

## РЕШЕНИЕ МАГНИТОСТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА КРИТИЧЕСКИХ КОМПОНЕНТ

**Емельяненко Геннадий Андреевич<sup>1,2</sup>, Душанов Эрмухаммад Бердимуродович<sup>3,4</sup>,  
Юдин Иван Павлович<sup>5</sup>**

<sup>1</sup>Доктор физико-математических наук, профессор;  
ГОУ ВПО «Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,  
кафедра высшей и прикладной математики ;  
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19.

<sup>2</sup>Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник;  
Объединенный институт ядерных исследований,  
Лаборатория информационных технологий;  
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, 6.

<sup>3</sup>Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник;  
Объединенный институт ядерных исследований,  
Лаборатория радиационной биологии;  
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, 6;  
e-mail: dushanov@jinr.ru.

<sup>4</sup>Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник;  
Институт ядерной физики АН РУ,  
Лаборатория ядерной спектроскопии;  
100214, г. Ташкент, пос. Улугбек, ул. Улуг Гуламов, 11;  
e-mail: dushanov@jinr.ru.

<sup>5</sup>Кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник;  
Объединенный институт ядерных исследований,  
Лаборатория физики высоких энергий;  
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, 6;  
e-mail: yudin@jinr.ru.

Приведены результаты численного моделирования магнитного поля спектрометрического магнита с применением современных математических методов. Математическая модель построена преобразованием уравнений Максвелла для стационарных магнитных полей. Алгоритм решения магнитостатической задачи построен относительно двух скалярных потенциалов. Окончательная плохо обусловленная система алгебраических уравнений решается с применением метода критических компонент.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, уравнения Максвелла, магнитное поле, спектрометр, метод критических компонент.

## SOLVING A MAGNETOSTATIC PROBLEM BY USING THE CRITICAL COMPONENTS METHOD

**Emel'yanenko Gennady<sup>1,2</sup>, Dushanov Ermukhammad<sup>3,4</sup>, Yudin Ivan<sup>5</sup>**

<sup>1</sup>Doctor of Science in Physics and Mathematics, professor;  
Dubna International University of Nature, Society, and Man,  
Chair of High and Applied Mathematics;  
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19.

<sup>2</sup>Leading scientist;

Joint Institute for Nuclear Research,  
Laboratory of Information Technologies;  
141980 Dubna, Moscow reg., Dubna, Joliot-Curie str. 6.

<sup>3</sup>Candidate of Science in Physics and Mathematics, Senior scientist;

Joint Institute for Nuclear Research,  
Laboratory of Radiation Biology;  
141980 Dubna, Moscow reg., Dubna, Joliot-Curie str. 6;  
e-mail: dushanov@jinr.ru.

<sup>4</sup>Candidate of Science in Physics and Mathematics, Senior scientist;

Institute of Nuclear Research Uzbek Academy of Science,  
Laboratory of Nuclear Spectroscopy;  
100214 pos. Ulugbek, Tashkent Ulug Gulamov str., 11;  
e-mail: dushanov@jinr.ru.

<sup>5</sup>Candidate of Science in Engineering, Leading scientist;

Joint Institute for Nuclear Research,  
Laboratory of High Energy Physics;  
141980 Dubna, Moscow reg., Dubna, Joliot-Curie str. 6;  
e-mail: yudin@jinr.ru.

*Results are presented of the numerical modeling of a spectrometer magnetic field based on modern mathematical methods. The mathematical model is constructed by transforming Maxwell's equations for the stationary magnetic fields. The algorithm for the solution of the magnetostatic problem is constructed with respect to two scalar potentials. The final ill-posed system of algebraic equations is solved using the critical-component method.*

**Keywords:** mathematical modeling, Maxwell's equations, magnetic field, spectrometer, critical-component method.

## **Введение**

Данная работа посвящена численному моделированию магнитного поля спектрометрического магнита для физического эксперимента с применением современных математических методов [1]. Решение данной задачи актуально тем, что полученные результаты используются для проведения компьютерного моделирования установки и эксперимента и, в последующем, после проведения сеансов набора физических данных, будут использованы для оптимальной обработки этих данных.

Целью данной работы является получение алгоритмов и результатов расчета поля с применением метода критических компонент [2, 3] для нахождения полного скалярного потенциала, обеспечивающего высокую точность математической модели магнитного поля.

Численное моделирование магнитного поля спектрометрического магнита для физического эксперимента сводится к решению трехмерной задачи относительно двух скалярных потенциалов [4]. Полный скалярный потенциал является решением однородной краевой задачи, граничные условия которой определяются конфигурацией моделируемого магнитного поля и установки. Построив неравномерную сетку с элементарными ячейками в виде параллелепипедов, получим систему нелинейных уравнений, матрица коэффициентов которой является блочно-пятидиагональной, с трехдиагональными блоками в диагонали и диагональными в (над под) диагональных блоках.

