

**СИНЕРГИЗМ ИНФОРМАЦИИ В ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ И
ПРИНЦИП КОМПЕНСАЦИИ НЕПОЛНОТЫ ИЗВЛЕКАЕМЫХ ЗНАНИЙ.
Ч. 1: ПАРАДОКСЫ ЛОГИКИ АДЕКВАТНОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В
ПРОБЛЕМЕ ВУНДГЕЙЛЕРА**

Ульянов Сергей Викторович

*Доктор физико-математических наук, профессор;
ГБОУ ВПО «Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,
Институт системного анализа и управления;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
e-mail: uyanovsv@mail.ru.*

Рассматривается решение проблемы Вундгейлера об адекватности исходных и преобразованных моделей физических релятивистских объектов управления. Введен принцип компенсации неполноты извлекаемых знаний на основе применения интеллектуальных вычислений и синергизма квантовой информации, скрытой в классических состояниях процессов управления.

Ключевые слова: синергизм информации, принцип компенсации неполноты знаний, проблема Вундгейлера.

**SYNERGISM INFORMATION IN INTELLIGENT CONTROL AND COMPENSETION
PRINCIPLE OF INCOMPLETENESS EXTRACTED KNOWLEDGE.
PT. 1: LOGIC PARADOXES OF PHYSICAL MODEL ADEQUACY IN WUNDGEILER'S
PROBLEM**

Ulyanov Sergey

*Doctor of Science in Physics and Mathematics, professor;
Dubna International University of Nature, Society, and Man,
Institute of system analysis and management;
141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;
e-mail: reshetnikovag@pochta.ru.*

The solution of Wundgeiler's problem on adequacy of original and transformed physical relativistic models is considered. Principle of incompleteness extracted knowledge compensation based on computational intelligence and synergism of hidden quantum information in classical control states is introduced.

Keywords: synergism information, principle of incompleteness knowledge compensation, Wundgeiler's problem.

Введение

Исследования и практика показали следующее: разработка, развитие и реализация эффективных высоких наукоемких информационных технологий (ИТ) (создаваемых в различных областях науки и техники) неразрывно связаны с необходимостью развития и повышения уровня интеллектуальности используемых моделей процессов и систем, объективно учитывающих в законах эволюции контекстуально-зависимые физические эффекты, ограничения и информационные границы, реально существующие в конкретных моделях реальных объектов.

Особое значение решение данной проблемы имеет для построения корректных моделей новых объектов и ИТ, основанных на физических и логических эффектах релятивистских, квантовых и термодинамических теориях динамических систем.

Так, например, развитие и создание новых методов и систем проверки фундаментальных принципов квантовой информации передачи данных в космическом пространстве¹ привело к необходимости переосмысления взаимоотношений квантовой теории и общей теории относительности: «Physical theories are developed to describe phenomena in particular regimes, and generally are valid only within a limited range of scales. For example, general relativity provides an effective description of the Universe at large length scales, and has been tested from the cosmic scale down to distances as small as 10 meters [1, 2]². In contrast, quantum theory provides an effective description of physics at small length scales. Direct tests of quantum theory have been performed at the smallest probeable scales at the Large Hadron Collider $\sim 10^{-20}$ meters, up to that of hundreds of kilometers [3]³. Yet, such tests fall short of the scales required to investigate potentially significant physics that arises at the intersection of quantum and relativistic regimes. We propose to push direct tests of quantum theory to larger and larger length scales, approaching that of the radius of curvature of spacetime, where we begin to probe the interaction between gravity and quantum phenomena. In particular, we review a wide variety of potential tests of fundamental physics that are conceivable with artificial satellites in Earth orbit and elsewhere in the solar system, and attempt to sketch the magnitudes of potentially observable effects». И далее «From a more pragmatic perspective, as quantum communication technologies such as quantum key distribution advance into Space towards large distances, some of the fundamental physical effects discussed here may need to be taken into account to make such schemes viable».

На рис. 1,а показана схема экспериментальной проверки фундаментальных теорий с целью выявления и описания границ применимости и возможных практических приложений. На рис. 1,б приведена схема разработки и иллюстрация принципа работы квантового резонатора на атом – чипе⁴ как базового элемента многих микро- и наноэлектромеханических устройств, используемых в современном приборостроении и включающих в себя многие из перечисленных квантовых и релятивистских эффектов. Таким образом, разработка наукоёмких ИТ затрагивает одновременно пересмотр исходных положений таких фундаментальных теорий как квантовая механика, общая теория квантовой гравитации, квантовой релятивистской термодинамики, теории неразрушающих квантовых измерений в криволинейном пространстве – времени, квантовой релятивистской теории описания поведения релятивистской частицы в римановом и неримановом пространственно – временном континууме и мн. др.

В свою очередь, существование алгоритмической неразрешимости при применении традиционных вычислительных методов и количественных подходов к поиску оптимальных решений сложных задач физики, механики, биофизики, систем управления, развитие наукоёмких компьютерных (типа квантового компьютера) и прорывных ИТ типа квантовый Интернет на основе квантовых слепых облачных вычислений (quantum blind cloud computing), квантовая криптография, квантового управления наноструктурами, формирования интеллектуальных наноматериалов, разработка ИТ нанотехнологий и мн. др. привело к необходимости поиска и развития технологий на основе новых видов интеллектуальных вычислений (ИВ) и программно-аппаратной поддержки вычислительных процессов.

