УДК 512.6, 517.9, 519.6

О КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Гердт Владимир Петрович[1,2]

[1]*Доктор физико-математических наук, профессор;*
ГБОУ ВПО «Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»;
Кафедра Прикладной математики и информатики;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: gerdt@jinr.ru.

[2]*Начальник сектора алгебраических и квантовых вычислений;*
Объединенный Институт Ядерных Исследований,
Лаборатория Информационных Технологий;
141980 Московская обл., г.Дубна, ул. Жолио-Кюри 6;
e-mail: gerdt@jinr.ru.

В данной работе рассматриваются конечно-разностные аппроксимации систем полиномиально-нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, коэффициенты которых могут быть отношениями многочленов от независимых переменных над полем рациональных чисел. Описывается введенное автором понятие сильной аппроксимации (с-аппроксимации) систем указанного вида на равномерных и ортогональных сетках. Обсуждается алгоритмическая проверка с-аппроксимации методами дифференциальной и разностной алгебр, с помощью систем компьютерной алгебры. Приводится пример двух аппроксимаций двумерных систем уравнений Навье-Стокса, одна из которых является с-аппроксимацией, а другая нет.

Ключевые слова: система уравнений в частных производных, конечно-разностная аппроксимация, сильная аппроксимация, дифференциальная алгебра, разностная алгебра, уравнения Навье-Стокса, компьютерная алгебра.

ON INVESTIGATION OF FINITE DIFFERENCE APPROXIMATIONS TO PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS

Gerdt Vladimir[1,2]

[1]*Doctor of Science in Physics and Mathematics, professor;*
Dubna International University of Nature, Society, and Man;
Chair of Applied Mathematics and Informatics;
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;
e-mail: gerdt@jinr.ru;

[2]*Head of Research Group on Algebraic and Quantum Computation;*
Laboratory of Information Technologies;
Joint Institute for Nuclear Research;
141980 Dubna, Moscow reg., Dubna, Joliot-Curie str. 6;
e-mail: gerdt@jinr.ru

In the given paper we consider finite difference approximations to systems of polynomially-nonlinear partial differential equations whose coefficients are rational functions over rationals in the independent variables. We describe the notion of strong consistency (s-consistency) which we introduced earlier for uniform and orthogonal grids and discuss algorithmic verification of s-consistency by using constructive methods of differential and difference algebra with their implementation in computer algebra software. We give an example of two finite difference approximations to the two-dimensional Navier-Stokes equations. One of these approximations is strongly consistent and another is not.

Keyword: system of partial differential equations, finite difference approximation, strong approximation, differential algebra, difference algebra, Navier-Stockes equations, computer algebra.

Введение

Данная работа является сокращенным и неформальным изложением моей недавней работы [1] и посвящена памяти Геннадия Андреевича Емельяненко, главные результаты научной жизни которого, как математика, сконцентрированы на вопросах исследования 3-х диагональных матриц. Практическая значимость таких матриц, во многом, заключается в том, что они возникают при дискретизации начальных и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка, и позволяют эффективно решать дискретную задачу методом прогонки. Я здесь хочу процитировать одну из работ Геннадия Андреевича на эту тему – работу [2], выполненную им совместно с Бруно Бухбергером, всемирно известным австрийским математиком и компьютерным алгебраистом. Именно он ввел в обращение термин «компьютерная алгебра» для той пограничной области математики и информатики, которая относится к комьютерному преобразованию символьных математических выражений и которая на русском языке, до введения данного термина, называлась чаще всего аналитическими вычислениями. Наибольшую известность Бруно Бухбергеру принесло открытие им алгоритмического метода работы с системами нелинейных алгебраических уравнений полиномиального типа со многими неизвестными, который он назвал методом базисов Гребнера в честь научного руководителя своей кандидатской (PhD) диссертации, известного австрийского алгебраического геометра Вольфганга Гребнера. В работе [1], и в ее нижеприведенном сокращенном и упрощенном изложении, совместно используются и конечно-разностные аппроксимации (ниже для них будет использоваться абривиатура КРА) дифференциальных уравнений и базисы Гребнера [3]. Это позволяет, в случае ортогональных и равномерных сеток, исследовать качество рассматриваемых аппроксимаций (компьютерно-) алгебраическими методами.

