \phi^+ | M_0^\dagger M_0 | \phi^+ \rangle = \frac{1}{2}$ . После измерения имеем квантовое состояние

$$|\phi^{+'}\rangle = \frac{M_0 |\phi^+\rangle}{\sqrt{\langle \phi^+ | M_0^\dagger M_0 | \phi^+ \rangle}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} |00\rangle.$$

Для случая  $m = 1$  справедлива аналогия варианта обобщённого измерения  $M_1$ . Вероятность, что первый измеренный бит в состоянии  $|\phi^+\rangle$  равен 1, вычисляется как  $p(1) = \langle \phi^+ | M_1^\dagger M_1 | \phi^+ \rangle = \frac{1}{2}$ . По-

сле измерения получим квантовое состояние  $|\phi^{+'}\rangle = \frac{M_1 |\phi^+\rangle}{\sqrt{\langle \phi^+ | M_1^\dagger M_1 | \phi^+ \rangle}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} |11\rangle$ , и, как

результат,  $p(0) + p(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  (закон сохранения вероятностей). Отметим, что операторы  $M_0$ ,  $M_1$  являются ПООЗ-мерами для обобщенных наблюдаемых.

Рассмотрим хорошо известный принцип *дополнительности* или *дуальности* системы «частица – волна», который служит основой для многих концепций в квантовой механике.

**Квантовый дуализм «частица – волна» в моделях процессов измерения.** На структурном уровне модель квантовой механики состоит из двух составных частей, первая из которых оперирует с понятием квантового состояния исследуемой квантовой системы, а вторая часть – ориентирована на квантовую динамику (эволюцию квантовой системы). Наличие двух подходов связано с дуализмом «частица – волна» описания динамических объектов квантовой механики. Отметим некоторые особенности и свойства квантовой эволюции и взаимосвязь процессов измерений с дуализмом представления динамических объектов квантовой механики. Рассмотрим волновое представление квантовой динамики. Допустим, что состояние квантовой системы описывается в следующем виде:  $|\psi\rangle = \sum_i a_i |i\rangle$ , где  $\sum_i a_i = 1$ ,  $\{|i\rangle\}$  определяет множество ортогональных векторов. Если  $i \geq 2$ , то говорят, что динамика данной квантовой системы имеет волновой характер. В противном случае,  $i = 1$ , квантовая система описывает динамическое поведение одной частицы и поэтому речь идет о корпускулярном поведении рассматриваемой системы.

**След матрицы и процессы квантовых измерений.** Обратимся к понятию след матрицы  $A$ , который записывается как сумма ее диагональных элементов  $A_{ii}$ :  $Tr(A) \equiv \sum_i A_{ii}$ . След матрицы имеет циклическое свойство и линеен. Предположим, что состояние двух физических систем  $A$  и  $B$  описывается оператором плотности  $\rho^{AB}$ . Редуцированный оператор плотности для системы  $A$  записывается в следующем виде:  $\rho^A \equiv Tr_B(\rho^{AB})$ , где частный след  $Tr_B$  – отображение операторов, известных как частный след над системой  $B$ . В результате:

$$\rho^A \equiv Tr_B(\rho^{AB}) = Tr_B(\rho^{AB} = |a_1\rangle\langle a_1| \otimes |b_1\rangle\langle b_1|) \equiv (|a_1\rangle\langle a_1|) Tr(|b_1\rangle\langle b_1|).$$

Частный след оператора, таким образом, является инструментарием количественного описания наблюдаемых подсистем, находящихся в композиции составной системы.

Для различения квантовых состояний требуются квантовые измерения. Проективное измерение над подсистемой подобно операции взятия частного следа. Допустим, что имеется состояние GHZ

следующего вида:  $|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 0_B 0_C\rangle + |1_A 1_B 1_C\rangle)$  (запутанное трёх частичное состояние из трёх квантовых бит  $ABC$ ). Тогда частный след над одним квантовым битом, например, над системой  $A$ , запишем как

$$Tr_A(|GHZ\rangle\langle GHZ|) = \frac{1}{2}(\rho_{00}^{BC}) + \frac{1}{2}(\rho_{11}^{BC}),$$

где  $\rho_{00}^{BC} = |0_B 0_C\rangle\langle 0_B 0_C|$ ,  $\rho_{11}^{BC} = |1_B 1_C\rangle\langle 1_B 1_C|$ , т.е. после взятия частного следа над системой  $A$  подсистема  $BC$  имеет вероятность  $p = \frac{1}{2}$ , находится в состоянии  $\rho_{00}^{BC}$  или  $\rho_{11}^{BC}$ . Согласно постулату квантовых измерений, если произведено проективное измерение в базисе  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  над системой  $A$ , то результатом будет состояние  $|0\rangle$  (соответствующее  $\rho_{00}^{BC}$ ) или состояние  $|1\rangle$  (соответствующее  $\rho_{11}^{BC}$ ) с вероятностью  $p = \frac{1}{2}$ .

Рассмотрим теперь квантовое состояние  $|w\rangle$  из трёх квантовых битов вида  $|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1_A 0_B 0_C\rangle + |0_A 1_B 0_C\rangle + |0_A 0_B 1_C\rangle)$ . Возьмём след над квантовым битом  $A$

$$Tr_A(|w\rangle\langle w|) = \frac{1}{3}\rho_{00}^{BC} + \frac{2}{3}|\psi_{BC}^+\rangle\langle\psi_{BC}^+|,$$

где  $|\psi_{BC}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_B 1_C\rangle + |1_B 0_C\rangle)$  определяет состояние Белла.

Таким образом, после проективного измерения над системой  $A$  в базисе  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  система с вероятностью  $p = \frac{1}{3}$  может находиться в состоянии  $|0\rangle$  (соответствующем  $\rho_{00}^{BC}$ ) и с  $p = \frac{2}{3}$  в состоянии  $|1\rangle$  (соответствующем  $|\psi_{BC}^+\rangle$ ).

Допустим, что  $Q$  – составная (из двух квантовых бит  $Q_1$  и  $Q_0$ ) система, которая находится в запутанном состоянии Белла

$$|\Psi_Q\rangle = \frac{|0_1 0_0\rangle - |1_1 1_0\rangle}{\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned} \rho_Q &= \left( \frac{|0_1 0_0\rangle - |1_1 1_0\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{\langle 0_1 0_0| - \langle 1_1 1_0|}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} (|0_1 0_0\rangle\langle 0_1 0_0| - |0_1 0_0\rangle\langle 1_1 1_0| - |1_1 1_0\rangle\langle 0_1 0_0| + |1_1 1_0\rangle\langle 1_1 1_0|) = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{П.4}$$

Оператор плотности  $\rho_Q$  имеет представление:

Вычислим частный след по состоянию второго квантового бита, т.е. системы  $Q_I$ . В результате редуцированный оператор плотности  $\rho_{Q_0} \equiv \rho_0$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\rho_0 = Tr_I(\rho_Q) &= \frac{1}{2} [Tr_I(|0_1 0_0\rangle\langle 0_1 0_0|) - Tr_I(|0_1 0_0\rangle\langle 1_1 1_0|) - Tr_I(|1_1 1_0\rangle\langle 0_1 0_0|) + Tr_I(|1_1 1_0\rangle\langle 1_1 1_0|)] = \\ &= \frac{1}{2} [|0_0\rangle\langle 0_0| \langle 0_1|0_1\rangle - |0_0\rangle\langle 1_0| \langle 1_1|0_1\rangle - |1_0\rangle\langle 0_0| \langle 0_1|1_1\rangle + |1_0\rangle\langle 1_0| \langle 1_1|1_1\rangle] = \\ &= \frac{1}{2} [|0_0\rangle\langle 0_0| + |1_0\rangle\langle 1_0|] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I.\end{aligned}$$

При этом учитывалось, что состояния ортогональны:  $\langle 0_1|0_1\rangle = 1$ ,  $\langle 0_1|1_1\rangle = 0$  и т.п. Отметим, что в данном примере редуцированное состояние  $\rho_0$  является смешанным, так как:

$$Tr[(\rho_0)^2] = Tr\left[\left(\frac{I}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{2} < 1.$$

Данный результат характеризует особое свойство квантовой системы, принципиально отсутствующее в классической системе [8]. Действительно, состояние составной системы чистое:  $Tr[(\rho_Q)^2] = 1$ , и установлено точно (максимальная информация). Однако первый квантовый бит находится в смешанном состоянии. Это означает, что информация о состоянии данного квантового бита не максимальна, а сама подсистема имеет более хаотическое поведение, чем составная система. Подобное странное для классических систем свойство, когда о составной системе имеется полная информация, а о подсистемах – только часть информации, характеризует способность квантовых систем к самоорганизации за счёт использования свойства суперкорреляции (квантовой корреляции), содержащейся в запутанных состояниях. Именно за счёт наличия квантовой корреляции у двух смешанных составных состояний появилась возможность организовать чистое состояние. Эволюция состояния квантовой системы описывается уравнением Шрёдингера. Обобщенные квантовые динамические процессы формализуются квантовыми операторами. Принцип дополнительности предполагает дуализм «частица – волна» при описании квантового объекта.