¹Rideout D., Jennewein T., Amelio-Camelia G., Demarie T.F., Higgins B.L., Kempf A. et all. Fundamental quantum optics experiments conceivable with satellites – reaching relativistic distance and velocities // arXiv:1206.4949v1 [quant-ph]. – 2012.

²[1] Dimopoulos S., Graham P. W., Hogan J. M., and Kasevich M. A. Testing general relativity with atom interferometry // Phys. Rev. Lett. – 2007. – Vol. 98. – P. 111102.

[2] Dimopoulos S., Graham P. W., Hogan J. M., and M. A. Kasevich M. A. General relativistic effects in atom interferometry // Phys. Rev. D. – 2008. – Vol. 78. – P. 042003.

³Ursin R., Tiefenbacher F., Schmitt-Manderbach T., et all. Entanglement-based quantum communication over 144 km // Nature Physics. – 2007. – Vol. 3. – No 7. – Pp. 481-486.

⁴Bernon R., Hattermann H., Bothner D. et all. Manipulation and coherence of ultra-cold atoms on a superconducting atom chip // arXiv:1302.6610v1 [physics.atom-ph]. – 2013.

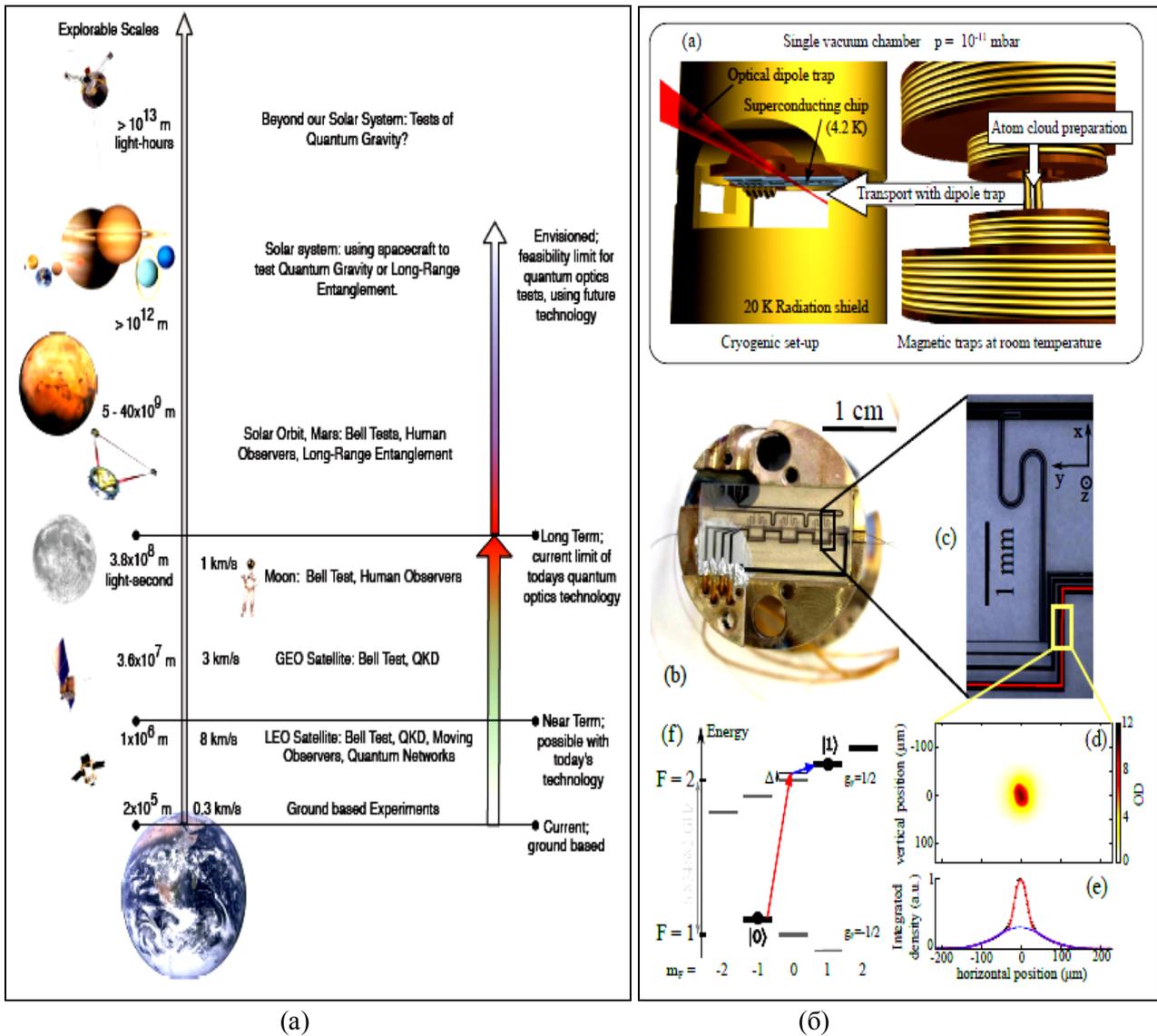


Рис. 1. Схема тестирования фундаментальных теорий (а) и квантового резонатора (б)

На рис. 2 показаны схематично способы формирования квантового бита⁵ на основе квантовых резонаторов как основного элемента квантовых ИТ.

