

## АНАЛИЗ СВОЙСТВ ОПЕРАТОРОВ ЛОГИЧЕСКОГО БАЗИСА ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Трофимов Ярослав Александрович

Аспирант;

ГОУ ВПО «Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,

Институт системного анализа и управления;

141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;

e-mail: yaroslav.trofimov@gmail.com.

*В статье излагаются результаты анализа операторов искусственных нейронных сетей, разработанных с использованием полигауссовских вероятностных моделей для наблюдаемых данных. Проектирование искусственных нейронных сетей прямого распространения рассматривается как результат аппроксимации Байесовских нейронных сетей.*

**Ключевые слова:** Байесовские нейронные сети, логистическая функция, полигауссовская вероятностная модель.

## THE ANALYSIS OF PROPERTIES OF OPERATORS OF LOGIC BASIS OF POLYGAUSSIAN ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS

Trofimov Yaroslav

Post-graduate student;

Dubna International University of Nature, Society, and Man,

Institute of system analysis and management;

141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;

e-mail: vas yaroslav.trofimov@gmail.com.

*The article is devoted to the analysis of operators of the artificial neural networks developed with use of polygaussian distributed models for the data. Designing of feed-forward neural networks is considered as result of approximation of Bayesian neural networks.*

**Keywords:** Bayesian neural networks, logistical function, poligaussian distributed model.

### Введение

Проблемами построения искусственных нейронных сетей (ИНС), как известно, является выбор нейросетевой парадигмы (структуры сети), преобразование входных данных для решения задачи, интерпретация весовых коэффициентов и смещений нейронов сети. Эти проблемы хорошо известны. Нами рассматриваются подходы к построению ИНС, позволяющие решить указанные проблемы.

Построение искусственных нейронных сетей под конкретную задачу предполагает наличие сведений о вероятностном представлении наблюдаемых данных [3]. Однако далеко не всегда в распоряжении проектировщика ИНС могут быть данные в особенности такие, как плотности распределения вероятностей (ПРВ).

В случае отсутствия конкретных данных при статистическом синтезе адаптивных алгоритмов требуется задание параметрической модели, адекватной наблюдаемым данным  $X$ . Под  $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  понимается случайный вектор с  $N$  координатами (отсчётами). В качестве такой модели предлагается использовать полигауссовскую вероятностную модель

$$W[X] = \sum_{i=1}^l q_i \cdot N_i(X|m(i), R(i)), \quad 0 \leq q_i \leq 1, \quad \sum_i q_i = 1, \quad (1)$$

где  $N_i$  – гауссовская ПРВ,  $m$  и  $R$  – вектор математического ожидания и ковариационная матрица гауссовского распределения вероятностей.

ИНС на основе применения полигауссовской плотности распределения вероятности (ППРВ) названы нами полигауссовскими ИНС[1, 2].

Ниже рассматриваются операторы логического базиса ИНС на основе использования нейросетевой парадигмы Байесовских сетей и на основе применения логического базиса ИНС прямого распространения.

### 1. Свойства операторов логического базиса Байесовских нейронных сетей

Применительно к задачам классификации алгоритмы обработки сводятся к вычислению апостериорных вероятностей (АПВ)  $I_j(X)$  для соответствующих классов, и принятие решения на основе сравнения этих АПВ, либо вычисление оценок какого-либо параметра (например, номера класса с применением АПВ  $I_j(X)$ ).

Таким образом, основной оператор для вычислений

$$I_j(X) = \sum_{jk=1}^{K_j} I_{jk}(X) = \sum_{jk=1}^{K_j} \frac{q_{jk} \cdot N_{jk}(X)}{W},$$

где  $I_{jk}(X)$  – АПВ  $jk$ -ой гауссовской компоненты полигауссовской модели (1);  $K_j$  – количество гауссовских компонент, образующих ПРВ  $j$ -го класса

$$V_j(X) = \sum_{jk=1}^{K_j} q_{jk} \cdot N_{jk}(X).$$

Приведём некоторые свойства АПВ  $I_{jk}(X)$ . Средние значения  $\mu I_{jk}$  и дисперсии  $DI_{jk}$  будут равны

$$\mu I_{jk} = E[I_{jk}] = q_{jk},$$

$$DI_{jk} \cong q_{jk} - q_{jk}^2.$$

АПВ  $I_{jk}(X)$  можно также представить в виде

$$I_{jk}(X) = \frac{q_{jk} \cdot N_{jk}(X)}{q_{jk} \cdot N_{jk}(X) + q_0 \cdot N_0(X) + \varepsilon(X)}, \tag{2}$$

где  $\varepsilon(X) = W(X) - q_0 \cdot N_0 - q_{jk} \cdot N_{jk}(X)$ ,  $\varepsilon(X) \geq 0$ .