Для извлечения информации о поведении квантового объекта необходимо проводить квантовые измерения. Унитарные операции связаны с волновым представлением динамического поведения квантового объекта. Однако неунитарные операторы разрушают волновую картину описания системы и приводят к корпускулярному представлению. В квантовом случае полнота и корректность отношений требует выполнения условия  $Tr(\rho) = 1$ , что для квантовых измерений верно в силу условия (П.2). Операция взятия следа означает, что с определённой вероятностью можно обнаружить частицу в пространстве состояний, после чего волновое поведение квантовой частицы разрушается. Рассмотрим случай квантовых измерений с помощью проективных операций. Вероятность результата измерения, как отмечалось ранее, определяется в виде  $p(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle$ . Так как после проективного измерения состояние квантовой системы ортогонально, согласно определению  $|\psi\rangle = \sum_i a_i |i\rangle$ ,  $i = 1$ , то ее поведение носит *корпускулярный* характер. Таким образом, разрушается волновое представление. Однако после ПООЗ-измерений квантовая система может проявлять волновые свойства. Допустим, что квантовая система является двухмерной в базисе  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ .

Рассмотрим ПООЗ-меру измерения в виде трёх операторов:

$$E_1 = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} |1\rangle\langle 1|; \quad E_2 = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} (|0\rangle - |1\rangle)(\langle 0| - \langle 1|); \quad E_3 = I - E_1 - E_2,$$

которые попарно неортогональны. После ПООЗ-измерений квантовая система проявляет как *волновое*, так и *корпускулярное* поведение. Подобная дополнительность существует между запутанным со-

стоянием (квантовой корреляцией) и интерференцией. Мера квантовой корреляции (entanglement) представляет убывающую функцию от меры «прозрачности» (visibility), зависящей от интерференции. Рассмотрим дополнителность между квантовой корреляцией и интерференцией на примере обобщенного состояния Белла.

### **Пример П7: Дополнителность между запутанным состоянием интерференцией**

Возьмем обобщенное (запутанное) состояние Белла  $|\psi\rangle = a|0_1\rangle|0_2\rangle + b|1_1\rangle|1_2\rangle$  с ограничением на амплитуды вероятностей, следующим из условия унитарности:  $a^2 + b^2 = 1$ . Проведем унитарное преобразование с помощью оператора (матрицы) вращения по первому вычислительному базису  $\{|0_1\rangle, |1_1\rangle\}$  для первого квантового бита  $|0_1\rangle \rightarrow \cos\alpha|0_1\rangle + \sin\alpha|1_1\rangle$  и получим в результате:

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = a(\cos\alpha|0_1\rangle + \sin\alpha|1_1\rangle)|0_2\rangle + b(\cos\alpha|1_1\rangle - \sin\alpha|0_1\rangle)|1_2\rangle.$$

Следующей операцией осуществим наблюдение первого квантового бита без возмущения второго. Вероятность извлечь состояние  $|0_1\rangle$ , определяемая как  $P_{|0_1\rangle} = \frac{1}{2}[1 + (a^2 - b^2)\cos 2\alpha]$ , является типичным примером эффекта интерференции, если интерпретировать угол  $\alpha$  как управляемый параметр. Мера «прозрачности» интерференции  $\Gamma \equiv |a^2 - b^2|$ . Как физическая мера результата измерений она исчезает, если начальное состояние было максимально запутанным (максимально коррелированным), т.е. при  $a^2 = b^2$ . Данная физическая мера максимальна, когда состояние разделимо (т.е. при  $a = 0$  или  $b = 0$ ).

С другой стороны, известно, что мерой запутанности состояния (квантовой коррелированности) служит частный след по одному из состояний в виде энтропии фон Неймана (определение см. ниже) следующего вида:  $E \equiv S(\rho_{red}) = -a^2 \log a^2 - b^2 \log b^2$ , где редуцированный оператор плотности

$$\rho_{red} = Tr_2 |\psi'\rangle\langle\psi'| = Tr_2 |\psi\rangle\langle\psi| = a^2 |0_1\rangle\langle 0_1| + b^2 |1_1\rangle\langle 1_1|.$$

Квантовая корреляция получает максимальное значение  $E = 1$  при  $a^2 = b^2$  и минимальное  $E = 0$ , если  $a = 0$  или  $b = 0$ . Таким образом, чем выше квантовая корреляция состояния, тем ниже «прозрачность» интерференции и наоборот.

Другая популярная мера корреляции, именуемая отрицательность  $N$ , определяется как отрицательное значение удвоенного значения наименьшего собственного значения транспонированной матрицы плотности. Следовательно,  $N = 2|ab|$ . Мера дополнителности выражается в данном случае как  $N^2 + \Gamma^2 = 1$ .

Тогда взаимоотношение между запутанным состоянием и интерференцией следует из ограничения в виде унитарности квантовых операторов:  $a^2 + b^2 = 1$ .

Таким образом, в моделях КА меры квантовой корреляции и интерференции не являются независимыми, и эффективность поиска успешного решения с помощью КА зависит от взаимоотношения между ними.

### **Пример П8: Проектирование квантовых алгоритмических ячеек и квантовое программирование.**

Основу метода проектирования квантовых алгоритмических схем и ему подобных методов формирования новых типов КА составляет система проектирования квантовых алгоритмических ячеек (КАЯ), описанная в [8, 10, 23]. Как и в общей структуре КА, структура системы проектирования КАЯ основана на формализации описания трёх основных квантовых операторов (суперпозиции, квантовой

корреляции (запутанных состояний) и интерференции) и измерения в виде элементарных эволюционных унитарных операторов. В соответствии с квантовой схемой КА данные операторы собраны тензорным и прямым произведением в единый эволюционный квантовый унитарный оператор [10, 23]. Структурно КАЯ действует на начальный канонический базисный вектор и формирует комплексную линейную комбинацию состояний составляющих классических векторов (называемую суперпозицией) в виде базисных векторов как выходной результат действия оператора суперпозиции. Суперпозиция содержит в качестве одной из составляющих информацию о решении исследуемой проблемы. После процесса формирования суперпозиции в КАЯ применяются операторы квантовой корреляции, интерференции и измерения с целью извлечения информации об искомом решении. В квантовой механике процесс измерения носит необратимый характер и является недетерминированной операцией, что приводит к измерению только одного из базисных векторов в сформированной суперпозиции. Вероятность каждого базисного вектора быть результатом измерения в составе суперпозиции при заданном вычислительном базисе зависит от комплексного коэффициента (амплитуды вероятности).

Процесс останова итерационного действия КАЯ осуществляется программным путем на основе принципа минимума информационной энтропии «интеллектуального квантового состояния», содержащего ценную информацию об искомом решении [10, 26]. КАЯ могут быть реализованы с помощью программно-аппаратной поддержки эволюционных квантовых вычислений.

В квантовом программировании существует доказательство полноты описания КАЯ с помощью соответствующих программных языков повышенной семантической выразительности [10]. По аналогии с существованием эквивалентности в теории вычислений, которая основана на классических алгоритмах, известна гипотеза об эквивалентности между представлением выражений квантовых операций на синтаксическом уровне с сохранением полноты их описания за счет включения в квантовые языки программирования семантической выразительности квантовых операторов (на функциональном уровне описания действий квантовых операторов).