Разработка подобных платформ элементной базы аппаратной поддержки квантовых ИТ потребовало одновременно создания и внедрения новых видов нанотехнологий изготовления материалов и технологической оснастки. Резко возросший объем перерабатываемой информации и сложность решаемых задач в науке и технике привел к необходимости создания новой элементной базы квантового компьютера, способного реализовать квантовый массивный параллелизм обработки информации, решать классические алгоритмически неразрешимые задачи с экспоненциальной скоростью, обладая огромной памятью и быстродействием.

⁵You J.Q., Nori F. Atomic physics and quantum optics using superconducting circuits // Nature. – 2011. – Vol. 474. – Pp. 589-597.

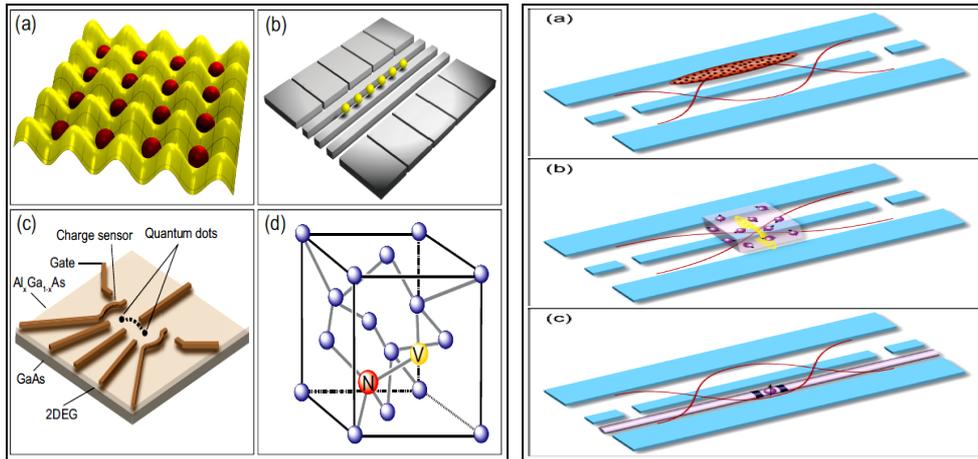


Рис. 2. Схемы формирования квантовых битов на основе нанотехнологий

На рис. 3,а,б,в показана схема квантового компьютера с новыми видами элементной базы^{6,7} на сверхпроводниках с квантово-механическими макроэффектами, позволяющие реализовать многие, ранее не реализуемые по техническим и алгоритмическим причинам, классические задачи.

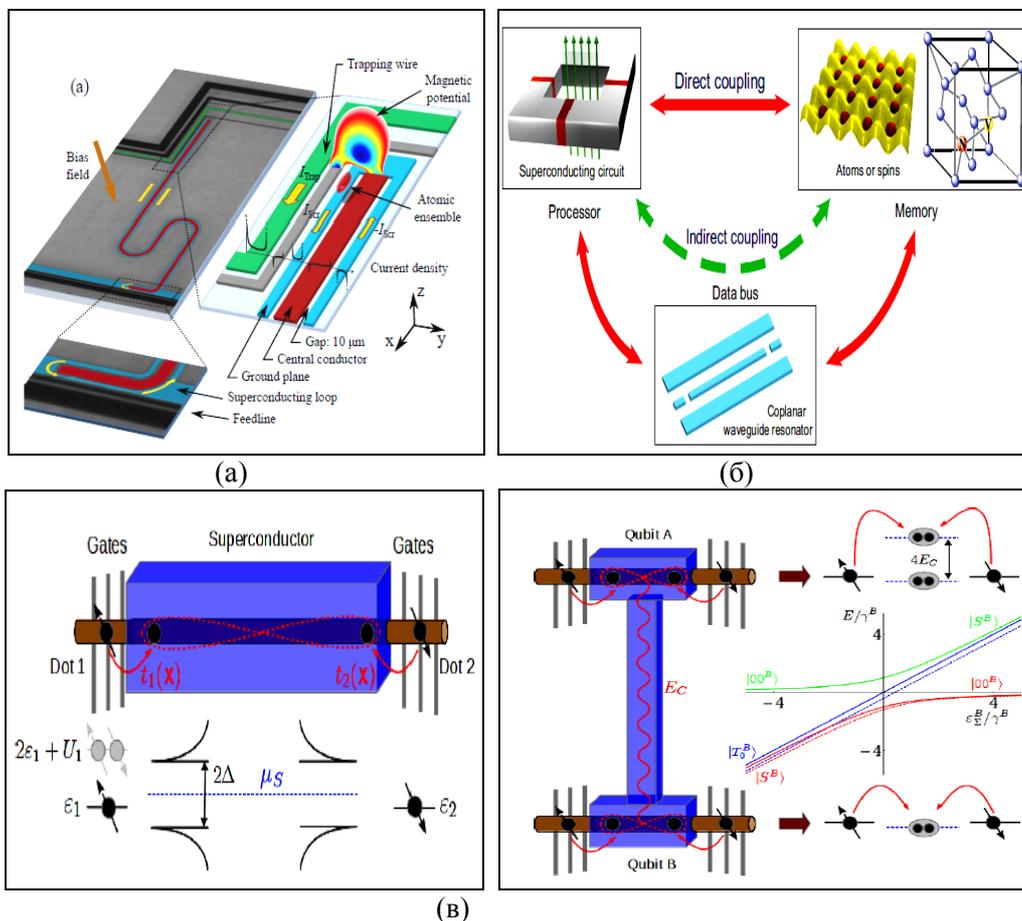


Рис. 3. Схема квантового резонатора (а) и квантового компьютера (б) на сверхпроводящих элементах и и шиной обмена данными на компланарном волноводном квантовом резонаторе

⁶Xiang Z., Ashhab F., You J.Q., Nori F. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems // arXiv:1204.2137v2 [quant-ph] – 2012.