С-аппроксимация дифференциальных систем конечно-разностными и ее алгоритмическая проверка

Наряду с методами конечных объемов и конечных элементов, метод конечных разностей [4] является наиболее широкоиспользуемым на практике методом дискретизации дифференциальных уравнений с целью их численного решения. В этом методе используется операция разложения в ряд Тейлора для замены дифференциального уравнения на разностное, которое определено на выбранной сетке. При этом разностное уравнение образует конечно-разностную форму дифференциального уравнения. Вместе с соотвествующей дискретизацией начальных и/или граничных условий, КРА представляет собой разностную схему для исходной дифференциальной задачи.

Основным требованием к конечно-разностной дискретизации исходной дифференциальной задачи является сходимость решения первой к искомому решению второй, когда все шаги сетки, соответствующие дискретным значениям независимых переменных, стремятся к нулю (сокращенно, мы будет называть это непрерывным пределом). Но, к сожалению, строгое исследование сходимости воможно только в очень редких и достаточно простых случаях. И даже при этом для исследования требуются весьма тонкие методы анализа. В реальных же случаях, когда строгие методы анализа сходимости невозможны, общепринятым является убеждение, что сходимость обеспечивается при выполнении двух условий: (1) конечно-разностная дискретизация (сокращенно КРД) обеспечивает аппроксимацию [5] исходной дифференциальной задачи и (2) эта аппроксимация устойчива. Данное убеждение основано на блестящей теореме Лакса (в западной литературе она часто называется теоремой эквивалентности Лакса-Рихтмайера [6, 7]), которая была доказана сначала для скалярного линейного уравнения (не для системы уравнений!) в частных производных, а затем обобщена на некоторые скалярные нелинейные скалярные уравнения [8]. Эта теорема устанавливает эквивалентность сходимости разностной схемы для корректно поставленной начальной задачи (задачи Коши) двум вышеуказанным условиям: (1) КРД является КРА и (2) устойчивости. Аппроксимируемость означает сводимость КРД к исходному дифференциальному уравнению в пределе нулевых шагов сетки, а устойчивость означает ограниченность абсолютной величины численной ошибки приближения при малых вариациях числовых данных для рассматриваемой задачи.

Тем самым, исследование аппроксимируемости и устойчивости КРД является принципиально важным для численного решения дифференциальных уравнений. Современные методы, алгоритмы и реализующие их программы компьютерной алгебры могут быть мощным инструментом, как автоматического построения КРД [9], так и исследования аппроксимируемости и устойчивости. Вопросы анализа построения КРД для линейных систем уравнений в частных производных и анализа их устойчивости рассмотрены в недавней работе [10]. В работах [11, 12] рассмотрены алгоритмические и компьютерно-алгебраические вопросы исследования аппроксимируемости КРД для систем дифференциальных уравнений. В частности, для линейных систем и их КРД на ортогональных и равномерных сетках, в [12] было введено новое понятие сильной аппроксимации (или *c*-аппроксимации) и предложен алгоритм ее проверки, основанный на построении базиса Гребнера для КРД. В [1] мы обобщили результаты работы [12] на полиномиально-нелинейные системы. Отличие сильной КРА от обычной КРА состоит в том, что в случае первой любое ее алгебраическое (разностное) следствие аппроксимирует соотвествующее следствие исходной дифференциальной системы. А в случае второй обеспечивается лишь аппроксимация самих исходных уравнений дифференциальной системы, безотносительно к их следствиям. Отсюда следует, что всякая *c*-аппроксимация является КРА, но обратное, вообще говоря, неверно. При этом, поскольку следствие системы уравнений обращается в нуль на всех общих решениях уравнений системы, то в случае, когда КРД не является сильной, ее пространство решений не является аппроксимацией пространства решений исходной дифференциальной системы.

