УДК 629.7.052, 62.50

ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ ЗАДАЧ В УСЛОВИЯХ СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Соловьев Владимир Николаевич

Доктор физико-математических наук, профессор;
ГОУ ВПО Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,
Филиал «Дмитров»;
141800, Московская обл., г. Дмитров, ул. Махалина, 15;
e-mail: soloviov-vn@rambler.ru.

В этой статье рассматривается задача восстановления значений неизвестного параметра из вектора случайных данных при наличии априорных ограничений на параметры и вектор случайных ошибок. Показано, что полученная ранее автором теорема двойственности дает возможность применения численных алгоритмов оптимального гарантирующего оценивания для решения плохо обусловленных задач в условиях стохастической неопределенности и имеющих физический смысл априорных ограничений на параметры системы.

Ключевые слова: плохо обусловленные задачи, априорные ограничения, оптимальное гарантирующее оценивание.

NUMERICAL ALGORITHMS FOR SOLUTION OF ILL-POSED PROBLEMS WITH STOCHASTIC UNDEFINITY

Solov'ev Vladimir

Doctor of Science Physics and Mathematics, professor;
Dubna International University of Nature, Society, and Man,
Branch «Dmitrov»;
141800, Dmitrov, Moscow reg., Makhalina str., 15;
e-mail: soloviov-vn@rambler.ru.

In this paper we consider the problem of recovery of unknown parameters from random observation vector under a priori constraints on parameter vector and random observation errors. It is shown that duality theory allows to use our numerical algorithms derived earlier for optimal guaranteed estimation to solution of ill-posed problems with stochastic indefinities and a priori constraints on solution parameters which have definite physical sense.

Keywords: ill-posed problems, a priori constraints, optimal guaranteed estimation.

Введение

Мы будем рассматривать задачу восстановления заданного скалярного параметра из вектора данных $u = Az + \xi$. Эта задача плохо обусловлена, если отношение наибольшего к наименьшему сингулярному числу матрицы A велико. В этом случае, малые ошибки в векторе данных u могут привести к большим ошибкам в решении системы z. Как отмечается в монографии [38, с.130]: «В этих условиях необходимо внесение в алгоритм какой-либо априорной нетривиальной дополнительной информации, с помощью которой только и можно надеяться отфильтровать вуалирующие ложные варианты и выделить решение, наиболее близкое к истинному. Любые чисто математические ухищрения, не привлекающие дополнительных априорных данных, эквивалентны попытке создания информационного perpetuum mobile, производящего информацию из ничего».

Нужно добавить к этому, что положение осложняется еще тем, что особенностью этих задач фактически являются избыточность имеющихся данных и наличие немоделируемых возмущений. Если это не учитывать, то можно сильно исказить полученное решение [5, 17, 19, 37, 40]. Применяемый в настоящей работе способ уменьшения этих ошибок состоит в учете стохастической неопределенности и использовании априорной информации $z \in \mathrm{Z}$ (примеры имеющих физический смысл априорных ограничений на решение системы $u = Az + \xi$, будут рассмотрены в п.3).

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную модель:

$$u = Az + \xi, \tag{1.1}$$

в которой, $u \in R^N$ – вектор измерений, $z \in R^m$ – неизвестный нам вектор ($z \in Z$), $\xi \in R^N$ – вектор случайных ошибок ξ_j, имеющих средние значения $E\xi_j$ и ковариационную матрицу:

$$\mathrm{K} = \left\|\kappa_{js}\right\| = \mathrm{E}(\xi_j - \mathrm{E}\xi_j)(\xi_s - \mathrm{E}\xi_s), \;\; j, s = 1,...\mathrm{N}. \tag{1.2}$$

Предполагается, что выполнены следующие статистические гипотезы:

а) дисперсии ошибок измерений ξ_j ограничены:

$$\mathrm{E}\xi_j = 0, \;\; j = 1,...,\mathrm{N}; \tag{1.3}$$

$$\kappa_{jj} \le \sigma_j^{\;2}, \quad j = 1,...,\mathrm{N}; \tag{1.4}$$

б) коэффициенты корреляции $r_{js} := \kappa_{js}\left(\kappa_{jj}\kappa_{ss}\right)^{-1/2}$ ошибок измерений ξ_j и ξ_s ограничены:

$$\left|r_{js}\right| \le w_{js}, \quad j, s = 1,...,\mathrm{N}, \tag{1.5}$$

где $\left\|w_{js}\right\|$ – положительно определенная матрица с элементами $w_{js} \ge 0, \;\; j \ne s, \;\; w_{ss} = 1,$ и $w_{js}, \;\; \sigma_j^{\;2}$ – априорно заданные числа.

Наряду с ограничениями (1.5) можно также рассматривать случай положительной корреляции ошибок измерений

$$\mathrm{E}\xi_i = 0, \quad 0 \le r_{ij} \le w_{ij}, \;\; i, j = 1,...,\mathrm{N}. \tag{1.6}$$

Обозначим через *K* множество допустимых ковариационных матриц (к указанным ограничениям следует добавить требование неотрицательной определенности матрицы ковариаций (1.2)). Примеры априорных ограничений на вектор случайных ошибок будут рассмотрены в п.4.

Здесь и далее мы будем рассматривать линейные оценки $\hat{\ell} =< x, u > +t, \;\; x \in R^{\mathrm{N}}, \;\; t \in R$ заданного скалярного параметра $\ell =< c, z >:= c^T z, \;\; c \in R^m$, которые имеют ошибку:

$$\delta\ell := \hat{\ell} - \ell =< x, \xi > + < \mathrm{A}^{\mathrm{T}} x - c, z > +t.$$

Максимальное (гарантированное) значение среднеквадратичной ошибки $\mathrm{E}\delta\ell^2$ будет равно [25]:

$$d(\hat{\ell}) = \max_{\mathrm{K} \in K} < \mathrm{K}x, x > + \max_{z \in \mathrm{Z}} (< \mathrm{A}^{\mathrm{T}} x - c, z > +t)^2. \tag{1.7}$$

Чтобы найти минимаксную оценку $\hat{\ell}_* =< x_*, \;\; u > +t_*$, нужно решить задачу:

$$D_{\min} = \min_{\hat{\ell} =< x, u > +t} (d(\hat{\ell})). \tag{1.8}$$

Стоит отметить, что регрессионная матрица A произвольна. Вполне может быть, что $\mathrm{N} < m$, но даже если $\mathrm{N} \ge m$, информационная матрица $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{K}^{-1}\mathrm{A}$ может быть вырожденной. Случай квадратных регрессионных матриц встречается при решении линейных алгебраических систем $Az = u$. Они возникают также после дискретизации линейных интегральных уравнений, так что указанные в данной статье алгоритмы можно использовать в таких различных областях, как компьютерная диагностика в медицине, задачи распознавания образов, синтеза оптических элементов, сейсмологии, метеорологии, и так далее [1-4, 6-11, 13-16, 18, 20, 27-36, 39].

2. Теорема двойственности

В данной работе используются теоремы двойственности, ранее полученные автором при общих предположениях о виде априорного множества K [25, теоремы 3.2.1 и 3.4.1]. Для удобства чтения настоящей работы приведем здесь формулировки этих теорем. Далее всюду предполагается, что априорное множество Z является выпуклым телом, т.е. выпукло, компактно и имеет внутренние точки.

Теорема 2.1.