⁷Leijnse M., Flensberg K. Coupling spin qubits via superconductors // arXiv:1303.3507v1 [cond-mat.mes-hall] – 2013.

Поэтому выбранное решение фундаментальных и прикладных проблем конкретной технологии ИВ существенно влияет на эффективность разработки и качество применения моделей наукоемких ИТ. Возрастание сложности структур современных физических объектов и логических устройств, трудности прогнозирования непредвиденных (нештатных) ситуаций управления только усиливают актуальность данной проблемы и внимание к поиску её решения.

Такого рода задачи относятся к т.н. проблеме «Intelligent System of Systems Engineering».

В указанной проблеме изучаются в общем виде сложные структуры систем управления с различными уровнями и шкалами интеграции и/или приоритетным обменом информацией между подсистемами с целью установления необходимых и достаточных условий надёжного автономного функционирования объекта управления (ОУ) во внешней среде.

В теории и систем управления одним из эффективных подходов снижения риска принятия решения (от неполноты описания модели ОУ) является разработка структур робастных ИСУ.

Данные структуры реализуют *принцип компенсации неопределенности описания модели ОУ за счет повышения уровня интеллектуальности традиционных систем управления.*

В частности, компенсация информационной неопределенности осуществляется за счет повышения интеллектуальности нижнего исполнительского уровня в виде соответствующих структур интеллектуальных регуляторов и соответственно спроектированных (с учетом в производственных правилах информационного риска) самоорганизующихся робастных баз знаний (БЗ) [1, 2].

Таким образом, реализация данного принципа обеспечивает робастность ИСУ при неполном описании модели ОУ за счет учета в производственных правилах проектируемых БЗ неточной (imperfect), извлекаемой из данной модели, информации и самоорганизации БЗ.

Выбор корректной модели, в первую очередь ОУ минимальной алгоритмической сложности, является важной для практики задачей. Однако сам критерий минимальной алгоритмической сложности при выборе метода описания модели ОУ требует уточнения и физического обоснования. Данный вывод усиливается при исследовании моделей квантовых и релятивистских ОУ [3, 4] в разработке квантовой информатики, систем квантового и релятивистского управления наноструктурами, нанотехнологий проектирования интеллектуальных материалов и др.

В результате реализация отмеченного принципа осуществляется выбором соответствующего уровня ИВ [2] и является одним из основных положений при разработке новых видов ИВ.

Построение новых моделей квантовой информатики и квантового релятивистского управления для корректной интерпретации требуют привлечения методов нестандартных (квантовой и релятивистской) логик,обладают многими «парадоксами» логического вывода и суждений [5] и связаны с решением т.н. проблемы Вундгейлера корректного описания моделей [4].

Целью данной части статьи⁸ является разъяснение (по возможности подробное) особенностей проблемы Вундгейлера и роль ее решения в построении корректных моделей физических объектов.

В Части 1 данной работы рассматриваются особенности проблемы Вундгейлера на примере релятивистских объектов и вопросы корректности нелинейных преобразований систем отсчета в пространственно-временных континуумах. Решение данных вопросов имеет принципиальное значение при обосновании таких вопросов как допустимость сверхсветовых скоростей в моделях релятивистских объектов и процессах передачи информации, экспериментальной проверки СТО и ОТО, возможности практического использования релятивистских эффектов и др.

В Части 2 работы рассматриваются вопросы построения новых моделей теории относительности типа «удвоенных» (деформируемых) СТО и ОТО, и особенности квантовых объектов: энтропийные модели обобщенного принципа неопределенности и его роль в разработке квантовых релятивистских

⁸Продолжение работы: Ульянов С.В., Решетников Г.П., Мишин А.А. Физическая корректность представления знаний и алгоритмическая сложность описания робастных моделей объектов управления. Ч.1 // Системный Анализ в Науке и Образовании: электрон. науч. журнал. – Дубна, 2011 – № 3 [Электронный ресурс]. URL: <http://www.sanse.ru/archive/21.> – 0421100111\0025.

объектов, вопросы информационный причинности, взаимосвязи принципов дополнительности и нелокальности, корректность и сверхсветовые скорости в релятивистских квантовых уравнениях с высшим спином, физические ограничения на интерпретацию экспериментально проверяемых физических теорий и др.

В Части 3 работы рассматриваются вопросы построения робастных баз знаний ИСУ физическим экспериментом рассматриваемым классом физических объектов и роль принципа компенсации неполноты извлекаемой информации за счет новых видов интеллектуальных вычислений, квантовых и релятивистских нечетких логик принятия решений.