Применение метода критических компонент для решения данной задачи обеспечивает высокую точность получения результатов полного скалярного потенциала при конечных числах операций.

## **1. Математическая постановка магнитостатической задачи**

Рассмотрим физическую систему (рис. 1а, б), состоящую из ферромагнетика (область  $\Omega_f$ ), и вакуума (область  $\Omega_v$ ) с замкнутыми токовыми обмотками (область  $\Omega_C$ ). Решается задача нахождения

распределения магнитного поля, созданного стационарными токами и намагниченностью изотропных ферромагнетиков. Уравнения Максвелла для стационарного магнитного поля примут вид:

$$\operatorname{rot} \vec{H}(p) = \vec{J}(p), \quad \operatorname{div} \vec{B}(p) = 0, \quad \vec{B}(p) = \mu \mu_0 \vec{H}(p), \quad (1-3)$$

а условия на границе раздела сред и на бесконечности:

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_f - \vec{B}_v) = 0, \quad \vec{n} \times (\vec{H}_f - \vec{H}_v) = 0, \quad H(p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \quad (4)$$

Здесь используются следующие обозначения:  $p$  – точка трехмерного пространства  $\mathbb{R}^3$ , индексы  $f$  и  $v$  соответствуют области ферромагнетика и вакуума;  $\vec{H}$  – вектор напряженности магнитного поля,  $\vec{B}$  – вектор магнитной индукции,  $\vec{J}$  – известный вектор объемной плотности тока, отличный от нуля в ограниченной области  $\Omega_G$  и удовлетворяющий соотношению:  $\int_{\Omega_c} \vec{J} d\Omega = 0$ ,  $\mu(\vec{H})$  – известная в ограниченной односвязной области  $\Omega_f$  функция магнитной проницаемости ферромагнетика,  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума,  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности раздела сред ферромагнетик / вакуум.

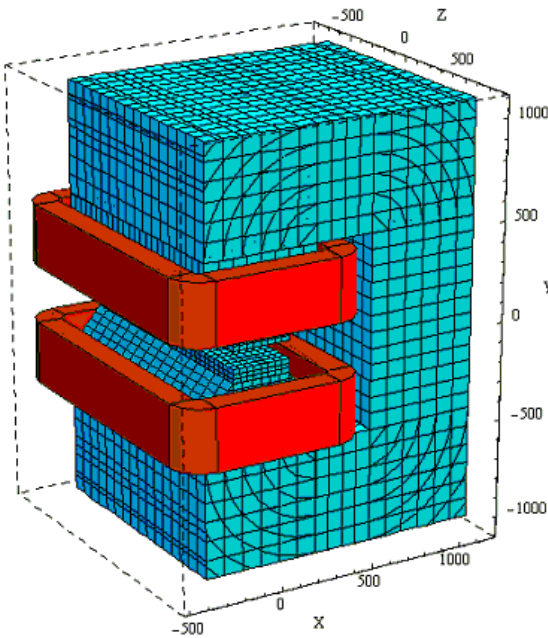


Рис.1, а. Общий вид магнита

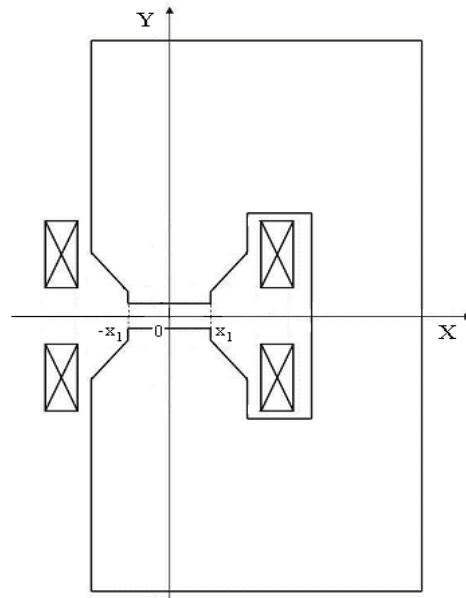


Рис.1, б. Разрез магнита в XOY плоскости

Для этой магнитной системы решим краевую магнитостатическую задачу относительно скалярного потенциала [4]. Введем скалярный потенциал  $\varphi$ :

$$\vec{H}(p) = \vec{T}_c(p) - \nabla \varphi(p), \quad (5)$$

где  $\vec{T}_c$  – поле, созданное токовыми обмотками, определяемое по закону Био–Саварра–Лапласа:

$$\vec{T}_c(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_c} \vec{J}(q) \times \nabla_q \frac{1}{r_{pq}} d\Omega_q.$$