Подставив значения для гауссовских ПРВ (2) и взяв нулевое приближение ( $\varepsilon(X) = 0$ ), для  $I_{jk}(X)$  получим соотношение

$$I_{jk}(X) = \frac{1}{1 + e^{-T_{jk}(X)}}, \tag{3}$$

где

$$T_{jk}(X) = \frac{1}{2}(X, (R_0^{-1} - R^{-1}(jk) \cdot X) + (X, R^{-1}(jk) \cdot m(jk) -$$

$$-\frac{1}{2}Q_{jk,jk} + \frac{1}{2}\ln(\det R_0 / \det R(jk)) + \ln(q_0 / q_1), \quad (4)$$

$(X, Y)$  – скалярное произведение векторов  $X, Y$ .

Необходимо отметить одно из важнейших свойств, вытекающих по соотношениям (3) и (4): Выражение  $e^{-T_{jn}(X)}$  является частным отношением правдоподобия в статистическом смысле, а величины

$$Q_{jk}(X) = (X^T, R^{-1}(jk) \cdot X) \text{ и } S_{jk}(X) = (X, R^{-1}(jk) \cdot (x - m(jk)))$$

являются условными достаточными статистиками, поскольку по этим значениям  $Q_{jk}$  и  $S_{jk}$  определяются все апостериорные отношения правдоподобия.

Другими словами, для любых последующих вычислений относительно информации, содержащейся в  $X$ , достаточно вычислить статистики  $Q_{jk}$  и  $S_{jk}$ . Заметим, что  $Q_{jk}(X)$  является квадратичной формой (квадратичной функцией), а  $S_{jk}(X)$  – линейной функцией наблюдаемых данных  $X$ .

При представлении данных  $X$  в виде смеси гауссовских случайных векторов с одинаковыми  $R(jk) = R_0$  и различными  $m(jk)$ , квадратичная составляющая в (4) для  $T(X)$  исчезает, и АПВ является функцией линейных форм  $S_{jk}(X)$ . Опираясь на теорему Колмогорова, можно утверждать, что операторы логического базиса Байесовских ИНС на основе полигауссовских ПРВ с различными средними и ИНС прямого распространения совпадают.

В качестве примера вычисления  $I_{jk}(X)$  и  $I_j(X)$  на рис. 1 – 4 приведены графики для двухкоординатного вектора  $X = (x_1, x_2)$ . При этом гипотеза  $H_1 : X \in \Omega_1, X = X_0 + V, V = (A \cdot \cos(\varphi), A \cdot \sin(\varphi))^T$ , где  $X_0 = (x0_1, x0_2)$ ,  $x0_i$  – статистически независимые гауссовские случайные величины,  $\varphi$  – равновероятная случайная величина. При истинности гипотезы  $H_0 : X \in \Omega_0, X = (x0_1, x0_2)$ .

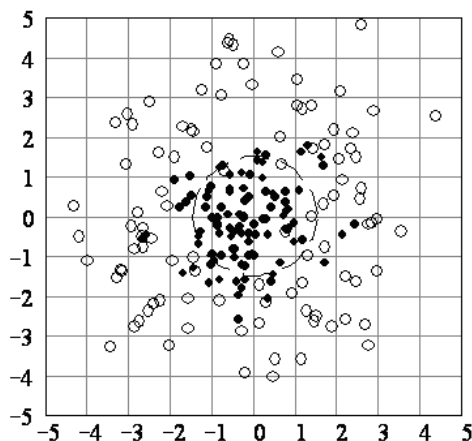


Рис. 1. Реализации вектора  $X$  при истинности различных гипотез и вид дискриминантной линии, разделяющей множество реализаций

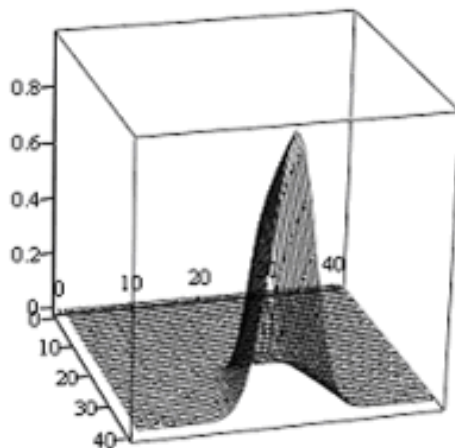


Рис. 2. Апостериорная вероятность одной из гауссовских компонент  $I_{jk}(X)$

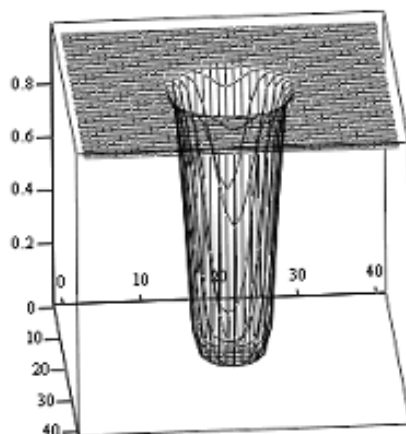


Рис. 3. Апостериорная вероятность при истинности первой гипотезы  $I_1(X)$

## 2. Операторы обучения полигауссовской ИНС

В качестве критерия выбора значений параметров обозначим

$$\Theta = (q_1, q_2, \dots, q_K, m(1), m(2), \dots, m(K), R(1), R(2), \dots, R(K)) ,$$