Если множество Z *центрально-симметрично, то справедлива двойственность*:

$$D_{\min} = \max_{\mathrm{K}\in K, z\in Z} \frac{<c,z>^2}{1+<\mathrm{K}^{-1}\mathrm{A}z, \mathrm{A}z>}. \tag{2.1}$$

Если $\mathrm{K}_* \in K,\ z_* \in \mathrm{Z}$ *– решение двойственной задачи (2.1), то:*

$$\hat{\ell}_* = \frac{<c,z_*>}{1+<\mathrm{K}_*^{-1}\mathrm{A}z_*, \mathrm{A}z_*>} \cdot <\mathrm{K}_*^{-1}\mathrm{A}z_*, u> - \tag{2.2}$$

это решение исходной задачи (1.7), (1.8).

Если априорное множество Z не симметрично относительно нуля, то конструируемые нами алгоритмы будут по-прежнему применимы, но множество Z следует симметризовать относительно нуля. Обозначим через $\delta^*(\psi \mid \mathrm{Z})$ опорную функцию множества Z в направлении вектора ψ .

Теорема 2.2.

Пусть Z *будет произвольным выпуклым телом, а*

$$\Omega := \{ z = (z_1 - z_2)/2 :\ z_1, z_2 \in \mathrm{Z} \} \tag{2.3}$$

будет его симметричным дубликатом. Тогда

$$D_{\min} = \max_{\mathrm{K}\in K, z\in\Omega} \frac{<c,z>^2}{1+<\mathrm{K}^{-1}Az, Az>}. \tag{2.4}$$

Если $\mathrm{K}_* \in K$, $z_* \in \Omega$ *– решение двойственной задачи (2.4), а* $\hat{\ell}_* =< x_*, u >$ *– это оценка (2.2), то оценка*

$$\tilde{\ell}_* = \hat{\ell}_* - [\delta^*(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}x_* - c \mid \mathrm{Z}) - \delta^*(c - \mathrm{A}^{\mathrm{T}}x_* \mid \mathrm{Z})]/2 \tag{2.5}$$

является решением исходной задачи (1.7), (1.8).

3. Примеры априорных ограничений на решение системы

Априорные ограничения $z \in \mathrm{Z}$ могут быть результатом неотрицательности решения или его монотонности. Иногда мы знаем о верхних границах на его абсолютные значения:

$$|z_j| \le \mathrm{M}_j,\ j = 1,..,m, \tag{3.1}$$

или на значения его производной:

$$| z_j - z_{j-1} | \le \mathrm{M}_j , j = 1,..,m .$$

В монографии [32] были исследованы общие классы априорных ограничений на решение системы $u = \mathrm{A}z + \xi$:

1. функции ограниченной вариации

$$\sum_{j=1}^{m} | z_j - z_{j-1} | \le c, \ \ z_0 = 0;$$

2. монотонно убывающие неотрицательные функции

$$z_j - z_{j-1} \le 0, \ \ 0 \le z_j \le c, \ \ \ j = 1,..,m, \ \ \ z_0 = 0;$$

3. неотрицательные выпуклые функции

$$2z_j \le z_{j-1} + z_{j+1}, j = 2,..,m-1, \ \ j = 2,..,m-1, \ \ 0 \le z_j \le c, \ \ j = 1,..,m;$$

4. неотрицательные выпуклые убывающие функции

$$z_j - z_{j-1} \le 0, \ \ 0 \le z_j \le c, \ \ \ j = 1,..,m, \ \ \ z_0 = 0,$$

$$2z_j \le z_{j-1} + z_{j+1} \ \ j = 2,..,m-1.$$

4. Априорные ограничения на вектор случайных ошибок

В работах [23-24] автором были описаны применения методов оптимального гарантирующего оценивания к численному решению некоторых задач из отрасли космической промышленности. При этом рассматривались следующие варианты априорных ограничений (далее r_{js} – коэффициент корреляции ошибок измерений ξ_j и ξ_s):

1. случай ограниченной корреляции ошибок измерений [5]

$$\mathrm{E}\xi_j = 0, \ \ \ | r_{js} | \le \kappa, \ \ \ \ (0 < \kappa < 1), \ \ \ j \ne s; \tag{4.1}$$

2. случай затухающей корреляции ошибок измерений [37,42]

$$\mathrm{E}\xi_j = 0, \ \ \ | r_{js} | \le \exp(-\alpha \, | t_j - t_s |), \ \ \ j \ne s; \tag{4.2}$$

В обоих случаях предполагается, что дисперсии ограничены:

$$\kappa_{jj} \le \sigma_j^2, \ \ \ j = 1,...,\mathrm{N}.$$

В [42] даны примеры намного более общих ограничений такого рода.