Учитывая (5), из (2) получаем уравнение для определения скалярного потенциала:

$$\operatorname{div}(\mu(|\nabla \varphi(p)|) \nabla \varphi(p)) = \operatorname{div}(\mu(|\nabla \varphi(p)|) \vec{T}_c(p)). \quad (6)$$

Используя (5), из (4) получаем соответствующие граничные условия для  $\varphi$  :

$$\varphi_f - \varphi_v = 0, \quad \mu \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_-} - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_+} = (\mu - 1)(\vec{T}_c, \vec{n}), \quad \varphi(p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0.$$

При больших значениях  $\mu$  в области  $\Omega_f$  векторы  $\vec{T}_c$  и  $\nabla \varphi$  становятся большими, близкими по значению. Это может привести к потере точности вычислений. Для преодоления этой трудности введем полный скалярный потенциал  $\Psi$  по формуле:

$$\vec{H}(p) = -\nabla \Psi(p), \quad p \in \Omega_f.$$

Таким образом, приходим к постановке задачи магнитостатики относительно двух неизвестных скалярных потенциалов  $\Psi$  и  $\varphi$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mu(|\nabla \Psi(p)|)\nabla \Psi(p)) &= 0, \quad p \in \Omega_f, \\ \Delta \varphi(p) &= 0, \quad p \in \mathbb{R}^3 \setminus (\Omega_f \cup \Gamma). \end{aligned} \tag{7-8}$$

Уравнение (7) получается из (2) с учетом того, что  $\mu = 1$  в области  $\mathbb{R}^3 \setminus (\Omega_f \cup \Gamma)$  и  $\operatorname{div} \vec{T}_c = 0$ .

На границе области  $\Omega_f$  имеют место условия, вытекающие из (4):

$$-\mu \frac{\partial \Psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_-} = (\vec{T}_c, \vec{n}) \Big|_{\Gamma_+} - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_+}, \quad \Psi(p) - \varphi(p) = - \int_0^p [\vec{T}_c, \vec{n}] d\vec{r}, \tag{9}$$

где  $p$  – произвольная точка на поверхности  $\Gamma$ , а  $d\vec{r}$  – вектор касательной к поверхности.

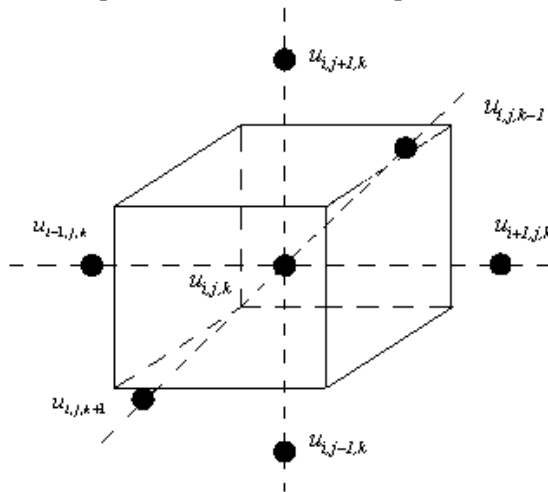


Рис. 2. Элементарная ячейка разностной схемы

Аналогично, для разностной аппроксимации краевой задачи (7-8) построим неравномерную сетку с элементарными ячейками (рис. 2) в виде параллелепипедов. Интегрируя (7) по объему параллелепипеда  $\Pi$ , который содержит узел  $(i, j, k)$  и вершинами, которого являются центры элементарных ячеек  $(i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}, k \pm \frac{1}{2})$ , получим:

$$\int_{\Pi} \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx_i} \left( \mu \frac{d}{dx_i} u \right) dV = \int_{S_{\Pi}} \mu \nabla u d\vec{S} = 0. \tag{10}$$

Для вычисления интегралов в (10) заменяем производные их разностными аналогами и считаем магнитную проницаемость  $\mu$  постоянной в пределах одной элементарной ячейки и равной значению в центре ячейки. Получаем систему уравнений для определения сеточной функции  $u_{i,j,k} = u(i, j, k)$  :