Следует подчеркнуть, что если дифференциальная система имеет, в качестве своих алгебро-дифференциальных следствий, локальные законы сохранения и/или лиевские симметрии, то сильная КРА также будет иметь в качестве своих алгебро-разностных следствий соотвествующие локальные разностные законы сохранения и/или симметрии [13, 14] для определения и описания дифференциальных и разностных законов сохранения и симметрий).

В случае линейных дифференциальных систем алгоритмическая проверка *c*-аппроксимации основана на приведении исходной дифференциальной ситемы в инволюцию [15], т.е. пополнении системы всеми ее условиями интегрируемости. После чего, рассматривая разностный базис Гребнера для КРА, можно проверить являются ли его элементы (линейные дифференциальные многочлены) в непрерывном пределе алгебро-дифференциальными следствиями исходной дифференциальной системы. Если да, то КРА является сильной. При этом важно отметить, что инволютивная дифференциальная система допускает постановку задачи Коши, которая автоматически удовлетворяет такому необходимому условию корректности, как единственность решений в виде формальных степенных рядов [15]. Тем самым, если теорема Лакса допускает обобщение на случай дифференциальных систем (что является общим убеждением специалистов), то, дополнительное к аппроксимируемости и устойчивости КРД, условие корректности постановки задачи Коши требует приведения дифференциальной системы в инволюцию. Помимо этого, переходя в разностном уравнении для сеточных фунций к непрерывному пределу спомощью разложения в ряд Тейлора в окрестности узловой точки сетки, можно алгоритмически проверить [12], с помощью инволютивной системы, является ли получаемое в непрерывном пределе дифференциальное уравнение следствием исходной дифференциальной системы.

Чтобы работать с дифференциальными (соответственно, с разностными) многочленами на компьютере в точном, аналитическом (символьном) виде, необходимо точно выполнять арифметические операции над их коэффициентами, а также дифференцировать эти коэффициенты (соответственно, действовать на них операторами сдвига), в случае переменных коэффициентов. Поэтому, в компьютерной алгебре обычно предполагается (и это предположение сделано также и в работе [1]), что коэффициенты дифференциальных и/или разностных многочленов являются рациональными функциями независимых переменных. А числовые коэффициенты этих рациональных функций являются рациональными числами.

Если исходная дифференциальная система является нелинейной, то привести ее в инволюцию, в общем случае, невозможно. Однако, всегда можно разложить систему на конечное число инволютивных подсистем с непересекающимися пространствами решений. Конструктивный метод такого разложения (декомпозиции) был разработан американским математиком Томасом в [16]. Полная алгоритмизация метода Томаса и его программная реализация на языке системы компьютерной алгебры Мэйпл выполнена в работе [17]. С помощью декомпозиции Томаса для исходной системы уравнений, так же как и в случае когда система допускает приведние в инволюцию, можно алгоритмически проверить является ли заданное дифференциальное уравнение следствием системы. Соответственно, для корректной постановки задачи Коши, нужно взять одну из подсистем в декомпозиции (поскольку эти подсистемы не имеют общих решений), и используя ее инволютивнность сформулировать для нее начальные данные, обеспечивающие единственность решений в виде формальных степенных рядов [17,18]. Для существования решений и обеспечения полной корректности задачи Коши, т.е. непрерывной (гладкой) зависимости решения от начальных данных, небходимо дополнить указанные алгебраические методы подходящими методами анализа.

Для КРД нелинейных дифференциальных систем, в общем случае, невозможно за конечное число шагов построить базис Гребнера для заданной КРД. Это связано с тем, что базис Гребнера может быть бесконечным, ибо кольцо разностных многочленов не является нетеровым [19] (так же как и кольцо дифференциальных многочленов [20]). В таком случае *можно алгоритмически проверять необходимые условия* c-аппроксимируемости, исследуя промежуточные разностные многочлены, возникающие при построении базиса Гребнера, как описано ниже.