Одним из естественных шагов в этом направлении является разработка принципов логического вывода и проверки истинности суждений в языках квантового программирования для избежания противоречий в получаемом следствии логического вывода. К таким языкам квантового программирования следует отнести, например, язык QML (Quantum Programming Language) [10, 27 – 34].

Рассмотрим, как осуществляется в языке QML непротиворечивое описание определения действия оператора Адамара в следующем виде:

$$H x = \text{if } x \text{ then } (false + (-1) * true) \text{ else } (false + true).$$

Оценим полноту и истинность данного выражения, которое эквивалентно проверке истинности того, что последовательное действие операторов Адамара  $H(H x)$  на функциональном уровне описания приводит к результату, эквивалентному  $x$ .

Для этого используем следующую модель логического вывода языка QML [29]:

$$\begin{aligned}
H(H x) &= \text{if } ( \text{if } x \text{ then } ( \text{false} + (-1) * \text{true} ) \text{ else } ( \text{false} + \text{true} ) ) \\
&\quad \text{then } ( \text{false} + (-1) * \text{true} ) \\
&\quad \text{else } ( \text{false} + \text{true} ) \\
&\quad \text{-- by commuting conversion for "if"} \\
&= \text{if } x \\
&\quad \text{then if } ( \text{false} + (-1) * \text{true} ) \\
&\quad \quad \text{then } ( \text{false} + (-1) * \text{true} ) \\
&\quad \quad \text{else } ( \text{false} + \text{true} ) \\
&\quad \text{else if } ( \text{false} + \text{true} ) \\
&\quad \quad \text{then } ( \text{false} + (-1) * \text{true} ) \\
&\quad \quad \text{else } ( \text{false} + \text{true} ) \\
&\quad \text{-- by "if"} \\
&= \text{if } x \\
&\quad \text{then } ( \text{false} - \text{false} + \text{true} + \text{true} ) \\
&\quad \text{else } ( \text{false} + \text{false} + \text{true} - \text{true} ) \\
&\quad \text{-- by simplification and normalisation} \\
&= \text{if } x \text{ then } \text{true} \text{ else } \text{false} \\
&\quad \text{-- by } \eta \text{-rule for "if"} \\
&= x
\end{aligned}$$

Элементы теории проверки полноты и истинности семантики функционального описания КА на языке функционального квантового программирования QML описаны в [10, 27 – 34].

**Квантовые информационные процессы и законы квантовой теории информации.** Информационная энтропия Шеннона определяется как  $H(p) = -\sum_i p_i \log p_i$ . Энтропия фон Неймана

имеет следующий вид:  $S^{vN}(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho)$ . В частном случае, когда матрица  $\rho$  диагональная, наблюдается тождественное равенство энтропийных мер Шеннона и фон Неймана. Однако законы и следствия квантовой теории информации имеют ряд принципиальных отличий при квантовом обобщении классической теории информации Шеннона [8, 10, 35 – 37]. Исследуем кратко на примерах некоторые из этих особенностей, используемые в моделях КНВ.

### Пример П9

Рассмотрим особенности описания и информационного анализа запутанных состояний Белла  $|\Psi_Q\rangle = \frac{|0_1 0_0\rangle - |1_1 1_0\rangle}{\sqrt{2}}$ . Так как состояние Белла с оператором плотности (П.4) чистое, то  $\rho_Q$  представляет чистый ансамбль. Поэтому неопределённость квантового состояния отсутствует, т.е. энтропия фон Неймана  $S^{vN}(\rho_Q) = 0$ .

Редуцированный оператор плотности  $\rho_0$  для квантового бита  $|0_0\rangle$  есть частный след над системой  $Q$ , т.е.  $\rho_0 = Tr_1(\rho_Q) = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Следовательно, квантовая неопределённость в состоянии  $|0_0\rangle$  определяется энтропией фон Неймана как  $S^{vN}(\rho_Q) = 1$ .

Таким образом, информационный анализ неопределенности в состоянии составной квантовой системы позволяет четко разяснить наличие необычных (неклассических) свойств: игнорирование в ней части информации о состоянии подсистемы приводит к увеличению квантовой неопределённости. В результате квантовая неопределенность в «части» (подсистеме)  $Q_0$  больше, чем в «полной» (составной) квантовой системе  $Q$ . Такой эффект отсутствует в классических системах в силу свойств меры информационной энтропии Шеннона.

### Пример П10

Рассмотрим состояние Белла  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$  в Гильбертовом пространстве  $H_{AB} = H_A \otimes H_B$ , где  $H_A = H_B = H_2$ . Матрицы плотности  $\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi|$ ,  $\rho_A$ ,  $\rho_{A|B}$  определяются как

$$\rho_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \rho_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho_{A|B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Матрица условной плотности  $\rho_{A|B} = \rho_{AB}(I_A \otimes \rho_B)^{-1}$  (в этом случае взаимная  $\rho_{AB}$  и маргинальная  $I_A \otimes \rho_B$  матрицы плотности коммутируют). Из определения энтропии фон Неймана следует  $S^{vN}(A) = S^{vN}(B) = 1$ . Тогда  $S(AB) = S(B) + S(A|B) = 1 - 1 = 0$ , так как  $S(A|B) = -1$ .

Следовательно, в отличие от классической теории информации Шеннона квантовая условная энтропия фон Неймана может принимать *отрицательные* значения, когда рассматриваются запутанные состояния. Этот факт непосредственно связан с квантовой неразделимостью запутанных состояний, а сами они интерпретируются как гигантски (супер) коррелированные состояния. Таким образом, отрицательность условной энтропии указывает на наличие запутанных состояний в составной квантовой системе и определяет нижнюю границу их корреляции [8, 10, 38, 39].

Существование данного факта установлено также в квантовых поисковых алгоритмах Шора и Гровера [10, 26] и используется в решении проблемы эффективного останова КА.

Отметим также, что не все базовые классические соотношения и неравенства имеют квантовые аналоги. Так, например, в классическом случае

$$I(x : y) \leq \min[H(x), H(y)].$$

Тогда как в квантовом случае верхняя граница задается неравенством

$$S(X : Y) \leq 2 \min[S(X), S(Y)].$$

Квантовая теория информации имеет строго обоснованные правила, как извлекать информацию из неизвестного квантового состояния [8, 10, 35 – 37]. Оптимальный квантовый процесс извлечения ценной информации из индивидуальных БЗ, спроектированных для фиксированных ситуаций управления на основе мягких вычислений, основан на четырех фактах квантовой теории информации, приведенных ниже. В частности, доказано, что существует: эффективное квантовое сжатие данных; «сцепление» классической и квантовых частей информации в квантовом состоянии; полная корреляция в квантовом состоянии является «смесью» классической и квантовой корреляций; наличие скры-

той (наблюдаемой) классической корреляции в квантовом состоянии. Далее кратко рассматривается физический смысл перечисленных фактов и их роль в процессах проектирования оптимальных процессов и сигналов управления на основе КНВ.

**Факт 1. Эффективное квантовое сжатие данных.** В классической теории информации Шеннон показал, насколько (при заданной точности) предельно можно сжать сообщение, состоящее из  $N$  независимых знаков ( $x_a$ ), где каждый знак появляется в сообщении с априорной вероятностью  $p_a$ , используя понятие информационной энтропии. Информационная энтропия Шеннона  $H(p_a)$  определяется как  $H(p_a) = -\sum_a p_a \log_2 p_a$ . Было доказано следующее утверждение: блок кодов длиной  $NH$  битов достаточен для кодирования всех типовых (наиболее часто появляющихся) последовательностей без учета способов кодирования нетипичных последовательностей сообщений. При этом вероятность ошибки кодирования (потери информации) не превосходит заданный порог  $\varepsilon$ . В квантовой теории информации знаками являются матрицы плотности. Возможны два варианта, когда матрицы плотности соответствуют ансамблю чистых состояний  $|\phi_a\rangle$  или, когда ансамбль формируется матрицами плотности  $\rho_a$  с вероятностью  $p_a$ . Рассмотрим ансамбль состояний для второго варианта. В этом случае матрица плотности сообщений, состоящих из  $N$  знаков, описывается как  $\rho^{(N)} = \rho \otimes \rho \otimes \dots \otimes \rho$ , где  $\rho = \sum_a p_a |\phi_a\rangle\langle\phi_a|$ .