$$A_i u_{i+1,j,k} + A_{i-1} u_{i-1,j,k} + B_j u_{i,j+1,k} + B_{j-1} u_{i,j-1,k} + C_k u_{i,j,k+1} + C_{k-1} u_{i,j,k-1} - S_{i,j,k} u_{i,j,k} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 A_i &= \frac{1}{h_i^x} \sum_{m=j-1}^j \sum_{n=k-1}^k \mu_{i,m,n} h_m^y h_n^z, & B_j &= \frac{1}{h_j^y} \sum_{m=i-1}^i \sum_{n=k-1}^k \mu_{m,j,n} h_m^x h_n^z, \\
 C_k &= \frac{1}{h_k^z} \sum_{m=i-1}^i \sum_{n=j-1}^j \mu_{m,n,k} h_m^x h_n^y, \\
 S_{i,j,k} &= A_i + A_{i-1} + B_j + B_{j-1} + C_k + C_{k-1}, & \mu_{i,j,k} &= \mu \left( \left| \vec{B} \left( i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) \right| \right), & (i, j, k) &\in \Omega_f^h, \\
 \mu_{i,j,k} &= 1, & (i, j, k) &\in \Omega_v^h.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Система (11) решается методом критических компонент (см. следующий раздел). Полученное решение используем для пересчета магнитной проницаемости  $\mu_{i,j,k}$ . В следующей итерации система (11) решается с этими значениями  $\mu_{i,j,k}$ . Итерации прекращаются при выполнении условия:

$$\sum_{i,j,k} \left| U_{i,j,k}^{(n)} - U_{i,j,k}^{(n-1)} \right| / \left| U_{i,j,k}^{(n)} \right| < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – заданная точность решения.

## 2. Алгоритм решения системы (11) методом критических компонент

Рассмотрим плохо обусловленную систему линейных уравнений:

$$AZ = F, \tag{12}$$

где  $A = (a_{ij})$  квадратная матрица порядка  $m$  или прямоугольная матрица размерности  $m \times n$  вещественная матрица общего вида,  $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n, Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$  – искомый и  $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$  – заданный  $n$  и  $m$  – мерные векторы соответственно. При нахождение решения  $Z$  система (12) обычно приводится к системе уравнений с трехдиагональной или двухдиагональной матрицей [5].

Плохо обусловленные системы типа (12) нередко численно сводятся к плохо обусловленным системам с трехдиагональными матрицами, если обозначить в (12)  $X = Q^T Z, Y = Q^T F$ . Поэтому основной становится проблема численного решения таких вырожденных и плохо обусловленных систем. Получив вектор  $X$ , вектор  $Z$  – решение системы (12) находим в виде:

$$Z = QX.$$

Для численного решения плохо обусловленных систем с трехдиагональной и верхней двухдиагональной матрицами одними из лучших являются методы обратной подстановки с нормировкой (и регуляризацией) сингулярного разложения с исчерпанием [5, 6, 7].

Свойства систем уравнений с трехдиагональными матрицами и самих матриц, а также двухдиагональные матрицы изучены достаточно подробно в работах [6, 7]. Здесь мы остановимся на свойствах (блочно-) трехдиагональных матриц и систем уравнений с такими матрицами, которые мало изучены на данный период.

Система уравнений с блочно-трехдиагональными матрицами имеет вид:

$$C_3 = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & \\ p_2 & q_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & r_m & \\ & & p_m & q_m & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \tag{13}$$

где  $\{q_i\}_{i=1}^m$  – диагональные элементы-блоки матрицы  $C_3$ , являющиеся в общем случае квадратными матрицами различных размерностей, а  $\{p_i, r_i\}_{i=2}^m$  – под (над) диагональные элементы-блоки матрицы  $C_3$ , являющиеся в общем случае прямоугольными матрицами, размерности которых определяются размерностями соответствующих квадратных диагональных матриц,  $x_i$  и  $y_i$  элементы векторов искомого решение и правой части уравнения.

Теперь остановимся на некоторых деталях метода критических компонент. В основе метода критических компонент, которым реально решаются системы (13), лежат обобщенные последовательности:

$$\Lambda_{i+1} = q_i - p_i \Lambda_i^{-1} r_i, \quad \Lambda_2 = q_1, \quad i = 2, 3, \dots, m, \tag{14}$$

$$G_{i-1} = q_i - r_{i+1} G_i^{-1} p_{i+1}, \quad G_{m-1} = q_m, \quad i = m-1, \dots, 2, 1, \tag{15}$$

анализ вычислительных свойств которых имеется в [6, 7]. Пусть  $X_2 = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$  и при этом  $x_i$  – точные, а  $\tilde{x}_i$  – приближенные значения компонент решения  $X_2$ . Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть (13) реально представленная в компьютере система линейных алгебраических уравнений. Тогда для вектора  $X_2$ , полученного методом критических компонент, имеют место неравенства:

$$\Phi_i(\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}) = \|y_i - | - p_i \tilde{x}_{i-1} + q_i \tilde{x}_i + r_{i+1} \tilde{x}_{i+1} \| \leq 3\mu(\varepsilon_1), \quad i = \overline{m, 1}, \tag{16}$$

где  $\mu(\varepsilon_1)$  – величина порядка  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_1$  – относительная погрешность компьютерной вещественной арифметики.