определяющих полигауссовскую ПРВ:

$$W(u) = W(u|\Theta) .$$

Можно использовать критерий меры информации Кульбака [4]. Этот критерий приводит к оценкам максимального правдоподобия:

$$\frac{\partial}{\partial \Theta} (\ln W(u|\Theta)) = 0 . \tag{5}$$

Вычислив значения правдоподобия (5) и используя градиентные методы рекуррентного оценивания, получим для составляющих параметров следующие достаточно очевидные алгоритмы:

$$q(jk) = \frac{b^2(jk)}{\sum_{jk=1}^K b^2(jk)}, \tag{6}$$

$$b_t(jk) = b_{t-1}(jk) + \gamma b(jk) \cdot \left( \frac{I_{jk}(X(t))}{b_{t-1}(jk)} - b_{t-1}(jk) \right) \cdot I_{jk}(X(t)), \tag{7}$$

$$m_t(jk) = m_{t-1}(jk) + \gamma m(jk) \cdot (X(t) - m_{t-1}(jk)) \cdot I_{jk}(X(t)), \tag{8}$$

$$R_t(jk) = R_t(jk) + \gamma R(jk) \cdot (X(t) \cdot X^T(t) - R_{t-1}(jk)) \cdot I_{jk}(X(t)). \tag{9}$$

Нами доказывается состоятельность и эффективность алгоритмов адаптации (6), (7), (8), (9).

### 3. Операторы логического базиса типовых ИНС

Заметим, что типовые ИНС предполагают использование только линейной достаточной статистики  $S_{jk} = (X, R^{-1} \cdot m(jk))$ . Нами доказывается на нескольких примерах, что использование билинейной формы  $S_{jk}(X)$  для построения ИНС требуется увеличение количества нейронов в первом слое. Для отмеченного выше примера классификации на рис. 4 приведена структура ИНС с применением квадратичной формы. На рис. 5 представлены дискриминантные линии этих двух структур при использовании одного нейрона с квадратичным функционалом и сеть прямого распространения с пятью нейронами в первом слое.

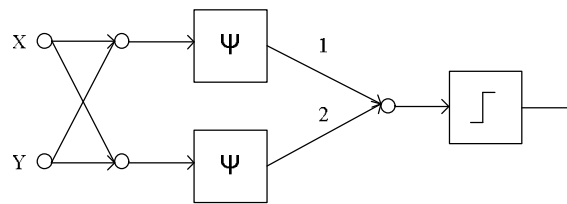


Рис. 4. Нейронная сеть с квадратичными функциями активации  $\psi$  для обнаружения сигнала со случайной начальной фазой

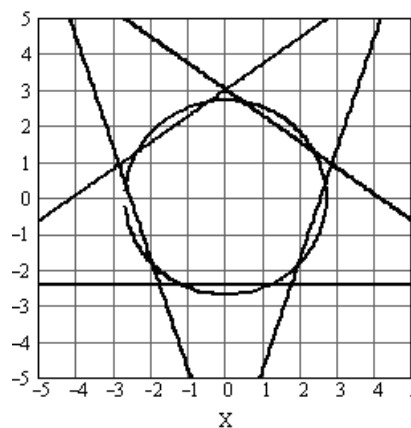


Рис. 5. Вид дискриминантных линий для Байесовской сети (окружность) и первого слоя ИНС прямого распространения

Весьма интересным и полезным для анализа сетей может быть найденная нами ПРВ частного отношения АПВ (логистической функции) (см. рис. 6):

$$ls = \frac{1}{1 + e^{-S(X)}},$$

$$S(X) = (X, R^{-1} \cdot m) - \frac{1}{2} d,$$

$$d = (m, R^{-1} \cdot m),$$

$$V(ls|H) = \frac{1}{ls(1-ls)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot d}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\ln(\frac{ls}{1-ls}) + (-1)^H \cdot d)}, \quad H = (0; 1).$$