Энтропия сообщений фон Неймана  $S = -Tr(\rho \ln \rho)$  имеет простое соотношение с энтропией ансамбля:  $S(\rho^{(N)}) = NS(\rho)$ . Известно следующее неравенство между Шенноновской информационной энтропией и энтропией фон Неймана:  $H(p) \geq S(\rho)$ , т.е. значение информационной энтропии Шеннона превышает значение энтропии фон Неймана. Это означает, что применение квантовой теории информации позволяет осуществить более глубокое сжатие классической информации [8, 10].

**Факт 2. Сцепление (разделение) информации в квантовом состоянии в виде классической и квантовых частей.** Рассмотрим модель обобщённого измерения (см. разд. 2) на состоянии  $A_i A_i^\dagger$ , для которой матрица плотности имеет следующее определение:

$$\rho_B^i = \frac{A_i \rho_B A_i^\dagger}{Tr(A_i \rho_B A_i^\dagger)}$$

Конечное состояние подсистемы  $B$  будет тогда  $\sum_i A_i \rho_B A_i^\dagger = \sum_i p_i \rho_B^i$ . Энтропия редуцированного состояния равна  $\sum_i p_i S(\rho_B^i)$ . Количество классической информации, полученной на измерении  $i$  с вероятностью  $p_i$  выражается как информационная энтропия Шеннона  $H(p)$ . Если квантовые состояния  $\rho_B^i$  принадлежат ортогональным подпространствам, то энтропия конечного состояния (после измерения) есть сумма редуцированной квантовой энтропии,  $\sum_i p_i S(\rho_B^i)$  и классической информации, т.е.  $S(\sum_i p_i \rho_B^i) = \underbrace{H(p)}_{\text{Классическая}} + \underbrace{\sum_i p_i S(\rho_B^i)}_{\text{Квантовая}}$ .

Таким образом, количество информации, содержащейся в квантовом состоянии, может быть разделено (сцеплено в виде) на квантовую и классическую части [40]. Поэтому при моделировании робастных структур ИСУ с помощью ОБЗ моделируется классическая часть информации, а ее дефицит может быть определён как [8, 10]

$$\Delta I = S(\underbrace{\sum_i p_i \rho_B^i}_{\text{Полная}}) - \underbrace{\sum_i p_i S(\rho_B^i)}_{\text{Квантовая}} = \underbrace{H(p)}_{\text{Классическая}}$$

Можно извлечь, следовательно, дополнительное количество ценной квантовой информации из индивидуальных БЗ для последующего использования при проектировании интеллектуального

управления повышенного уровня. При этом применяются квантовые процедуры сжатия и редукции избыточной информации, содержащейся в классических сигналах управления (привлекая соответствующие модели квантовой корреляции в квантовом алгоритме КНВ).

**Факт 3. Количества полной, классической и квантовой корреляций.** Запутанные состояния или, в общем виде, квантовая корреляция являются типичными физическими ресурсами квантовых вычислений. Однако не все виды корреляций имеют чисто квантовую природу. Иными словами, полные корреляции представляют собой «смеси» классической и квантовой корреляций [41]. Для оптимального проектирования (эффективно моделируемых на классических компьютерах) заданного класса КА важно знать тип (и вид) необходимой классической корреляции. Так, например, если возможно определить классическую часть корреляций, то, используя оптимальные ПООЗ-меры измерения, допустимо извлечь максимальное количество информации в классической форме, содержащейся в квантовом состоянии, с минимумом возрастания энтропии [42, 43]. Количество полной корреляции может быть разделено на классическую и квантовую части. Данная мера эквивалентна мере максимальной классической/квантовой взаимной информации  $I(A:B)$  сохраняет непосредственно прямую физическую интерпретацию взаимоотношений между соответствующими мерами [44].

**Факт 4. Скрытая (наблюдаемая) классическая корреляция в квантовом состоянии.** В квантовой теории информации установлен следующий неожиданный факт. Условие пропорционального увеличения количества информации

$$I_{Cl}(\rho) = \max_{M_A \otimes M_B} I(A:B),$$

определённого локальными измерениями  $M_A \otimes M_B$  на состоянии  $\rho_{AB}$ , может быть нарушено при некоторых экстремальных ограничениях на начальное смешанное состояние  $\rho$ . Так, например, начальный объем информации в виде одного классического бита информации, посланного от  $A$  к  $B$ , может увеличиться на этапе приема на определённую величину в количественной мере  $I_{Cl}(\rho)$  [45]. Этот факт объясняется с позиции феномена наблюдения классической корреляции в квантовом состоянии  $\rho$ . Так как пропорциональное увеличение количества информации  $I_{Cl}(\rho)$  выполняется на классическом уровне, то феномен наблюдения корреляции является чисто квантовым эффектом, возникающим вследствие неразличимости квантовых неортогональных состояний. Поэтому существуют квантовые двухчастичные состояния, которые содержат большое количество классической корреляции, ненаблюдаемой на классическом уровне из-за диспропорционально малого для ее наблюдения необходимого количества классической информации в канале передачи (ограниченная способность передачи информации).

Существует  $(2n+1)$  квантовых битов, с помощью которых однобитовое сообщение вдвое увеличивает оптимальное количество классической взаимной информации как результат измерений между подсистемами. В общем случае для посланных  $n/2$  битов происходит увеличение указанного количества информации до  $n$  битов. Получить указанный эффект на классическом уровне невозможно в силу законов классической физики. При этом замечателен следующий факт: состояния, поддерживающие указанный эффект, не обязательно должны быть запутанными, и соответствующий классический канал обмена данными можно реализовать с помощью преобразования Адамара.

Приведенные факты составляют информационный ресурс основы КНВ, используемый при моделировании робастных БЗ для интеллектуальных НР.

**Полная корреляция и скрытая (наблюдаемая) корреляция в квантовых состояниях.** Существует уверенность, что ожидаемая вычислительная мощность квантовых вычислений исходит из существования квантового ресурса. Запутанные состояния или квантовая корреляция, в общем случае, являются яркими тому примерами. Однако не все виды корреляции имеют чисто квантовую природу, т.е. полная корреляция представляет «смесь» классической и квантовой корреляций. Важным моментом является знание о том, как и где используется классическая корреляция в КА. Например, если возможно определить и выделить классическую часть корреляции, то с помощью оптимального измерения можно извлечь некоторое дополнительное количество информации в классической форме, скрытое в квантовом состоянии, с минимальным возрастанием энтропии.

Физически перечисленные виды корреляции характеризуются количеством работы (шумом), которое необходимо совершить для устранения (разрушения) корреляций: для полной корреляции требуется количество работы до полного разрушения, для квантовой корреляции достаточно количество работы до разрушения на разделимые состояния. Однако, и в случае классической корреляции максимальная корреляция разрушается после устранения квантовой корреляции. Полное количество корреляции, измеряемое минимальным производством рандомизации и эквивалентное требованию полного разрушения всех видов корреляций в состоянии  $\rho_{AB}$ , эквивалентно квантовому количеству взаимной информации [46, 47].

**Классическая и квантовая корреляции.** Классическую взаимную информацию, содержащуюся в квантовом состоянии  $\rho_{AB}$  (до его измерения), можно оценить естественным образом как максимальную взаимную информацию, которую можно извлечь путём локальных измерений  $M_A \otimes M_B$  на состоянии  $\rho_{AB}$

$$I_{Cl}(\rho) = \max_{M_A \otimes M_B} I(A : B).$$

Здесь  $I(A : B)$  – классическая взаимная информация, определяемая в виде

$$I(A : B) \equiv H(p_A) + H(p_B) - H(p_{AB}),$$

где  $H$  – информационная энтропия и  $p_{AB}, p_A, p_B$  – функции плотности распределения вероятностей взаимного и индивидуального результатов, полученных локальными измерениями  $M_A \otimes M_B$  на состоянии  $\rho$  [45].