С учетом этой теоремы решение системы (13) находится в виде:

$$\tilde{x}_i = \tilde{x}_i^k + \phi_i^k, \tag{17}$$

где  $k$  – номера подпространств, выделяемых условиями (15),  $\phi_i^k = -B_{i l_k}^k r_{l_k+1} \tilde{x}_{l_k+1}$ ,  $B_{ij}^k$  – элементы матриц обратных подматрицам  $C_3$  порядка  $[l_k \times l_k]$ , соответственно. Алгоритмическая техника выделения подпространств или, тоже самое, получение последовательности  $\{\Phi_i(\tilde{x}_{i-1}^k, \tilde{x}_i^k, \tilde{x}_{i+1}^k)\}$  подробно приведены в [8]. Здесь же отметим лишь только, что в каждом из выделяемых подпространств первые из условий (15), т.е. при  $i = l_k$  приобретают вид:

$$\Phi_i(\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i) = \|y_i - | - p_{i-1} \tilde{x}_{i-1} + q_i \tilde{x}_i \| \leq 2\mu(\varepsilon_1) \tag{18}$$

в случае  $C_3$  и вид:

$$\Phi_i(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}) = \|y_i - | - q_i \tilde{x}_i + r_{i+1} \tilde{x}_{i+1} \| \leq 2\mu(\varepsilon_1), \tag{19}$$

$$\Phi_i(\tilde{x}_i) = \|y_i - | - q_i \tilde{x}_i \| \leq \mu(\varepsilon_1) \tag{20}$$

– в случае двухдиагональных матриц.

С учетом изложенного выше и [8] приведем алгоритм метода критических компонент.

Начало вычислений:

$$k = 0, i = m; \tag{1)^0} \quad l_k = i;$$

$$(2)^0 \quad x_i^k = \sum_{\xi=1}^{l_k} B_{i\xi}^k y_\xi, \varphi_i^k = \begin{cases} 0, & \text{если } k = 0, \\ B_{i l_k}^k r_{l_k+1} \tilde{x}_{l_k+1}^k, & \text{если } k > 0; \end{cases}$$

если  $i = l_k$ , то  $(5)^0$ , иначе  $(3)^0$ ;

$(3)^0$  если  $|\varphi_i^k| < 1/\varepsilon_1$ , то  $(4)^0$ , иначе  $k = k + 1$  и  $(1)^0$ ;

$(4)^0 \quad j = i + 1, \tilde{x}_{l_k+1}^k = 0$ ;

если  $j = l_k$ , то  $\theta = 2\varepsilon_1$ , иначе  $\theta = 3\varepsilon_1$ ;

$$\Phi_j = \begin{cases} |y_j| - |p_j \tilde{x}_{j-1}^k + q_j \tilde{x}_j^k + r_{j+1} \tilde{x}_{j+1}^k|, & \text{при } |y_j| \leq 1, \\ 1 - |p_j \tilde{x}_{j-1}^k + q_j \tilde{x}_j^k + r_{j+1} \tilde{x}_{j+1}^k| / |y_j|, & \text{при } |y_j| > 1; \end{cases}$$

если  $|\Phi_j| \leq \theta$ , то  $(5)^0$ , иначе  $k = k + 1$  и  $(1)^0$ ;

$(5)^0 \quad \tilde{x}_i = \tilde{x}_i^k + \varphi_i^k$ ;

если  $i = 1$ , конец вычислений, иначе  $i = i - 1$  and  $(2)^0$ .

Конец вычислений.