1. Сначала нужно привести исходную дифференциальную систему в инволюцию, или, когда это невозможно, построить ее декомпозицию Томаса.
2. Вычислить непрерывный предел (в ввиде дифференциального многочлена) каждого из разностных многочленов рассматриваемой КРД путем разложения его в ряд Тейлора в узле сетки по степеням ее шагов и выделив члены младшего порядка, по шагам сетки, в полученном разложении. Эта операция – чисто алгебраическая и выполняется построением разложения в ряд Тейлора разностного многочлена в узловой точке сетки. Ее можно легко выполнить с помощью любой из современных систем компьютерной алгебры.
3. С помощью инволютивной системы или декомпозиции Томаса проверить является ли полученный дифференциальный многочлен следствием исходной дифференциальной системы. В мэйпловском пакете [17] имеется специальная команда для данной проверки. Если не является, то рассматриваемая КРД не дает не только c-аппроксимацию, но и обычную аппроксимацию исходной системы. *Поэтому проверку следует остановить*. Если же является, то процесс нужно продолжить, пока не будут проверены все разностные уравнения в КРД.
4. Пошагово строить базис Гребнера, для чего можно использовать алгоритм работы [1]. При этом, для каждого из возникающих разностных многочленов нужно вычислять его непрерывный предел, как описано выше для элементов самой КРД, и проверять, является ли полученный в результате такого вычисления, дифференциальный многочлен следствием исходной дифференциальной системы. Если не является, то процесс проверки надо прекратить, ибо данная КРД не является сильной аппроксимацией. В противном случае, построение базиса Гребнера нужно продолжить.
5. Если процесс построения разностного базиса Гребнера закончен и все его элементы проверены на соответствие, в непрерывном пределе, исходной дифференциальной системе, и являются ее следствиями, то исходная КДР является c-аппроксимацией.

Поскольку, как отмечено выше, процесс построения разностного базиса Гребнера для нелинейной дифференциальной системы может быть бесконечным, то при прерывании процесса либо пользователем, либо ввиду нехватки вычислительных ресурсов (например потребляемой при вычислении памяти), ответ на вопрос о c-аппроксимации для исходной КРД остается открытым.

Пример: система уравнений Навье-Стокса

Рассмотрим систему уравнений Навье-Стокса, описывающую двумерное движение вязкой несжимаемой жидкости. Пусть (u, v) обозначает поле скоростей, p – обозначает давление и Re – обозначает число Рейнольдса. После приведения этой системы в инволюцию методом, описанным в работе [11] (см. также [15]), она включает четыре уравнения, приведенные ниже и обозначенные $\{f^1, f^2, f^3, f^4\}$. Первое уравнение f^1 является уравнением неразрывности, два следующих уравнения f^2, f^3 являются уравнениями движения жидкости. В совокупности, эти три уравнения составляют саму систему уравнений Навье-Стокса. Четвертое уравнение f^4, являющееся *условием интегрируемости* [15] и добавленное при приведении в инволюцию, является хорошо известным в вычислительной гидродинамике уравнением Пуассона для давления [21]:

$$\begin{cases} f^1 : \ u_x + v_y = 0\,, \\ f^2 : \ u_t + uu_x + vu_y + p_x - \frac{1}{\mathrm{Re}}\triangle u = 0\,, \\ f^3 : \ v_t + uv_x + vv_y + p_y - \frac{1}{\mathrm{Re}}\triangle v = 0\,, \\ f^4 : \ u_x^2 + 2v_x u_y + v_y^2 + \triangle p = 0\,. \end{cases}$$

Заметим, что в данном случае алгоритм работы [17] приводит также к этой системе, без какой-либо декомпозиции. Это связано с квазилинейностью, т.е. линейностью по старшим производным, уравнений Навье-Стокса.