1. Логика решения парадоксов проблемы Вундгейлера

Переход от традиционного описания моделей сложных физических объектов на основе ньютоновой механике к термодинамическим, релятивистским и квантовым моделям продиктован развитием новых инновационных (прорывных) технологий таких как нанотехнологии, технологии квантового управления микро- нано- объектами, технологии релятивистской навигации космических летательных аппаратов, технологии квантовой передачи и защиты (криптографии) информации, технологии квантового Интернета, технологии квантового распознавания и визуальной криптографии, квантового интеллектуального робастного управления роботами, подвижными объектами, мехатроники и мн. др. Корректный выбор соответствующего уровня физической модели описания свойств исследуемого ОУ опирается на новые виды знаний, которые необходимо внести в процессы инженерии интеллектуального проектирования указанных ИТ и планирования физического эксперимента.

1.1. Вопросы теории моделей релятивистских динамических систем: решение проблемы Вундгейлера

При построении моделей, например релятивистских и квантовых динамических систем, особое внимание приходится уделять процессам измерения в различных системах отсчета таких физических параметров, как пространственные расстояния, квантового состояния и момента, напряженности электромагнитного и гравитационного полей и др., имеющих принципиальное значение для разработки соответствующих моделей управления.

Например, для построения модели квантовой памяти требуется модель корректного описания поведения $\frac{1}{2}$ -спина электрона при воздействии управляющего электромагнитного поля и случайных возмущений геодезических траекторий движения квантовой системы в криволинейном пространстве-времени⁹.

Для таких моделей необходимо иметь решение так называемой проблемы Вундгейлера, ранее не рассматривавшейся в инженерной научно-технической литературе.

Решение данной проблемы связано, например, с описанием релятивистских объектов *первого* и *второго* рода, что имеет принципиальное значение при выборе физически реализуемых моделей управления физическим и математическим (логическим, мысленным) экспериментом.

Поэтому приведенное ниже решение проблемы Вундгейлера, ее математические и физические аспекты имеют принципиальное значение для выбора физически реализуемых моделей процессов измерения и управления релятивистскими и квантовыми динамическими системами при проведении физических экспериментов и интерпретации результатов.

⁹ Palmer M. C., Takahashi M., Westman H. F., Localized qubits in curved spacetimes // Annals of Physics. – 2012. – Vol. 327. – №5. – Pp. 1078-1131 (available from: <http://xxx.lanl.gov/> arXiv: 1108.3896v1 [quant-ph]. – 2011).

1.1.1. О проблеме Вундгейлера

В докладе А. Вундгейлера¹⁰ на 1-ой Международной конференции по тензорной геометрии и ее приложениям (Москва, 17-23 мая, 1934г.) было обращено внимание на следующее: «1) Всякое выражение (соответственно всякая система уравнений) может быть записано в инвариантном виде и притом относительно любой группы преобразований, если оно задано в некоторой специальной системе координат. Существует ли общий метод для получения этого инварианта?».

А. Вундгейлер в частности указывает, что «... уравнения Максвелла могут быть представлены в инвариантной форме относительно *галилеевой группы*. Точно так же ньютоновы уравнения движения можно считать инвариантными относительно общих преобразований пространства и времени. Это достигается введением нового объекта, «вектора времени»».

В связи с изложенным выше фактом отметим следующее. Э. Картан¹¹ ввел понятие тензора «количества движения – энергии». Это дало ему возможность получения общековариантных уравнений, как в классической, так и в релятивистских областях. Так, Картан пишет: «Уравнения Лагранжа позволяют дать законам механики форму, не зависящую от установленной в пространстве координатной системы, и в этом заключается их значение. Напротив, принцип сохранения количества движения и энергии дает законам механики форму, не зависящую от системы референции, принятой во вселенной (пространство – время): если производят замену переменных, относящуюся *одновременно* к параметрам положения системы и ко времени, то достаточно иметь выражение тензора «количество движения – энергия» в новой системе координат, чтобы вывести из него уравнения движения».

Таким образом, получается схема, которой должны подчиняться все механические теории и которой действительно подчиняется и релятивистская механика».

Отметим, что этот вопрос также обсуждался подробно в работах В.А. Фока¹² и Дж.Л. Синджа¹³ и мн. др. Поэтому в указанной работе А. Вундгейлер формулирует второй важный вопрос: «2) евклидова геометрия рассматривается как теория инвариантов ортогональной группы (аффинная – как теория инвариантов преобразований пространства и времени и т.д.). Каким образом это согласуется с фактами, изложенными в абзаце 1)?».

Будем называть вопросы подобного рода *проблемой Вундгейлера*¹⁴.

Аналогичные идеи были высказаны В.А. Фоком: «Особенно большое значение принято придавать ковариантности уравнений» и далее «Ковариантность уравнений позволяет писать их, не предвзято выбора координатной системы. Кроме того, требование ковариантности уравнений имеет большое эвристическое значение, так как ограничивает разнообразие формы уравнений и тем самым помогает отобрать из них правильные. Необходимо, однако, подчеркнуть, что это ограничение имеет место при обязательном условии, что ограничивается также и число вводимых функций, если же допустить введение любого числа новых вспомогательных функций, то практически любым уравнениям можно придать ковариантную форму. Таким образом, сама по себе ковариантность уравнений отнюдь не является выражением какого либо физического закона».