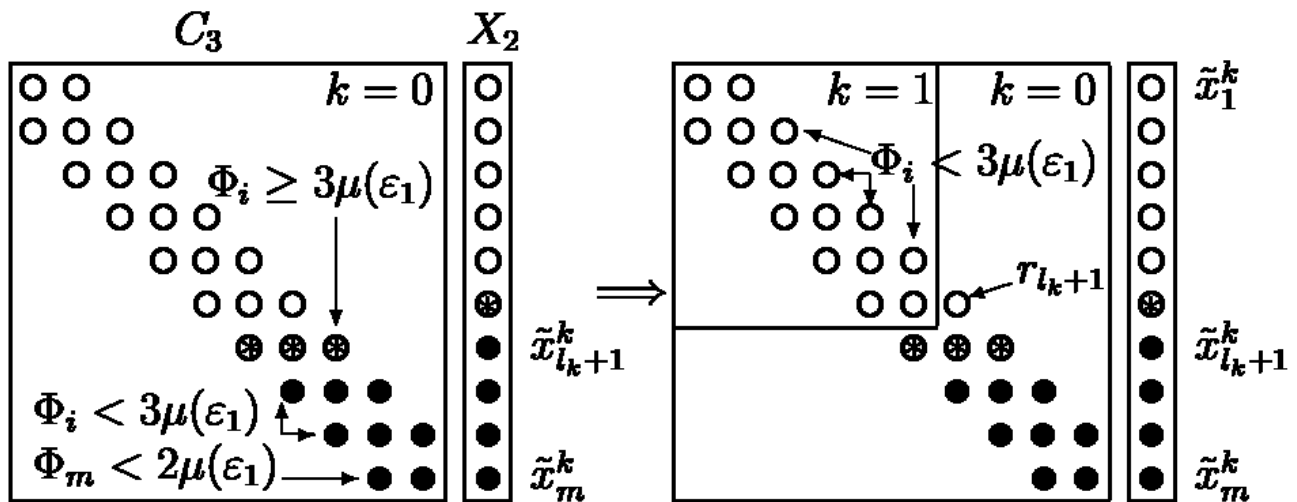


Рис. 3. Общая схема алгоритма метода критических компонент

В основе метода критических компонент лежит [7, 8] идея выделения хорошо обусловленных подпространств. На рис. 3 приведена общая схема алгоритма выделения подпространств в методе критических компонент. Как видно из этой схемы, если  $k = 0$  и выполняются условия (16) или (18), то новое подпространство не выделяется. Условием образования нового подпространства является таким образом нарушение (16) или (18). При этом компонента  $\tilde{x}_{l_k}$  вычисляется заново уже в новом подпространстве ( $k = k + 1$ ) в виде (17). Компонента  $\tilde{x}_{l_k}$  решения  $X_2$  называется [7, 8] поэтому критической компонентой.

Эффективность метода критических компонент в сравнении с другими методами показана в [7, 8].

### 3. Полученные результаты

Приведем результаты, полученные для максимально используемого уровня поля в установке Дельта-Сигма [9] Лаборатории Физики высоких энергий ОИЯИ. Магнит спектрометра имеет внешние размеры  $2,95 \text{ м} \times 2,12 \text{ м} \times 1,62 \text{ м}$  и апертуру  $0,30 \text{ м} \times 0,09 \text{ м}$ .

Ось  $Z$  системы координат направлена в сторону движения частиц первичного пучка, параллельно плоскости нижнего полюсного наконечника. Ось  $Y$  направлена вертикально вверх по нормали к плоскости этого же полюсного наконечника. Ось  $X$  направлена так, чтобы получить правую систему координат. Центр спектрометрического магнита принимается за начало декартовой системы координат («правой» тройки  $XYZ$ ) спектрометра. На рис. 4 показано распределение компоненты  $B_y$  для медианной плоскости  $B_y(x, 0, z)$ .

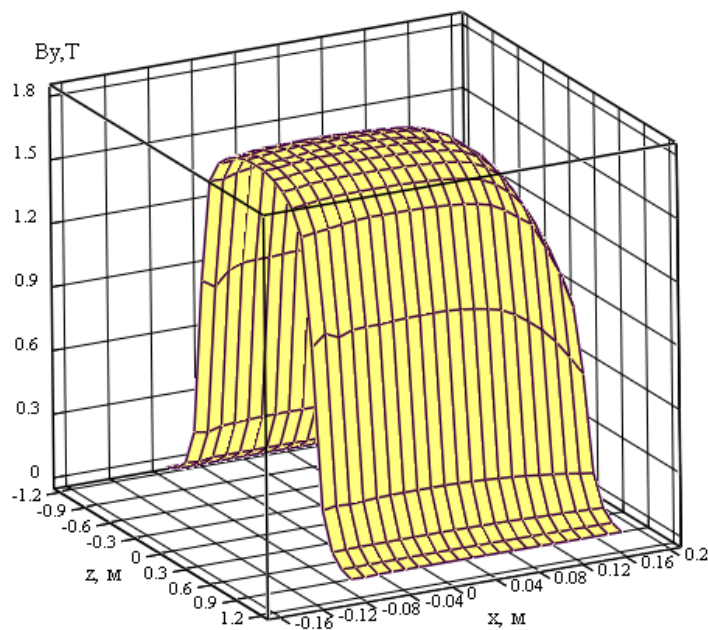


Рис.4. Поверхность  $B_y(x, y = 0, z)$  для медианной плоскости

Вдоль координаты  $x$  (поперечная к пучку координата) величина основной компоненты  $B_y(0, 0, 0)$  на медианной плоскости в центре магнита равна 1.7 Тл и она практически сохраняется вдоль координаты  $x$  до края полюса ( $x = \pm 0.15$  м). Резкий спад на этих краях уменьшает значение  $B_y(x, 0, 0)$  до 1 Тл в точке  $x = 0.17$  м. Компонента  $B_x(x, 0, 0)$  под полюсом практически равна нулю, однако за краями полюса достигает 0.5 Тл в точке  $x = 0.17$  м и  $-0.5$  Тл в точке  $x = -0.17$  м. Продольная компонента  $B_z(x, 0, 0)$  здесь практически равна нулю.