Рассмотрим дискретизацию приведенной выше дифференциальной системы на равномерной и ортогональной сетке с временным шагом τ и пространственным h. Для этого заменим частные производные *центральными конечными разностями*. Сначала выберем следующую КРД с шаблоном [5] размером 5×5, обусловленным указанным выбором разностного представления для вторых производных:

$$\begin{cases} \tilde f_1 := \frac{u^n_{j+1\,k}-u^n_{j-1\,k}}{2h} + \frac{v^n_{j\,k+1}-v^n_{j\,k-1}}{2h} = 0\,, \\ \tilde f_2 := \frac{u^{n+1}_{j\,k}-u^n_{j\,k}}{\tau} + \frac{u^2{}^n_{j+1\,k}-u^2{}^n_{j-1\,k}}{2h} + \frac{uv^n_{j\,k+1}-uv^n_{j\,k-1}}{2h} + \\ \quad + \frac{p^n_{j+1\,k}-p^n_{j-1\,k}}{2h} - \frac{1}{Re}\left(\frac{u^n_{j+2\,k}-2u^n_{j\,k}+u^n_{j-2\,k}}{4h^2} + \frac{u^n_{j\,k+2}-2u^n_{j\,k}+u^n_{j\,k-2}}{4h^2}\right) = 0\,, \\ \tilde f_3 := \frac{v^{n+1}_{j\,k}-v^n_{j\,k}}{\tau} + \frac{uv^n_{j+1\,k}-uv^n_{j-1\,k}}{2h} + \frac{v^2{}^n_{j\,k+1}-v^2{}^n_{j\,k-1}}{2h} + \\ \quad + \frac{p^n_{j\,k+1}-p^n_{j\,k-1}}{2h} - \frac{1}{Re}\left(\frac{v^n_{j+2\,k}-2v^n_{j\,k}+v^n_{j-2\,k}}{4h^2} + \frac{v^n_{j\,k+2}-2v^n_{j\,k}+v^n_{j\,k-2}}{4h^2}\right) = 0\,, \\ \tilde f_4 := \frac{u^2{}^n_{j+2\,k}-2u^2{}^n_{j\,k}+u^2{}^n_{j-2\,k}}{4h^2} + 2\frac{uv^n_{j+1\,k+1}-uv^n_{j+1\,k-1}-uv^n_{j-1\,k+1}+uv^n_{j-1\,k-1}}{4h^2} + \\ \quad + \frac{v^2{}^n_{j\,k+2}-2v^2{}^n_{j\,k}+v^2{}^n_{j\,k-2}}{4h^2} + \left(\frac{p^n_{j+2\,k}-2p^n_{j\,k}+p^n_{j-2\,k}}{4h^2} + \frac{p^n_{j\,k+2}-2p^n_{j\,k}+p^n_{j\,k-2}}{4h^2}\right) = 0\,. \end{cases}$$

Здесь верхний индекс нумерует узлы сетки по t, левый нижний по x и правый нижний по y. Ясно, что данная КРД аппроксимирует дифференциальную систему, поскольку каждое из разностных уравнений переходит в соответствующее дифференциальное в пределе $\tau,h\to 0$. Она же является и c-аппроксимацией, ибо выписанные разностные многочлены образуют [1,11] базис Гребнера.