¹⁰ Вундгейлер А. Объекты, инварианты и классификация геометрий // Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике / Под ред. В.Ф. Кагана. М.: ОНТИ. – 1937. – Вып. 4. – С. 376-385.

¹¹ Картан Э. Интегральные инварианты. – М.: Гостехиздат, 1940.

¹² Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: Гостехиздат, 1955.

¹³ Синдж Дж.Л. Тензорные методы в механике. – М.: Изд-во иностр. Лит, 1947.

¹⁴ Петров Б.Н. Гольденблат И.И., Уланов Г.М. Ульянов С.В. Проблемы управления релятивистскими и квантовыми динамическими системами. – М.: Наука, 1982. – С. 20-29.

Следовательно, имеем следующую схему:

Группа преобразований, относительно которой инвариантны уравнения теории	Закон сохранения
<i>Трансляция во времени</i>	<i>Энергия</i>
<i>Пространственная трансляция</i>	<i>Импульс</i>
<i>Повороты</i>	<i>Момент импульса</i>

Как связать данное утверждение с известным положением, что законы сохранения являются следствием ковариантности уравнений относительно определенных групп преобразований?

Общая теория связи между инвариантностью и законами сохранения в вариационном исчислении принадлежит Э. Нетер и Ф. Клейну, опубликовавшим свои работы в 1918г. Вместе с тем, еще в 1908г. Е. и Ф. Коссер показали, что законы сохранения энергии, количества движения и момента количества движения являются необходимыми и достаточными условиями инвариантности гамильтониана упругой среды по отношению к группе евклидовых движений.

Проблема Вундгейлера имеет два аспекта: *математический* и *физический*, отражая тем самым корректную формализацию модели и ее физическую интерпретацию.

Рассмотрим математический аспект обсуждаемой проблемы.

1.1.2. Математические аспекты проблемы Вундгейлера

В упомянутом докладе А. Вундгейлер показал, что действительно всякая система уравнений может быть приведена к форме, ковариантной относительно любой заданной группы преобразований только введением некоторых дополнительных вспомогательных функций, т.е. расширением описания исходного математического объекта. Уже ранее отмечалось, что классическая механика Ньютона может быть сделана ковариантной относительно любой группы преобразований координат и времени путем введения нового дополнительного объекта, например, «вектора времени».

А. Вундгейлер изложил общий метод, дающий возможность в соответствии с отмеченным расширить таким образом исходную группу объектов, чтобы заданная система уравнений стала ковариантной относительно любой заданной группы преобразований координат.

А. Вундгейлер следующим образом поясняет сказанное выше: «Из изложенного выше, по видимому, вытекает, что одно только требование инвариантности некоторого выражения относительно заданной группы преобразований оставляет его еще неопределенным, и именно в том смысле, что в заданной специальной системе координат оно остается совершенно произвольным. Эта неопределенность уничтожается, если задается, какие объекты могут быть использованы для образования этого выражения. Итак, к описанию класса инвариантов относятся две задачи: 1) группа \mathcal{G} ; 2) объекты Ω . Таким образом, мы можем ввести выражение $\{\mathcal{G}, \Omega\}$ в качестве символа класса инвариантов. Если мы расширим группу \mathcal{G} до более обширной группы \mathcal{G}' , то все инварианты могут быть представлены, следуя изложенному выше методу, как инварианты группы \mathcal{G}' , а именно введением новых объектов, образующих вместе с прежними объект Ω' . Значит, можно символически записать $\{\mathcal{G}, \Omega\} = \{\mathcal{G}', \Omega'\}$. Итак, одна и та же теория инвариантов может быть охарактеризована различным образом. Поясним на примере геометрии. Следуя Клейну, мы получим геометрию с евклидовой метрикой, с одной стороны, если за группу \mathcal{G} возьмем ортогональную группу (с независимыми от точки коэффициентами), за Ω – только координаты x^i и тензор g_{ik} (с независимыми от координат компонент); или мы можем еще взять голономную линейную группу $dx^i = a_\lambda^i dx^\lambda$, где a_λ^i суть функции точки, а в качестве Ω – величины dx^λ и компоненты тензора g_{ik} , зависящие от точки и удовлетворяющие некоторым известным соотношениям. С этой точки зрения каждая геометрия является функцией двух переменных: группы преобразований и объекта. Различные «пары значений» этих

переменных могут давать одну и ту же геометрию. С этим связан ряд проблем, например, проблема наиболее целесообразной характеристики данной геометрии».

Эта цитата из работы А. Вундгейлера характеризует, по его мнению, уточнение понятия *инвариант*. Далее А. Вундгейлер пишет: «Подобным же образом ньютонова механика может быть охарактеризована, во-первых, галилеевой группой с координатами точки в качестве объекта или, например, общей группой пространства и времени и вышеупомянутым объектом Горека. Нами даны и другие характеристики для этой же механики. Правильное определение теории относительности было бы – в связи с этим кругом идей – таково: совокупность физических законов, инвариантных относительно преобразований пространства и времени и составленных исключительно при помощи координат событий и некоторого (метрического) тензора (в качестве объекта)».

Таково разъяснение проблемы Вундгейлера, данное самим автором.