Аналогично вдоль координаты  $z$  компонента  $B_y(0, 0, z)$  практически сохраняется до края полюса ( $z = \pm 0.65$  м). Резкий спад на этих краях уменьшает значение  $B_y(0, 0, z)$  до 0.01 Тл в точке  $z = -1.5$  м. Компонента  $B_x(0, 0, z)$  под полюсом равна  $-0.04$  Тл, ее значения на краях  $z = \pm 0.65$  м практически сохраняют те же значения, но за краями полюса резко падают до нуля. Продольная компонента  $B_z(0, 0, z)$  здесь везде равна нулю, однако на краях полюса при  $z = -0.65$  м. ее величина достигает 0.44 Тл, а при  $z = 0.65$  м. ее величина равна  $-0.44$  Тл.

Распределение для компоненты  $B_y$  вблизи верхнего полюса  $B_y(x, 0.04 \text{ м}, z)$  показано на рис.5. Здесь значения  $B_y(x, y = 0.04 \text{ м}, z)$  в центре ( $x = 0, z = 0$ ) равны 1,7 Тл, а на краях (в точке  $x = 0.17 \text{ м}, z = 0$ ) 1,8 Тл. Вдоль координаты  $z$  она плавно уменьшается к значению 1.1 Тл на краю полюса ( $z = \pm 0.65$  м). Резкий спад на этих краях уменьшает значение  $B_y(0, 0.04 \text{ м}, 0)$  до 0.01 Тл в точке  $z = -1.5$  м.



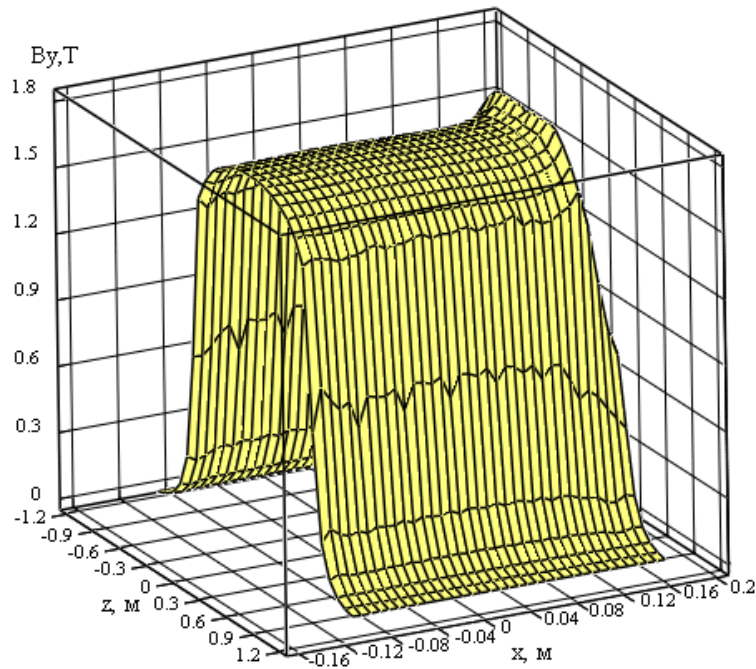


Рис. 5. Поверхность  $B_y(x, y = 0.04 \text{ м}, z)$  для плоскости  $y = +0.04 \text{ м}$

Графики распределения магнитного поля вблизи верхнего полюса ( $y = +0.04 \text{ м}$ ) приведены для компоненты  $B_x$  на рис. 6 и для компоненты  $B_z$  на рис.7.