5. Численные алгоритмы

Эти алгоритмы основываются на различных представлениях двойственной задачи, каждое из которых приводит к иному классу экстремальных задач, имеющих хорошие свойства. Фактически, существует широкий выбор программного обеспечения, которое может быть использовано в рассматриваемых здесь задачах.

Для симметричных априорных ограничений можно переписать двойственную задачу (2.1) как

$$D_{\min} = \max_{z \in \mathrm{Z}} \ g(z), \tag{5.1}$$

где

$$g(z) := \frac{< c, z >^2}{1 + 2D^*(Az)}, \tag{5.2}$$

$$2D^*(y) = \min_{\mathrm{K}\in K} < \mathrm{K}^{-1} y, y > . \tag{5.3}$$

Как было показано в работе [25], сопряженная функция (5.3) выпукла, дифференцируема и во многих случаях может быть вычислена аналитически. Поэтому можно попытаться максимизировать дифференцируемую функцию *g(z)* на выпуклом множестве Z. Следующий результат говорит, что любой ее локальный максимум является глобальным.

Лемма 5.1.

Множества уровня $g(z) \geq \alpha \geq 0$ функции (5.2) состоят из двух выпуклых множеств, симметричных друг другу относительно нуля.

Доказательство: действительно, множества

$$\mathrm{A}_{\pm} := \{z \in R^m : (\alpha + 2\alpha D^*(\mathrm{A}z))^{1/2} \pm < c, z > \leq 0\}$$

выпуклы, ибо выпукла функция $(\alpha + 2\alpha D^*(\mathrm{A}z))^{1/2}$ (это следует из выпуклости и монотонности функции $t \to (\alpha + 2\alpha t^2)^{1/2}$, а также выпуклости функции $(D^*(\mathrm{A}z))^{1/2}$ [26, с.162]). Поскольку $g(-z) = g(z)$, то $\mathrm{A}_+ = -\mathrm{A}_-$.

Доказанная выше теорема двойственности сводит исходную задачу (1.7), (1.8), которая обычно является негладкой, к гладкой задаче (5.1) – (5.2). Последняя может быть решена методами проекции градиента [22-25], которые довольно широко распространены, например, для априорных ограничений (3.1).

Наша дальнейшая цель состоит в том, чтобы для априорных ограничений из п.3 свести проблему к простейшим ограничениям неотрицательности всех переменных.

6. Линейные априорные ограничения на решение системы

Важный класс априорных ограничений составляют линейные ограничения. Если они симметричны относительно нуля, соответствующее априорное множество может быть представлено как:

$$Z = \{\ z \in R^m : \ \ \left| < z, a_j > \right| \leq 1,\ j = 1,\ldots,r\ \}. \tag{6.1}$$

Лемма 6.1.

Полярой [21] множества Z является множество:

$$Z^O = \{\ e \in R^m : \ \ e = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j a_j,\ \sum_{j=1}^{r} \left|\alpha_j\right| \leq 1\ \}. \tag{6.2}$$

Доказательство: обозначим правую часть (6.2) через E и проверим, что $E^O = Z$:

$$E^O = \left\{ z \in R^m : < e, z > \leq 1\ \forall e \in E \right\} =$$

$$= \left\{ z \in R^m : \sum_{j=1}^{r} \alpha_j < z, a_j > \leq 1 \ \ \forall \alpha_j, j = 1,\ldots r : \sum_{j=1}^{r} \left|\alpha_j\right| \leq 1 \right\} =$$

$$= \left\{ z \in R^m : \max_{1\leq j\leq r} \left| < z, a_j > \right| \leq 1 \right\} = Z.$$

Поскольку множество E замкнуто, выпукло и центрально-симметрично, то $Z^O = (E^O)^O = E$, как и требовалось в (6.2).