### **Пример П11: Взаимная информация и классическая корреляция**

Для понимания роли классической корреляции, а также её взаимосвязи с понятием взаимной информации, определим квантовую взаимную информацию для двухчастичного состояния  $\rho_{AB}$  квантовой системы в форме Стратоновича

$$I(A : B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}).$$

Рассмотрим составную систему  $AB$  в состоянии  $\rho_{AB}$ , способную пребывать в состоянии  $\rho_A$  с вероятностью  $p$  и с вероятностью  $(1-p)$  – в другом состоянии  $\rho_B$ . Для данного случая составной системы  $AB$  взаимная информация может быть вычислена в следующем виде [42]:

$$I(A : B) = 2H\left(\frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{p^2 + (1-p)^2}\right]\right) - H\left(\frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{1 + 3p^2 - 3p}\right]\right). \quad (П.5)$$

Если  $\rho_{AB}$  – разделимое состояние, то его относительная энтропия в запутанном состоянии равна нулю. Физическая интерпретация значения  $I_{Cl}(\rho)$  многозначна [45,48]:  $I_{Cl}(\rho)$  выступает максимальной классической корреляцией, извлекаемой чисто локальной процедурой измерения из состояния  $\rho$ ;  $I_{Cl}(\rho)$  соответствует классическому определению, когда состояние  $\rho$  – «классическое», т.е. диагональное в некотором (локально используемом) вычислительном базисе и отвечает классическому распределению; если  $\rho$  – чистое состояние, то  $I_{Cl}(\rho)$  задает корреляцию, определённую базисом Шмидта и эквивалентную мере перепутанных чистых состояний;  $I_{Cl}(\rho) = 0$ , если и только если

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B.$$

Известно, что некоторые подходящие меры квантовой корреляции должны удовлетворять некоторым аксиоматическим свойствам: 1) квантовая корреляция является нелокальной и не может воз-

растать при локальных процедурах измерений (свойство монотонности); 2) полная пропорциональность; 3) приращение пропорциональности; 4) непрерывность по  $\rho$ .

Физически свойство 2) означает, что протокол состояний, составленный из некоррелированного начального состояния, использующий  $l$  квантовых битов или  $2l$  классических битов (для передачи сообщений по квантовому каналу связи) и применяющий локальные операции, не может породить более чем  $2l$  битов корреляции. Свойство 3) предполагает, что при передаче сообщения в количестве  $l$  квантовых битов или  $2l$  классических битов корреляция в начальном состоянии не возрастает и не превышает величины  $2l$  битов.

Свойства 1) – 4) выполняются полностью для ряда известных мер корреляции. Эти свойства справедливы, в частности, для классической взаимной информации  $I(A : B)$ , когда передача сообщений осуществляется классическим способом. Так, например, свойства полной и приращения пропорциональности  $I(A : B)$  для классического случая следуют из факта, что

$$\max(H(p_A), H(p_B)) \leq H(p_{AB}) \leq H(p_A) + H(p_B),$$

так что, когда  $A$  посылает классическую систему  $A'$  и  $B$ , имеем:

$$I_{Cl}(\rho) = I(A; BA') \leq I(AA'; B) + H(p_{A'}).$$

Тогда свойство полной пропорциональности следует из свойства приращения пропорциональности. Это же выполняется для квантовой взаимной информации:

$$I_Q(A : B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}).$$

Неожиданным оказалось то, что свойство приращения пропорциональности нарушается для  $I_{Cl}(\rho)$  экстремальным образом в случае смешанных начальных состояний  $\rho$ : простой классический бит, посланный от  $A$  к  $B$ , может в результате привести к увеличению  $I_{Cl}(\rho)$  до некоторого большого значения. Данный феномен рассматриваем как возможность наблюдения классической корреляции в квантовом состоянии  $\rho$ . Если свойство приращения пропорциональности  $I_{Cl}(\rho)$  имеет место на классическом уровне, то феномен наблюдаемой классической корреляции является чисто квантовым эффектом. Этот результат непосредственно следует из неразличимости неортогональных квантовых состояний.

### Пример П12

Допустим, что задано начальное состояние  $\rho$ , тип передачи сообщения и соответствующее количество передаваемой информации. Возрастание корреляции можно охарактеризовать следующими функциями:

$$I_{Cl}^{(l)} = \max_{\Lambda^{(l)}} I_{Cl}(\Lambda^{(l)}(\rho)) \text{ (одностороннее классическое сообщение);}$$

$$I_{Cl}^{[l]} = \max_{\Lambda^{[l]}} I_{Cl}(\Lambda^{[l]}(\rho)) \text{ (двухстороннее классическое сообщение).}$$

Оператор  $\Lambda$  – операция над двухчастичным состоянием, которая состоит из локальных операций и содержит не более чем  $2l$  классических или  $l$  квантовых битов в сообщении. Это отражено в соответствующих верхних индексах  $(l)$  или  $[l]$ . Через  $\rho$  и  $\rho'$  обозначены состояния до и после проведения операций с обменом сообщениями,  $\rho' = \Lambda(\rho)$ . Количество корреляции  $I_{Cl}^{(l)}(\rho)$ , скрытой (ненаблюдаемой) в состоянии с  $l$  квантовыми битами при одностороннем обмене сообщениями, может быть ограничено следующим условием [45]:

$$I_{Cl}^{(l)}(\rho) - I_{Cl}(\rho) \leq l + (2^l - 1)I_{Cl}(\rho).$$

Для малых значений  $I_{Cl}(\rho)$  количество скрытой (ненаблюдаемой) корреляции при двустороннем обмене сообщениями ограничено сверху:

$$I_{Cl}^{[l]}(\rho) - I_{Cl}(\rho) \leq 2l + O\left(d^2 \sqrt{I_{Cl}(\rho)} \log I_{Cl}(\rho)\right).$$

**Скрытая (наблюдаемая) классическая корреляция в квантовом состоянии.** Обсудим ситуацию, в которой некоторое количество корреляции не доступно наблюдению при одностороннем обмене сообщениями. Начальное состояние определяется подсистемами  $A$  и  $B$  на соответствующих подпространствах размерностью  $2d$  и  $d$  в виде

$$\rho = \frac{1}{2d} \sum_{k=0}^{d-1} \sum_{t=0}^1 (|k\rangle\langle k| \otimes |t\rangle\langle t|)_A \otimes (U_t |k\rangle\langle k| U_t^\dagger)_B, \tag{П.6}$$

где операторы  $U_0 = I$  и  $U_1$  меняют исходный вычислительный базис на объединённый как  $|\langle i|U_1|k\rangle| = \frac{1}{\sqrt{d}} \quad \forall i, k$ . Тогда  $B$  выбирает случайным образом состояние  $|k\rangle$  из  $d$  состояний в двух возможных рандомизированных базисах (в зависимости от случая, когда  $t = 0$  или  $1$  в (П. 6)).

В то же время наблюдатель  $A$  имеет полную информацию о квантовом состоянии наблюдателя  $B$ . Получив необходимое количество информации в виде  $I_{Cl}^{(l)}(\rho) = \log d + 1$ ,  $A$  посылает значение  $t$  к  $B$ , который в свою очередь применяет оператор  $U_t$  к своему состоянию и измеряет значение  $k$  в вычислительном базисе. В результате  $A$  и  $B$  имеют измерение  $k$  и  $t$ , что даёт  $I_{Cl}^{(l)}(\rho) = \log d + 1$  бит корреляции.