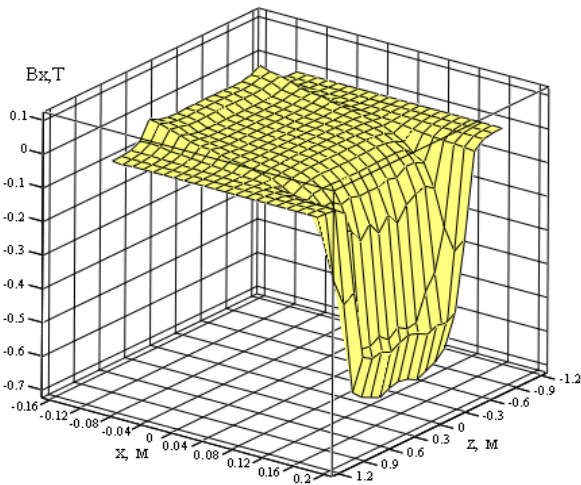


Рис. 6. Поверхность  $B_x(x, y = 0.04 \text{ м}, z)$  для плоскости  $y = +0.04 \text{ м}$

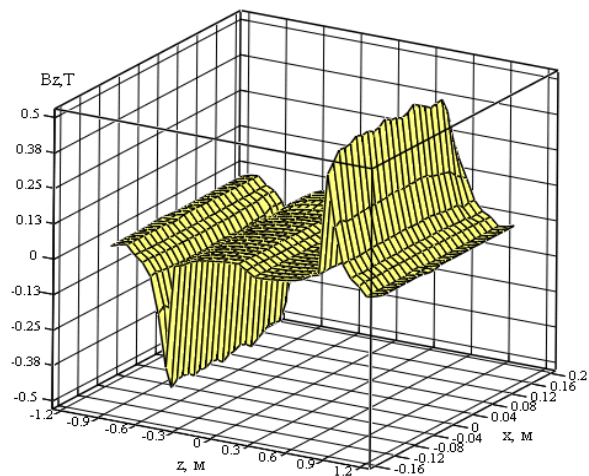


Рис. 7. Поверхность  $B_z(x, y = 0.04 \text{ м}, z)$  для плоскости  $y = +0.04 \text{ м}$

Вдоль координаты  $x$  компонента  $B_x(x, 0, 0)$  ведет себя аналогично как на плоскости  $y = 0$ , но пик в точке  $x = +0.17 \text{ м}$  увеличивается до  $0.6 \text{ Тл}$ . Продольная компонента  $B_z(x, 0, 0)$  здесь также равна нулю. Вдоль координаты  $z$  компонента  $B_x(0, 0.04 \text{ м}, 0)$  под полюсом равна  $-0.01 \text{ Тл}$ . Ее значения на краях  $x = +0.17 \text{ м}$  резко падают до величины  $-0.5 \text{ Тл}$ . Продольная компонента  $B_z(0, 0.04 \text{ м}, 0)$  в центре равна  $0,01 \text{ Тл}$ , однако на краях полюса при  $z = -0.65 \text{ м}$  ее величина равна  $-0.6 \text{ Тл}$ , а при  $z = +0.65$  ее величина достигает  $0.6 \text{ Тл}$ . Для точки  $z = -1.5 \text{ м}$  ее величина близка к  $0$ .

## Заключение

Проведено математическое моделирование магнитного поля спектрометрического магнита с применением прецизионных современных математических методов. Алгоритм решения магнитостатической задачи построен относительно двух скалярных потенциалов. Дискретизация уравнений для потенциалов дает плохо обусловленную систему алгебраических уравнений, которая решается с применением метода критических компонент. Получено решение исходной задачи. Построены графики характерных распределений компонент поля.

## Список литературы

1. Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры. – Новосибирск: Научная книга, 1997.
2. Emel'yanenko G.A., Rakhmonov T.T., Dushanov E.B. Critical-component method for solving systems of linear equations with a tridiagonal matrix of the general form // JINR Preprint E11-96-105. – Dubna: JINR, 1996.
3. Emel'yanenko G.A., Rakhmonov T.T., Dushanov E.B. Algorithms and programs of the critical-component method of inversion of tridiagonal matrices and solution of systems of linear equations // JINR Preprint E11-96-106. – Dubna: JINR, 1996.
4. Юдин И.П. и др. Вычислительный эксперимент для получения распределения поля спектрометрического магнита в проекте НИС // Письма в ЭЧАЯ. – Дубна: ОИЯИ, 2007. – Т. 4. – № 4 (140). – С. 614-627.
5. Малышев А.Н. Введение в вычислительную линейную алгебру (с приложением алгоритмов на ФОРТРАНе). – Новосибирск: Наука, 1991.
6. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984.
7. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979.
8. Emel'yanenko G.A., Emelianenko M., Rakhmonov T.T., Dushanov E.B., Konovalova G.Yu. On efficiency of critical-component method for solving singular and ill-posed systems of linear algebraic equations // JINR Preprint E11-98-302. – Dubna: JINR, 1998.
9. Шаров В.И., Юдин И.П., Зайцев И.В. и др. Измерения разности полных сечений  $\Delta\sigma_{L(np)}$  при энергиях 1.39; 1.69; 1.89 и 1.99 ГэВ. // Ядерная физика. – М.: 2005. – Т. 68. – №.11. – С. 1858-1873.