Вместе с тем, оставаясь даже в рамках математического рассмотрения проблемы, необходимо отметить следующее. Когда Вундгейлер утверждает, что уравнения Максвелла можно сделать ковариантными относительно группы преобразований Галилея, то он делает это, как выше отмечалось, за счет введения новых вспомогательных функций (нового объекта).

Но здесь возникает вопрос: не будет ли в результате такого расширения объекта новая система уравнений уже не иметь ничего общего с уравнениями Максвелла?

Ясно, что на любое расширение объекта рассматриваемой теории должны быть наложены какие-либо ограничения, также как и на расширение соответствующей группы преобразований¹⁵.

В приведенном Вундгейлером примере с геометрией Клейна действительно имеем дело с одной и той же евклидовой геометрией. Дело в том, что указанные Вундгейлером расширения группы ортогональных преобразований с независимыми от точки коэффициентами являются представлениями этой группы, а расширение объекта евклидовой геометрии можно рассматривать как различные представления исходного объекта этой геометрии, обсуждаемые Вундгейлером. Тогда действительно различные представления пары $\{G, \Omega\}$ «группы – объект» будут эквивалентны друг другу. Что же касается примера с уравнениями Максвелла, то имеем дело с совершенно другой ситуацией, так как группа Галилея не является представлением группы Лоренца, а расширенный Вундгейлером объект за счет введения новых функций не является представлением объекта Максвелла, т.е. антисимметричного тензора второй валентности.

Отметим, что А. Эйнштейн в начале своей знаменитой работы 1905г. пишет¹⁶: «Известно, что электродинамика Максвелла, в том виде, как ее в настоящее время обыкновенно понимают, в применении к движущимся телам приводит к *асимметрии*, которая, по-видимому, не свойственна самим явлениям. Вспомним, например, электродинамическое взаимодействие между магнитом и проводником. Наблюдаемое явление зависит здесь только от относительного движения проводника и магнита, в то время как согласно обычному представлению оба случая, в которых либо одно, либо другое из этих тел являются движущимися, должно быть строго разграничено.

В самом деле, если движется магнит, а проводник покоится, то вокруг магнита возникает электрическое поле, обладающее некоторым количеством движения, которое в тех местах, где находятся части проводника, порождает ток. Если же магнит находится в покое, а движется проводник, то вокруг магнита не возникает никакого электрического поля, зато в проводнике возникает электроэнергия, но которая, однако, при предполагаемом равенстве относительного движения в обоих интересующих нас случаях, вызывает электрические токи той же силы и того же направления, как и в первом случае.

Примеры подобного рода, как и неудавшиеся попытки обнаружить движение Земли относительно «светоносной среды», ведут к предположению, что не только в механике, но и в электродинамике

¹⁵См., например, В.И. Фушич, А.Г. Никитин, Симметрия уравнений Максвелла. – Киев: Наукова Думка, 1983. – Гл. 9.

¹⁶Эйнштейн А. Сущность теории относительности. – М.: Изд-во Иностран. лит., 1956.

никакие свойства явлений не соответствуют понятию абсолютного покоя, и даже более того, – к предположению, что для всех координатных систем, для которых справедливы уравнения механики, имеют место те же самые электродинамические и оптические законы, как это уже доказано для величин первого порядка.

Мы намерены это предположение (содержание которого в дальнейшем будет называться «*принципом относительности*») превратить в предпосылку и сделать, кроме того, *добавочное допущение*, находящееся с первым лишь в кажущемся противоречии, именно что в пустоте всегда распространяется скоростью V , не зависящей от состояния движения излучающего тела.

Эти две предпосылки достаточны для того, чтобы, положив в основу теорию Максвелла для покоящихся тел, построить простую, свободную от противоречий электродинамику движущихся тел. Введение «светоносного эфира» окажется при этом излишним, поскольку в предлагаемой теории не вводится ни «абсолютно покоящееся пространство», наделенное особыми свойствами, а также ни одной точке пустого пространства, в которой протекают электромагнитные процессы, не приписывается какой-нибудь вектор скорости.»

Поясним данные факты подробнее на примере анализа моделей расширения групп симметрий пространства-времени в теории относительности.

Прежде всего, дадим необходимые определения СТО, в частности, дадим определения некоторых основных понятий, носящих общий характер, т.е. принимаемых как в классической физике, так и в теории относительности, а также их особенности применения в интерпретации наблюдаемых физических явлений и результатов процессов измерений в физическом эксперименте.

А. Модели кинематики систем отсчета специальной теории относительности (СТО)

Начнем с понятия стандартных часов, используемого в описании физического эксперимента. Роль подобных часов может играть любой периодический процесс, протекающий независимо от внешних сил. Следовательно, например, маятниковые часы исключаются. Далее, очевидно, часы должны быть изготовлены из достаточно прочного и достаточно жесткого (в пределах бесконечно жесткого) материала так, чтобы в результате испытанных ими ускорений они не разрушались, и чтобы возможная деформация их механизма практически не сказывалась на их ходе. Никаких других требований к стандартным часам не предъявляется. Роль стандартных часов может играть испускание гребней волн излучения атомами или ядрами атомов¹⁷.

Рассмотрим теперь более подробно математические аспекты понятия геометрии допустимых систем координат. В теории относительности описываются отношения между физическими событиями.

Поэтому в рассматриваемой теории относительности приближении реального мира оказывается справедливой соответствующая модель множества возможных состояний.