Состояние  $\rho$  эволюционирует по следующему сценарию [45]. Пусть  $d = 2^n$ . Тогда  $A$  выбирает случайным образом  $k$  длиной в  $n$  битов и посылает к  $B$  сообщение о состоянии  $|k\rangle$  или  $H^{\otimes n}|k\rangle$  в зависимости от случайного значения бита  $t = 0$  или  $1$ . Здесь  $H$  – преобразование Адамара;  $A$  посылает  $t$  к  $B$  и позже наблюдает созданную корреляцию. Экспериментально установлено, что применения преобразования Адамара и измерения состояния квантовых битов достаточно, чтобы реализовать процедуру приготовления состояния  $\rho$  и затем извлечь скрытую в состоянии  $\rho'$  классическую корреляцию. Начальная корреляция является малой величиной,  $I_{Cl}^{(l)}(\rho) = \frac{1}{2} \log d$ . После полного измерения  $M_A$  при одностороннем обмене сообщениями конечное значение количества информации в квантовом состоянии определяется как  $I_{Cl}(\rho') = I_{Cl}^{(l)}(\rho) = \log d + 1$ , т.е. количество доступной информации увеличивается.

*Примечание Пб.* Отметим, что полное измерение  $M_A$  в базисе  $\{|k\rangle \otimes |t\rangle\}$  оптимально для системы  $A$ . Выходное значение результата измерения точно даёт информацию о том, какое чистое состояние из ансамбля выбрано. Поэтому имеется возможность применить классический, локальный процесс обработки (результата измерения) для получения информации о распределении результатов других измерений. Для системы  $A$  выбор оптимального измерения позволяет для системы  $B$  извлечь из  $I_{Cl}(\rho)$  доступное количество информации  $I_{Acc}$  об ансамбле равномерно распределённых состояний  $\{|k\rangle, (U_1 = H)|k\rangle\}_{k=0, \dots, d-1}$ .

**Доступная информация об ансамбле смешанных состояний.** В общем случае доступная информация об ансамбле смешанных состояний  $E = \{p_i, \eta_i\}$  определяется как максимальная взаимная информация между измеряемым состоянием с индексом  $i$  и результатом его измерения. Количество доступной информации  $I_{Acc}(E)$  можно охарактеризовать как максимальное значение информации, извлекаемое из квантового состояния с помощью ПООЗ-измерений с элементами только ранга 1 [8].

Допустим, что  $M = \{\alpha_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|\}_j$  означает ПООЗ-измерение с элементами ранга 1, где каждое состояние  $|\phi_j\rangle$  нормализовано и  $\alpha_j > 0$ . Тогда  $I_{Acc}(E)$  можно вычислить как:

$$I_{Acc}(E) = \max_M \left[ \underbrace{-\sum_i p_i \log p_i}_{\text{Классическая часть}} + \underbrace{\sum_i \sum_i p_i \alpha_j \langle\phi_j|\eta_i|\phi_j\rangle \log \frac{p_i \langle\phi_j|\eta_i|\phi_j\rangle}{\langle\phi_j|\mu|\phi_j\rangle}}_{\text{Квантовая часть}} \right], \quad (\text{П.7})$$

где  $\mu = \sum_i p_i \eta_i$ . Применим теперь выражение (П.7) к решению вышеупомянутой проблемы.

Ансамбль состояний задается как  $\left\{ \frac{1}{2d}, U_t |k\rangle \right\}_{k,t}$  при следующих значениях:

$i = k, t; p_{k,t} = \frac{1}{2d}, \mu = \frac{I}{2}$  и  $\langle\phi_j|\mu|\phi_j\rangle = \frac{1}{d}$ . В результате для  $I_{Acc}(E)$ , получим:

$$I_{Cl}(E) = \max_M \left[ \underbrace{\log 2d}_{\text{Классическая часть}} + \underbrace{\sum_{j,k,t} \frac{\epsilon_j}{2d} |\langle\phi_j|U_t|k\rangle|^2 \log \frac{|\langle\phi_j|U_t|k\rangle|^2}{2}}_{\text{Квантовая часть}} \right] =$$

$$= \max_M \left[ \underbrace{\log d}_{\text{Классическая часть}} + \underbrace{\sum_j \frac{\alpha_j}{d} \left( \frac{1}{2} \sum_{k,t} |\langle\phi_j|U_t|k\rangle|^2 \log |\langle\phi_j|U_t|k\rangle|^2 \right)}_{\text{Квантовая часть}} \right],$$

где использованы следующие обозначения:  $\sum_j \alpha_j = d$  и  $\forall j, t \sum_k |\langle\phi_j|U_t|k\rangle|^2 = 1$ .

Так как выполняется соотношение  $\sum_j \frac{\alpha_j}{d} = 1$ , то второе выражение является выпуклой комбинацией и может быть ограничено сверху путём операции максимизации по первому члену в виде  $I_{Cl}(E) \leq \log d + \max_{|\phi\rangle} \frac{1}{2} \sum_{k,t} |\langle\phi|U_t|k\rangle|^2 \log |\langle\phi|U_t|k\rangle|^2$ . Отметим, что член:

$$-\sum_{k,t} |\langle\phi|U_t|k\rangle|^2 \log |\langle\phi|U_t|k\rangle|^2$$

представляет сумму энтропийных мер измеряемого состояния  $|\phi\rangle$  в вычислительном и в обобщённом базисах. Такая сумма энтропий ограничена величиной  $\log d$ . Нижние границы подобного типа в теории квантовых измерений называются *неравенствами энтропийной неопределённости* (EUI), которые количественно определяют невозможность одновременного извлечения вектора  $|\phi\rangle$  из двух обобщённых (совместных) базисов.

Из приведенных соотношений следует, что  $I_{Cl}(\rho) \leq \frac{1}{2} \log d$ . Равенство можно достигнуть, если  $B$  измеряется в вычислительном базисе:

$$I_{Cl}(\rho) = \frac{1}{2} \log d, \quad I_{Cl}^{(l)}(\rho) - I_{Cl}(\rho) = 1 + \frac{1}{2} \log d.$$

Отметим, что свойство приращения пропорциональности выполняется для многократных копий состояния  $\rho$ . Wootters показал [8], что доступная информация из  $m$  независимых копий ансамбля  $E$  разделённых состояний аддитивна,  $I_{Acc}(E^{\otimes m}) = mI_{Acc}(E)$ . Отсюда следует, что для рассматриваемого случая имеем  $I_{Cl}(\rho^{\otimes m}) = mI_{Cl}(\rho)$ .

### Пример П13

Пусть задано двухчастичное состояние  $\rho_{AB}$ . Определим возможную меру классической корреляции между подсистемами  $A$  и  $B$  как [42]

$$Cor_B(\rho_{AB}) = \max_B \left[ S(\rho_A) - \sum_i p_i S(\rho_A^i) \right], \tag{П.8}$$

где  $\rho_A = Tr_B(\rho_{AB})$  – редуцированная матрица плотности. Энтропия фон Неймана  $S(\rho) = -Tr(\rho \log \rho)$ . Условная матрица плотности  $\rho_A^i$  определяется через матрицы плотности состояния  $A$  после реализации измерения  $B_i$  над состоянием  $B$  в виде:

$$\rho_A^i = \frac{Tr_B(B_i \rho_{AB})}{Tr_{AB}(B_i \rho_{AB})}.$$

Вероятность определить  $A$  в состоянии  $\rho_A^i$  есть  $p_i = Tr_{AB}(B_i \rho_{AB})$ . Мера корреляции (П.8) имеет простую физическую интерпретацию: если  $A$  и  $B$  не коррелированы, то маргинальное значение энтропии  $[S(\rho_A)]$  состояния  $A$  и взвешенное усреднённое значение энтропии  $A$  после ПООЗ-измерения  $\left[ \sum_i p_i S(\rho_A^i) \right]$  над состоянием  $B$  дает как следствие  $Cor_B(\rho_{AB}) = 0$ , так как для некоррелированной системы  $AB$  состояние  $A$  не зависит от действия ПООЗ – измерения над состоянием  $B$ . Более того, отметим, что имеет место соотношение  $\rho_A = \sum_i p_i \rho_A^i$ ; тогда для данного ПООЗ-измерения над системой  $B$  выражение  $\left[ S(\rho_A) - \sum_i p_i S(\rho_A^i) \right]$  задает дефект энтропии, определение которого дано в [49]. Следовательно, классическую корреляцию  $Cor_B(\rho_{AB})$  можно рассматривать как максимальное осреднённое возрастание энтропии системы  $A$ , когда состояние  $\rho_A^i$  (после завершения измерения  $B_i$  над системой  $B$ ) является специфически сравнимым с ситуацией, в которой известны только смешанные состояния  $\rho_A$ .