Из этой леммы следует, что априорное множество (6.1) можно представить в виде:

$$Z = \{ \ z \in R^m : \quad z = \sum_{i=1}^{k} \theta_i b_i, \quad \sum_{i=1}^{k} |\theta_i| \le 1 \ \},$$

потому что поляра Z^O, так же как и само множество Z, имеет вид:

$$Z^O = \{ \ e \in R^m : |< e, b_i >| \le 1, \ i = 1,...,k \ \}.$$

Это означает, что априорное множество (6.1) всегда можно заменить на более простое множество:

$$\Theta = \{ \ \theta \in R^k : \ \sum_{i=1}^{k} |\theta_i| \le 1 \ \}, \tag{6.3}$$

поскольку теорема двойственности (2.1) сохраняет свою форму после линейной замены переменных:

$$z = \sum_{i=1}^{k} \theta_i b_i. \tag{6.4}$$

Следующий результат показывает, что для линейных априорных ограничений (6.1) минимаксная оценка может быть найдена методами проекции градиента на неотрицательном ортанте.

Лемма 6.2.

Предположим, безо всякой потери общности, что априорные ограничения есть $\sum_{j=1}^{k} |\theta_j| \le 1$.

Тогда:

$$D_{\min}/2 = \max_{p \ge 0, q \ge 0} \{ \ < c, p - q > - D^*(\mathrm{A}(p-q)) - \left(\sum_{j=1}^{k} (p_j + q_j) \right)^2 / 2 \ \} \tag{6.5}$$

Если $p_*, q_* \in R^k$ *– решение задачи (6.5), то вектор* $\theta_* = p_* - q_*$ *является решением двойственной задачи (2.1), а оценка* $\hat{\ell}_* =< x_*, u >$*, где* $x_* = \nabla D^*(A\theta_*)$ *является решением исходной задачи (1.7) – (1.8).*

Доказательство: воспользуемся равенствами [25, с. 76]:

$$D_{\min}/2 = \min_{x, \ x_0} \left\{ D(x) + D_0(x_0) \middle| \mathrm{A}^{\mathrm{T}} x + x_0 = c \right\}$$

$$D_{\min}/2 = \max_{\theta \in R^k} \{< c, \theta > - D^*(A\theta) - D_0^*(\theta)\}, \tag{6.6}$$

где

$$2D(x) := \max_{\mathrm{K} \in K} < \mathrm{K}x, x >, \quad 2D_0(x_0) := \max_{\theta \in \Theta} < x_0, \theta >^2 = \delta^{*2}(x_0 \mid \Theta).$$

С учетом [21, Следствия 15.3.1]) и конкретного вида (6.3) для множества Θ имеем:

$$2D_O^*(\theta) = \delta^{*2}(\theta | \Theta^O) = \left(\sum_{j=1}^{k} |\theta_j| \right)^2.$$

Поэтому двойственная задача (6.6) здесь принимает вид:

$$D_{\min}/2 = \max_{\theta \in R^k} \left\{ < c,\theta > -D^*(A\theta) - \left(\sum_{j=1}^{k} \left|\theta_j\right| \right)^2 /2 \right\}. \quad (6.7)$$

Пусть $p \geq 0$ и $q \geq 0$ будут произвольные векторы с неотрицательными компонентами. Тогда вектор $\theta = p - q$ пробегает евклидово пространство R^k и удовлетворяет неравенству

$$\sum_{j=1}^{k} \left|\theta_j\right| \leq \sum_{j=1}^{k} (p_j + q_j), \quad (6.8)$$

поэтому правая часть равенства (6.5) не превосходит величины (6.7).