Возникает, естественный вопрос: а не лучше ли использовать приведенную ниже КРД с более компактным шаблоном 3×3, которая выглядит более привлекательно с точки зрения численного решения разностных уравнений?

$$\begin{cases} \tilde e_1 := \frac{u^n_{j+1\,k}-u^n_{j-1\,k}}{2h} + \frac{v^n_{j\,k+1}-v^n_{j\,k-1}}{2h} = 0\,, \\ \tilde e_2 := \frac{u^{n+1}_{j\,k}-u^n_{j\,k}}{\tau} + \frac{u^2{}^n_{j+1\,k}-u^2{}^n_{j-1\,k}}{2h} + \frac{uv^n_{j\,k+1}-uv^n_{j\,k-1}}{2h} + \\ \quad + \frac{p^n_{j+1\,k}-p^n_{j-1\,k}}{2h} - \frac{1}{Re}\left(\frac{u^n_{j+1\,k}-2u^n_{j\,k}+u^n_{j-1\,k}}{h^2} + \frac{u^n_{j\,k+1}-2u^n_{j\,k}+u^n_{j\,k-1}}{h^2}\right) = 0\,, \\ \tilde e_3 := \frac{v^{n+1}_{j\,k}-v^n_{j\,k}}{\tau} + \frac{uv^n_{j+1\,k}-uv^n_{j-1\,k}}{2h} + \frac{v^2{}^n_{j\,k+1}-v^2{}^n_{j\,k-1}}{2h} + \\ \quad + \frac{p^n_{j\,k+1}-p^n_{j\,k-1}}{2h} - \frac{1}{Re}\left(\frac{v^n_{j+1\,k}-2v^n_{j\,k}+v^n_{j-1\,k}}{h^2} + \frac{v^n_{j\,k+1}-2v^n_{j\,k}+v^n_{j\,k-1}}{h^2}\right) = 0\,, \\ \tilde e_4 := \frac{u^2{}^n_{j+1\,k}-2u^2{}^n_{j\,k}+u^2{}^n_{j-1\,k}}{h^2} + 2\frac{uv^n_{j+1\,k+1}-uv^n_{j+1\,k-1}-uv^n_{j-1\,k+1}+uv^n_{j-1\,k-1}}{4h^2} + \\ \quad + \frac{v^2{}^n_{j\,k+1}-2v^2{}^n_{j\,k}+v^2{}^n_{j\,k-1}}{h^2} + \left(\frac{p^n_{j+1\,k}-2p^n_{j\,k}+p^n_{j-1\,k}}{h^2} + \frac{p^n_{j\,k+1}-2p^n_{j\,k}+p^n_{j\,k-1}}{h^2}\right) = 0\,. \end{cases}$$

Эта вторая КРД , очевидно, тоже аппроксимирует исходные дифференциальные уравнения инволютивной дифференциальной системы Навье-Стокса. Но, в отличие от первой КРА, ее разностные многочлены не образуют базис Гребнера и для проверки, является ли вторая КРА сильной мы должны использовать процедуру, описанную в предыдущем разделе.

Если мы последуем этой процедуре и рассмотрим первый же разностный многочлен, называемый в теории базисов Гребнера *S-многочленом* [1], который строится по первым двум разностным многочленам во второй КРА и приводит к ее алгебро-разностному следствию, которое в непрерывном пределе сводится [1] к дифференциальному уравнению $u_{xx}^2 + v_{yy}^2 + p_{xx} + p_{yy} = 0$. Это последнее уравнение, как можно убедиться прямой редукцией этого уравнений по полной инволютивной системе (см. работы [1, 17], где эта процедура подробно описана) , не является следствием уравнений Навье-Стокса. Это означает, что существуют решения уравнений Навье-Стокса, которые не удовлетворяют указанному уравнению. В данном случае можно даже указать пример такого решения.

Как известно, рассматриваемая нами двумерная система уравнений Навье-Стокса имеет следующее точное решение, найденное в работе [22]:

$$u = -\exp(-2t)\cos(x)\sin(y), \quad v = \exp(-2t)\sin(x)\cos(y), \quad p = -\exp(-4t)[\cos(2x) + \cos(2y)]/4.$$

В том, что это решение исходных уравнений не является решением уравнения $u_{xx}^2 + v_{yy}^2 + p_{xx} + p_{yy} = 0$ легко убедиться прямой подстановкой.