Классическая корреляция устанавливает меру силы корреляции двух подсистем без указания приоритета подсистемы, используемой для извлечения данной корреляции. Количество квантовой взаимной информации  $I(A:B)$  двухчастичной составной системы  $AB$  можно декомпозировать на дефицит информации (или работы)  $\Delta$  и дефицит классической информации  $\Delta_{cl}$  в виде  $I = \Delta_{cl} + \Delta$ . Это приводит к естественной аналогии с процессом декомпозиции для случая количества взаимной информации, используемой при описании различных мер классической корреляции [46]. Количество оцененной классической корреляции и относительной энтропии ( $E_{REn}$ ) в запутанных состояниях

также не превышает в сумме количества взаимной информации фон Неймана между двумя подсистемами, т.е.  $I(\rho_{AB}) > [C_B(\rho_{AB})]_{opt} + E_{REn}$ .

Физически это означает, что выбор неоптимального ПООЗ-измерения может разрушить полную корреляцию. Естественно, что при рассмотрении всех возможных ПООЗ-измерений для данного состояния оптимальный класс ПООЗ-измерений не может устранить полную корреляцию. Другой альтернативой, которая делает совместимыми понятия классической корреляции и взаимной информации, является возможность различных определений мер квантовых корреляций, отличных от представления последних в виде  $(E_{REn})$ .

Одним из возможных кандидатов служит квантовый беспорядок [50].

**Пример П14: Взаимная информация и квантовый беспорядок**

В противоположность к определению классической условной энтропии квантовая условная энтропия является зависимой величиной от процедуры измерения, проводимой над исследуемой системой. Мерой квантового беспорядка выступает [50, 51]:  $\delta(A : B) = I(A : B) - J(A : B)_{\{\Pi_i^B\}}$ . Величина  $J$  задает информацию о системе  $B$  по результатам серии измерений  $\{\Pi_i^B\}$ :

$$J(A : B)_{\{\Pi_i^B\}} = S(A) - S(A|\{\Pi_i^B\}) = S(A) - \sum_i^* p_i S(\rho_i^A),$$

где  $p_i^*$  и  $\rho_i^{A*}$  изначально выбраны как специальные случаи  $p_i$  и  $\rho_i^A$ , когда множества измерений формируются как ограниченные одномерные проекции  $\Pi_i^B$ .

Приведенное определение квантового беспорядка четко описывает неразделимую зависимость квантовой условной энтропии от процедуры измерения. Мера квантового беспорядка равна нулю, если существует такое (хотя бы одно) измерение, для которого эта мера принимает нулевое значение. Поэтому минимальному значению меры квантового беспорядка сопоставляют квантовую корреляцию. При выборе соответствующего множества измерений над системой  $B$ , определённого как множество одномерных проекций, нетрудно проверить, что множество измерений, при которых минимизируется квантовый беспорядок, т.е. максимизируется величина  $J$ , эквивалентно ПООЗ-измерениям, оптимизирующим меру классических корреляций бинарных состояний. Данный результат следует из определения этих количественных мер и результата оптимизации классических корреляций при использовании только проективных измерений.

Следовательно, имеем  $\max [J(A : B)_{\{\Pi_i^B\}}] = Cor_B(\rho_{AB})$ . Поэтому

$$I(A : B) = Cor_B + \min_{\{\Pi_i^B\}} \delta(A : B),$$

т.е. для бинарных состояний классическая корреляция и квантовый беспорядок выступают составными компонентами в оценке взаимной информации. Поэтому не существует измерения, извлекающего классическую корреляцию и способного изменить значение взаимной информации между двумя подсистемами при добавлении классической корреляции к относительной энтропии. Это подтверждает утверждение, что удобнее использовать понятие квантового беспорядка в качестве квантовой составной части для классической корреляции вместо относительной энтропии.

## Список литературы

1. Litvintseva L.V., Ulyanov S.S., Takahashi K. et al. Intelligent robust control design based on new types of computation. Pt 1. New soft computing technology of KB-design of smart control simulation for non-linear dynamic systems. – Milan: Note del Polo (Ricerca), Universita degli Studi di Milano. – 2004. – Vol. 60.
2. Litvintseva L.V., Ulyanov S.V. et al. Soft computing optimizer for intelligent control systems design: the structure and applications // J. Systemics, Cybernetics and Informatics (USA). – 2003. – Vol. 1. – № 5.
3. Ulyanov S.V., Litvintseva L.V. Design of self-organized intelligent control systems based on quantum fuzzy inference: Intelligent system of systems engineering approach // Proc. of IEEE Internat. Conf. on Systems, Man and Cybernetics (SMC'2005). – Hawaii, USA. – 2005. – Vol. 4.
4. Ulyanov S.V., Litvintseva L.V., Ulyanov S.S. et al. Self-organization principle and robust wise control design based on quantum fuzzy inference // Proc. of Internat. Conf. ICSCCW'2005. – Antalya, Turkey. – 2005.
5. Litvintseva L.V. Ulyanov S.V., Takahashi K. et al. Design of self-organized robust wise control systems based on quantum fuzzy inference // Proc. of World Automation Congress (WAC'2006): Soft computing with Industrial Applications (ISSCI'2006). – Budapest, Hungary. – 2006. – Vol. 5.
6. Кураваки И., Литвинцева Л.В., Ульянов С.В. и др. Построение робастных баз знаний нечётких регуляторов для интеллектуального управления существенно нелинейными динамическими системами // Изв. РАН. ТИСУ. – 2004. – № 4.
7. Литвинцева Л.В., Ульянов С.В., Ульянов С.С. Построение робастных баз знаний нечётких регуляторов для интеллектуального управления существенно нелинейными динамическими системами. II // Изв. РАН. ТИСУ. – 2006. – № 5.
8. Nielsen M.A., Chuang I.L. Quantum Computation and Quantum Information. – Cambridge Univ. Press, UK. – 2000.
9. Marinescu D.C., Marinescu G.M. Approaching quantum computing. – Pearson Prentice Hall, USA. – 2005.
10. Ulyanov S.V., Litvintseva L.V., Ulyanov S.S. et al. Quantum information and quantum computational intelligence: Backgrounds and applied toolkit of information design technologies. – Milan: Note del Polo (Ricerca), Universita degli Studi di Milano. – 2005. – Vol. 78-86.
11. Dalla Chiara M.L., Guintini R., Greechie R. Reasoning in quantum theory: Sharp and unsharp quantum logic. – Holland, Kluwer Acad. Publ. – 2004.
12. Pati A.K. General impossible operations in quantum information // Phys. Review. – 2002. – Vol. A66. – № 6.
13. Zhou D., Zeng B., You L. Quantum information cannot be split into complementary parts // Physics Letters. – 2006. – Vol. A352. – № 1/2.
14. Kashefi E., Kent A., Vedral V. et al. Comparison of quantum oracles // Phys. Review. – 2002. – Vol. A65. – № 5.
15. Bessen A.J. The power of various real-valued quantum queries // J. of Complexity. – 2004. – Vol. 20. – № 5.
16. Atici A. Comparative computational strength of quantum oracles // arXiv: quant-ph/0312107v1. – 2003.
17. Azuma H. A quantum algorithm for examining oracles // arXiv: quant-ph/0408013v1. – 2004.
18. Iwama K., Kawachi A., Raymond R. et al. Robust quantum algorithms for oracle identification // arXiv: quant-ph/0411204 v1. – 2004.
19. Wojcik A., Chhajlany R.W. Quantum-classical correspondence in the oracle model of computation // arXiv: quant-ph/0506248v1. – 2005.
20. Баргатин И.В., Гришанин Б.А., Задков В.Н. Запутанные квантовые состояния атомных систем // УФН. – 2001. – Т. 171. – № 6.