Если же p_*, q_* – это решение задачи (6.5), то $p_j^* \cdot q_j^* = 0, j = 1,...,k$ (если нет, то найдутся неотрицательные числа $\alpha_j, j = 1,...,k$, не все равные нулю, такие, что переменные:

$$p_j = p_j^* - \alpha_j \geq 0, \ \ q_j = q_j^* - \alpha_j \geq 0, j = 1,...,k$$

удовлетворяют условиям $p - q = p_* - q_*$ и $\sum_{j=1}^{k} (p_j + q_j) < \sum_{j=1}^{k} (p_j^* + q_j^*)$

и следовательно, p_*, q_* – не решение задачи (6.5)). Поэтому на векторе $\theta_* = p_* - q_*$ в (6.8) достигается равенство.

Это означает, что экстремальные задачи (6.5) и (6.7) имеют одно и то же значение, и что $\theta_* = p_* - q_*$ – это решение задачи (6.7), если $p_* \geq 0, q_* \geq 0$ – это решение задачи (6.5). Тогда вектор $x_* = \nabla D^*(A\theta_*)$ дает решение исходной задачи (1.7) – (1.8) [25, с.77].

7. Численные алгоритмы для априорных ограничений на решение системы, имеющих физический смысл

Для априорных ограничений (6.1) векторы b_i в линейной замене переменных (6.4) – это просто вершины многогранника (6.1), который симметричен относительно нуля. Если эти вершины известны, то согласно Лемме 6.2 минимаксная оценка может быть найдена методами проекции градиента на неотрицательном ортанте.

К счастью, для априорных ограничений из п.3 такие вершины уже известны [32, с. 65,67,70,87]. Однако, эти ограничения не симметричны. Поэтому следует симметризовать множество Z относительно нуля. В силу (2.3) все вершины симметричного дубликата Ω будут принадлежать дискретному множеству

$$\left\{ z = \left(b_i - b_j\right)/2, \ i, j = 1,...,\kappa, \ i \neq j \right\}. \quad (7.1)$$

Таким образом, согласно Теореме 2.2 и Лемме 6.2 для любых априорных ограничений из п.3 минимаксная оценка может быть найдена методами проекции градиента на неотрицательном ортанте. Для этого придется сначала произвести 2 линейных замены переменных: замену переменных (6.4) с векторами b_i, замененными на векторы из дискретного множества (7.1), и замену переменных $\theta = p - q$, где $p \geq 0, \ q \geq 0$.

Заключение

Предлагаемые в данной статье алгоритмы могут применяться для решения плохо обусловленных задач при наличии стохастической неопределенности и имеющих физический смысл априорных ограничений на решение системы. При этом можно использовать опыт решения задач гарантирующего оценивания, возникающих в отрасли космической промышленности [22 – 24].