Следовательно, вторая КРА, не является сильной, и при ее использовании происходит потеря решений исходной системы уравнений Навье-Стокса.

Литература

1. Gerdt V.P. Consistency Analysis of Finite Difference Approximations to PDE Systems // Lect. Notes Comput. Sc. 7175, Springer-Verlag. – Berlin, 2012. – Pp. 28-42. – arXiv:math.AP/1107.4269.
2. Бухбергер Б., Емельяненко Г.А. Методы обращения трехдиагональных матриц // Вычисл. матем. и матем. физ. – 1973. – №13:3. – С. 546-554.
3. Кокс Д., Литтл Д., О'Ши Д.. Идеалы, многообразия и алгоритмы. – М.: Мир, 2000. – С. 687.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – С. 616.
5. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – С. 512.
6. Strikwerda, J.C. Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations, 2nd Edition. – SIAM, Philadelphia, 2004.
7. Thomas, J.W. Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, 2nd Edition // – New York: Springer, 1998.
8. Rosinger, E.E. Nonlinear Equivalence, Reduction of PDEs to ODEs and Fast Convergent Numerical Methods // – Pitman: London, 1983.
9. Gerdt V.P., Blinkov Yu.A., Mozzhilkin. Gröbner Bases and Generation of Difference Schemes for Partial Differential Equations // – SIGMA (electronic journal) 2, 051, 2006. – arXiv:math.RA/0605334.
10. Martin B., Levandovskyy V.. Symbolic Approach to Generation and Analysis of Finite Difference Schemes of Partial Differential Equations. In: Langer, U., Paule, P. (eds.) Numerical and Symbolic Scientific Computing: Progress and Prospects // – Wien: Springer, 2012. – Pp. 123-156.
11. Gerdt, V.P., Blinkov Yu.A. Involution and Difference Schemes for the Navier-Stokes Equations // Lect. Notes Comput. Sc. 5743 – Berlin: Springer, 2009. – Pp. 94-105.
12. Gerdt, V.P., Robertz D. Consistency of Finite Difference Approximations for Linear PDE Systems and its Algorithmic Verification // Proceedings of ISSAC 2010, – New York: ACM Press, 2010. – Pp. 53-59.
13. Thomas J.W. Numerical Partial Differential Equations: Conservation Laws and Elliptic Equations. – New York: Springer, 1999.
14. Дородницын В.А. Групповые свойства разностных уравнений // М.: Физматлит, 2001. – С. 240.
15. Seiler W.M. Involution: The Formal Theory of Differential Equations and its Applications in Computer Algebra. Algorithms and Computation in Mathematics, 24. – Heidelberg: Springer, 2010.

16. Thomas, J.M. Differential Systems AMS Colloquium Publications XX1 – AMS, New York, 1937; Systems and Roots. – Rychmond: The Wylliam Byrd Press, 1962.
17. Bächler T., Gerdt V., Lange-Hegermann M., Robertz D. Thomas Decomposition of Algebraic and Differential Systems // Lect. Notes Comput. Sc. 6244. – Berlin: Springer, 2010. – Pp. 31-54. – arXiv: math.AP/1008.3767.
18. Gerdt V.P. Algebraically Simple Involutive PDEs and Cauchy Problem // J. Math. Sci., 168(3). – 2010. – Pp. 362-367.
19. Levin, A. Difference Algebra. Algebra and Applications. – New York: Springer, 2008. – Vol. 8.
20. Ritt J. F. Differential Algebra. AMS Colloquium Publications XXXIII. – New York: American Mathematical Society, 1950.
21. Gresho P.M., Sani, R.L. On Pressure Boundary Conditions for the Incompressible Navier-Stokes Equations // Int. J. Numer. Meth. Fluids – 1987. – № 7, – Pp. 1111-1145.
22. Kim J., Moin, P. Application of a Fractional-Step Method To Imcompressible Navier-Stokes Equations // J. Comput. Phys. – 1985. – № 59. – Pp. 308-323.