21. Jozsa R., Linden N. On the role of entanglement in quantum computational speed-up // *Proceedings R. Soc. Lond.* – 2003. – Vol. 459. – № 2036.
22. Vidal G. Efficient classical simulation of slightly entangled quantum computation // *Phys. Review Letters.* – 2003. – Vol. 91. – № 14.
23. Ulyanov S.V. System and method for control using quantum soft computing // *US patent.* – № 6,578,018B1. – 2003.
24. Клышко Д.Н. Основные понятия квантовой физики с операциональной точки зрения // *УФН.* – 1998. – Т. 168. – № 9.
25. Khrennikov A. Representation of the Kolmogorov model having all distinguishing features of quantum probabilistic model // *Physics Letters.* – 2003. – Vol. A3 16. – № 3.
26. Ghisi F., Ulyanov S.V. The information role of entanglement and interference in Shor quantum algorithm gate dynamics // *J. Modern Optics.* – 2000. – Vol. 47. – № 12.
27. Selinger P. Towards a quantum programming language // *Math Structures Comp Sciences.* – 2004. – Vol. 14. – № 4.
28. Brunet O., Jorrand Ph. Dynamic quantum logic for quantum programs // *Internat. J. Quantum Information.* – 2005. – Vol. 2. – № 1. – P. 45-54.
29. Altenkirch T., Grattage J. An algebra of pure quantum programming // *arXiv: quant-ph/0506012v1.* – 2005.
30. Feng Y., Duan R., Ji Z. et all. Semantics of purely quantum programming language // *arXiv: quant-ph/0507043v2.* – 2005.
31. Maurer W., Semantics and simulation of communication in quantum programming // *arXiv: quant-ph/0511145v1.* – 2005.
32. Zuliani P., Compiling quantum programs // *Acta Informatica.* – 2005. – Vol. 41. – № 7/8.
33. Lalire M. Relations among quantum processes: Bisimilarity and congruence // *arXiv: quant-ph/0603274v1.* – 2006.
34. Tafliovich A., Hehner E.C.R. Quantum preductive programming // *arXiv: quant-ph/0602156v1.* – 2006.
35. Килин С.Я. Квантовая информация // *УФН.* – 1999. – Т. 169. – № 5.
36. Холево А.С. Введение в квантовую теорию информации. – М.: Наука. – 2002.
37. Keyl M. Fundamentals of quantum information theory // *Physical Reports.* – 2002. – Vol. 369. – № 5.
38. Cerf N.J., Adami C. Negative entropy and information in quantum mechanics // *Phys. Review Letters.* – 1997. – Vol. 79. – № 26.
39. Horodecki M., Oppenheim J., Winter A. Partial quantum information // *Nature.* 2005. – Vol. 436. – № 7051.
40. Henderson L., Vedral V. Classical, quantum and total correlation // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 2001. – Vol. 34. – № 35.
41. Sanctuary B.C. Correlations in entangled states // *arXiv: quant-ph/0508238v1.* – 2005.
42. Hamieh S., Kobes R., Zaraket H. Positive-operator-valued measure optimization of classical correlations // *Phys. Review.* – 2004. – Vol. A70. – № 5.
43. Hamieh S., Qi J., Siminovitch D. et all. Extraction of classical correlations from a bipartite quantum system // *Phys. Review.* – 2003. – Vol. A67. – № 1.
44. Groisman B., Popescu S., Winter A. Quantum, classical, and total amount of correlations in quantum state // *Phys. Review.* – 2005. – Vol. A72. – № 3.
45. DiVincenzo D.P., Horodecki M., Leung D.W. et all. Locking classical correlation in quantum states // *Phys. Review Letters.* – 2004. – Vol. 92. – № 6.
46. Horodecki M., Horodecki P., Horodecki R. et all. Local versus nonlocal information in quantum-information theory: Formalism and phenomena // *Phys. Review.* – 2005. – Vol. A71. – № 6.

47. Maruyama K., Brukner C., Vedral V. Thermodynamical cost of accessing quantum information // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 2005. – Vol 38. – № 32.
48. Christandl M., Winter A. Uncertainty, monogamy, and locking of quantum correlations // *IEEE Transactions on Information Theory.* – 2005. – Vol. 51. – № 9.
49. Levitin L.B. Conditional entropy and information in quantum systems // *Chaos, Solitons and Fractals.* – 1999. – Vol. 10. – № 10.
50. Olivier H., Zurek W.H. Quantum discord: A measure of the quantumness of correlations // *Phys. Review Letters.* – 2002. – Vol. 88. – № 1.
51. Zurek W.H. Quantum discord and Maxwell's demon // *Phys. Review.* – 2003. – Vol. A67. – № 1.
52. Giraldi G.A., Portugal R., Thess R.N. Genetic algorithms and quantum computation // arXiv: cs.NE/0403003v1. – 2004.
53. Ulyanov S.V., Rizzotto G.G., Kurawaki I. et al. Method and hardware architecture for controlling a process or for processing data based on quantum soft computing // *PCT Patent. WO № 01/67186 A1.* – 2000.
54. Петров Б.Н., Уланов Г.М., Ульянов С.В. и др. Проблемы управления релятивистскими и квантовыми динамическими системами. – М.: Наука, 1982.
55. Гольденблат И.И., Ульянов С.В. Введение в теорию относительности и её приложения к новой технике. – М.: Физматгиз, 1979.
56. Ulyanov S.V., Kurawaki I., Panfilov S.A. et al. Information analysis of quantum gates for simulation of quantum algorithms on classical computers // *Proceedings of Intern. Conf. on Quantum Communication, Measurements and Computing (QCM&C'2000).* – Capri. Italy, 2000. Kluwer Acad./Plenum Publ. – 2001. – Pp. 207-214.
57. Zurek W.H. Probabilities from entanglement, Born's rule  $p_k = |\psi_k|^2$  from envariance // *Phys. Review.* – 2005. – Vol. A71. – № 5.
58. Ulyanov S.V., Litvintseva L.V., Ulyanov S.S. et al. Computational intelligence with quantum game's approach and robust decision-making in communication information uncertainty // *Proceedings of Internat. Conf. on Computational Intelligence (ICCI'2004).* – Nicosia. North Cyprus. – 2004. – Pp. 172-187.
59. Ulyanov S.V., Takahashi K., Litvintseva L.V. et al. Quantum soft computing via robust control: Classical efficient simulation of wise quantum control in non-linear dynamic systems based on quantum game gates // *Proceedings of 2nd Internat. Conf. on Soft Computing, and Computing with Words in System Analysis, Decision and Control (ICSCCW'2003).* – Antalya. Turkey. – 2003. – Pp. 11-41.
60. Ulyanov S.V., Degli Antoni G., Yamafuji K. et al. Physical limits and information bounds of micro-control. Pt 2: Quantum soft computing and quantum search algorithms // *Proceedings Internat. Symp. Micro-machine and Human Science (MHS'98).* – Nagoya. Japan. – 1998. – Pp. 217-224.
61. Ulyanov S.V., Kurawaki I., Litvintseva L.V. et al. Applied quantum soft computing for optimization of KB structures in fuzzy controllers: Introduction // *Proceedings World Cong. on Intelligent Systems on Industrial Automation (WCIS'2000).* – Tashkent. Uzbekistan. – 2000. – Pp. 34-57.
62. Ulyanov S.V., Litvintseva L.V., Kurawaki I. et al. Applied quantum soft computing for global optimization and robust control design: Methodological approach // *Proceedings 4th Internat. Conf. on Applications of Fuzzy Systems and Soft Computing (ICAFS' 2000).* – Siegen. Germany. – 2000. – Pp. 190-213.
63. Ulyanov S.V., Takahashi K., I. Kurawaki et al. Quantum soft computing: Quantum global optimization and quantum learning processes – Application in AI, informatics and intelligent control processes // *Proc. of the 7th World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics (SCI'2003).* – Florida. Orlando, USA. – 2003. – Vol. 7. – Pp. 422-427.
64. Ulyanov S.V. Quantum soft computing in control process design: genetic algorithms and quantum neural network approaches // *Proceedings of World Automation Congress (WAC'2004): Soft computing with Industrial Applications (ISSCI'2004).* – Seville. Spain. – 2004. – Vol. 17. – Pp. 99-104.