Список литературы

1. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988.
2. Арсенин В.Я. О методах решения некорректно поставленных задач. – М.: МИФИ, 1977.
3. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. – М.: МГУ, 1989.
4. Бакушинский А.Б. , Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1989.
5. Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е. Определение и коррекция движения. – М.: Наука, 1980.
6. Вайникко Г.М. Методы решений линейных некорректных задач в гильбертовых пространствах. – Тарту: Тартусский ун-т, 1982.
7. Гилязов С.Ф. Методы решения линейных некорректных задач. – М.: МГУ, 1987.
8. Гончарский А.В., Черепащук А.М., Ягола А.Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. – М.: Наука, 1978.
9. Гончарский А.В., Черепащук А.М., Ягола А.Г. Некорректные задачи астрофизики. – М.: Наука, 1985.
10. Грешилов А.Н. Некорректные задачи цифровой обработки информации и сигналов. – М.: Университетская книга, 2009.
11. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1978.
12. Куркин О.М., Коробочкин Ю.Б., Шаталов С.А. Минимаксная обработка информации. – М.: Энергоатомиздат, 1990.
13. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980.
14. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Линейные операторы и некорректные задачи. – М.: Наука, 1991.
15. Леонов А. С. Об устойчивом решении обратной задачи гравиметрии на классе выпуклых тел // Известия АН СССР: сер. Физика Земли. – 1976. – №7. – С. 55-65.
16. Леонов А.С. , Ягола А.Г. Можно ли решить некорректную задачу без знания погрешности данных // Вестник Московского университета: сер. 3, Физика, Астрономия, 36. – 1995. – №4. – С. 28-33.
17. Лидов М.Л., Бахшиян Б.Ц., Матасов А.И. Об одном направлении в проблеме гарантирующего оценивания (обзор) // Космические исследования. – 1991. – Т. 29. – №5. – С. 659-684.
18. Лисковец О. А. Вариационные методы решения неустойчивых задач. – Минск: Наука и техника, 1981.
19. Матасов А.И. Введение в теорию гарантирующего оценивания. – М.: МАИ, 1999.
20. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1987.
21. Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. – М.: Наука, 1973.
22. Соловьев В.Н. Некоторые алгоритмы квадратичного программирования и оптимального гарантирующего оценивания // Автоматика и Телемеханика. –1990. – №9. – С. 67-73.
23. Соловьев В.Н. Двойственные алгоритмы оптимального гарантирующего оценивания // Космические исследования. – 1992. – Т. 30. – №1. – С. 10-23.
24. Соловьев В.Н. Двойственные алгоритмы оптимального гарантирующего оценивания и усеченный метод наименьших квадратов // Космические исследования. – 1995. – Т. 33. – №1. – С. 3-11.

25. Соловьев В.Н. Двойственные экстремальные задачи и их применения к задачам минимаксного оценивания // Успехи мат. наук. – 1997. – Т. 52. – №4. – С. 49-86.
26. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986.
27. Танана В.П. Методы решения операторных уравнений. – М.: Наука, 1981.
28. Танана В.П., Рекант М.А., Янченко С.И. Оптимизация методов решения операторных уравнений. – Свердловск: УрГУ, 1987.
29. Титаренко В.Н., Ягола А.Г. Метод отсечения выпуклых многогранников и его применение к некорректным задачам // Вычислительные методы и программирование. – 2000. – Т. 1, раздел 1. – С. 8-13.
30. Тихонов А.Н. Некорректно поставленные задачи и методы их решения. – М.: МГУ, 1974.
31. Тихонов А.Н. , Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986.
32. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука, 1985.
33. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1990. – С. 232.
34. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Комплекс программ решения линейных некорректно поставленных задач // Сборник «Теория и методы решения некорректно поставленных задач и их приложения». – Новосибирск: НГУ, 1984. – С. 66-72.
35. Тихонов А.Н., Уфимцев М.В. Статистическая обработка результатов экспериментов. – М.: МГУ, 1988.
36. Федотов А.М. Некорректные задачи со случайными ошибками в данных. – Новосибирск: Наука, 1990.
37. Эльясберг П.Е. Определение движения по результатам измерений. – М.: Наука, 1976.
38. Яненко Н.Н., Преображенский Н.Г. , Разумовский О.С. Методологические проблемы математической физики. – Новосибирск: Наука, 1986.
39. Сейсмическая томография / под ред. Г. Нолета. – М.: Мир, 1990.
40. Matasov A.I. Estimators for Uncertain Dynamic Systems // Kluwer Academic Publishers: Dordrecht-Boston-London. – 1999.
41. Soloviov V. Minimax estimation and the least squares method. Stochastics and Stochastics reports. – 1993. – Vol. 42. – Pp. 209-223.
42. Эльясберг П.Е. Априорная гарантированная оценка точности определения орбиты космического аппарата методом наименьших квадратов // Космические исследования. – 1984. – Т. 22. – №5. – С. 643.