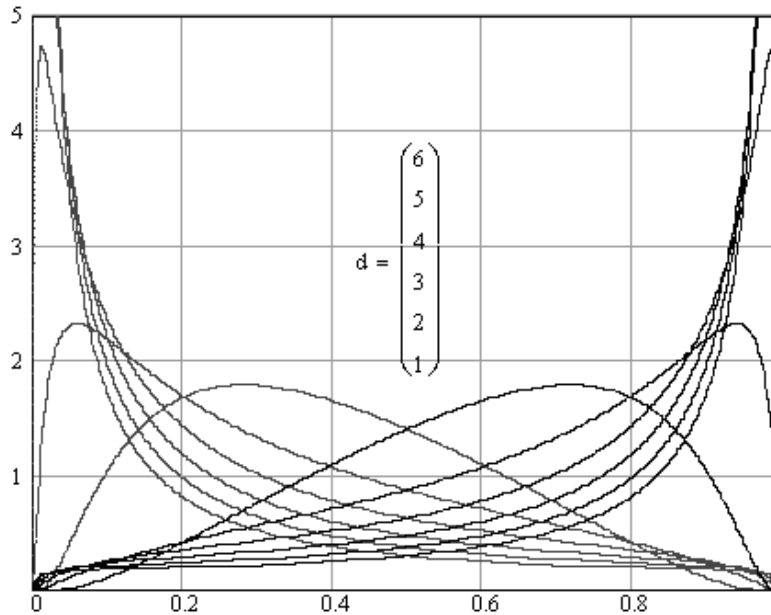


Рис. 6. Вид графиков ПРВ логистических функций при истинности различных гипотез и различных отношениях  $d$  (сигнал/шум)

На рис. 7 и рис. 8 приведены 3D-графики выходов двухслойной нейронной сети с использованием логистической функции в качестве функции активации.

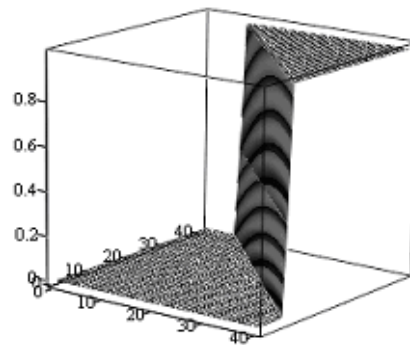


Рис. 7. Вид выхода одного из нейронов первого слоя нейронной сети прямого распространения

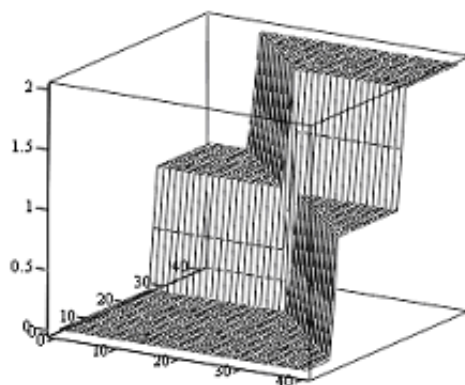


Рис. 8. Вид суммы выходов двух нейронов первого слоя нейронной сети прямого распространения

Анализируя преобразование в структуре ИНС прямого распространения сигнала можно отметить, что выход отдельного взятого нейрона с логистической функцией активации можно интерпретировать как выход с логической переменной. А выход с функцией активации суммы выходов первого слоя – как операцию «ИЛИ» над выходами нейронов первого слоя.

## Заключение

Структура первого скрытого слоя нейронной сети на основе применения полигауссовской вероятностной модели для наблюдаемых данных определяется вычислением достаточных статистик на основе квадратичных и линейных форм.

Применение представлений полигауссовских ПРВ с различными средними значениями приводит к алгоритмам с вычислением достаточных статистик первого слоя нейронных сетей на основе линейных форм.

Настройка весов и смещений полигауссовской ИНС осуществляется по сопряженному градиентному алгоритму, реализующего оценки максимального правдоподобия весовых функций и параметров смещения.

Применение логистических функций при построении нейронных сетей эквивалентно переходу после первого скрытого слоя к вычислению выхода сети путём последующего применения операций таких как «ИЛИ» и «ИЛИ-НЕ».

Структура сети ИНС на основе полигауссовских ПРВ данных позволяет однозначно интерпретировать весовые коэффициенты и коэффициенты смещения ИНС.

## Список литературы

1. Трофимов А.Т, Трофимов Я.А. Принципы построения искусственных нейронных сетей на основе полигауссовских вероятностных моделей // Сб. научн. тр. 11-ой Всерос. н.-т. конф. «Нейроинформатика 2009». – М.: МИФИ, 2009. – Т.2. – С. 95-99.
2. Трофимов А.Т, Трофимов Я.А. Статистические методы синтеза искусственных нейронных сетей // Доклады 11-й Междунар. конф. «Цифровая обработка сигналов и её применение». – М.: Ин-связьиздат, 2009. – Т.2. – С. 590-592.
3. Галушкин А.И. Нейронные сети: основы теории. – М.: Горячая линия – телеком, 2010.
4. Кульбак С. Теория информации и статистика. – М.: Наука, 1967.