Эту модель имеют в виду всякий раз, когда говорят о классическом пространстве-времени. Каждому физическому событию в модели сопоставляется точка, т.е. арифметическая n – точка ($n = 4$). Под арифметической n – точкой понимается упорядоченная система из n действительных чисел $\{x^\alpha\} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$. Множество всех арифметических точек для заданного значения n называют арифметическим пространством n измерений. Множество точек в арифметическом пространстве n измерений, задаваемых неравенством вида $|x^\alpha - x_0^\alpha| < \delta$, где $\delta > 0$, называют n – кубом с центром в точке x_0 . Множество арифметических точек $[x]$ называется n – областью в том и только в том случае, когда каждая точка x является центром некоторого n – куба, содержащегося в $[x]$. В границах применимости классической физики оправдано введение взаимно-однозначного соответствия подмножества физических событий с арифметической n – областью.

¹⁷ Алешкевич В.А. О преподавании специальной теории относительности на основе современных экспериментальных данных // Успехи Физических Наук. – 2012. –Т. 182. – № 12. – С. 1301-1318.

Такое соответствие и называют *системой координат*. Однако в теории относительности не требуется, вообще говоря, наличия системы координат для всего физического мира, а также не требуется предположения, что все точки арифметического 4-мерного пространства имеют физическую значимость. Достаточно говорить о соответствии подмножеств.

Вопрос как задаются системы координат, относится к разряду *физических* вопросов. Существует ряд конструктивных способов задания систем координат¹⁸. Так, если каким-то образом задана одна система координат $\{x^\alpha\}$, то определяя четыре функции $F^\beta(x^\alpha)$ можно перейти к новым нумерациям точек или другим системам координат так, что $x'^\beta = F^\beta(x^\alpha) \equiv x'^\beta(x^\alpha)$. Из бесконечного множества всех возможных систем координат, получаемых таким образом, в теории относительности используется лишь подмножество так называемых *допустимых систем координат*.

Рассмотрим формализованное определение данного класса координат. Функцию $F^\beta(x^1, x^2, \dots, x^n)$, определенную для всех точек арифметической n -области $[x]$, называют *функцией класса* и, если она и ее производные порядка, меньшего или равного l , существуют и непрерывны в каждой точке области $[x]$. Здесь l – любое целое положительное число. В теории относительности обычно $l \geq 2$. Соответствие, при котором арифметической n -области $[x]$ некоторое множество $[x']$ при помощи n функций класса l : $x'^1(x), x'^2(x), \dots, x'^n(x)$ – называется преобразованием класса l , переводящим $[x]$ в $[x']$. Преобразование арифметической n -области $[x]$ называют регулярным класса l тогда и только тогда, когда оно взаимно однозначно, а его якобиан не обращается в нуль ни в одной точке $[x]$. Множество допустимых систем координат определяется как совокупность систем координат, получаемых из *физически* заданной системы координат, посредством всевозможных регулярных преобразований $x'^\beta = x'^\beta(x^\alpha)$.

Следовательно, совокупность всех *допустимых преобразований координат образуют группу*. Все допустимые системы координат равноправны, и не существенно (если это особо не оговорено) из какой системы координат этого множества нужно исходить. Введение 4-мерной симметрии пространства и времени является одним из важных требований теории относительности.

При этом, согласно проблеме Вундгейлера, все координаты физически равноправны и образуют инвариантную метрику пространства-времени.

Однако полной физической симметрии нет, так как результаты измерений интерпретируются отдельно для пространства и времени. Математически этот факт, с точки зрения проблемы Вундгейлера, отражается следующим образом.

С помощью допустимых преобразований координат метрический тензор в произвольной точке всегда можно привести к каноническому виду:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pm 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Сумма диагональных элементов этой матрицы называется *сигнатурой*. Значение сигнатуры является инвариантной характеристикой метрики в соответствующей точке (закон инерции квадратичных форм). Под сигнатурой часто понимают эквивалентный данному определению вид строки из знаков при единицах на диагонали, например, $(+---\dots)$.

¹⁸Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. – М.: Энергоиздат, 1982.

Физическое пространство-время, описываемое теорией относительности, имеет сигнатуру $s = -2$, т.е. $(+---)$. При этом ничего не изменится, если выбрать сигнатуру $(-+++)$. Но, что главное, одна координата (временно-подобная) выделена по сравнению с тремя остальными (пространственно-подобными). Напомним, что все координаты при этом, согласно проблеме Вундгейлера, физически равноправны.

Сигнатура $(+---)$ соответствует важному свойству физического пространства-времени – отношению частичной упорядоченности между точками-событиями. Абсолютность времени в дорелятивистских представлениях можно понимать тогда как *свойство линейной упорядоченности* пространственно-временных точек-событий. В частности, это означает, что для двух событий a и b имеет место одно из трех отношений: одновременны ($b = a$). Свойство линейной упорядоченности физически обусловлено допущением о наличии сигналов с бесконечной скоростью распространения.

Принятие постулата СТО о предельной скорости света привело к замене свойства линейной упорядоченности свойством *частичной упорядоченности*. Последнее означает, что для любых двух различных точек a и b имеет место одно из трех отношений: либо b следует за a ($b > a$), либо a следует за b ($b < a$), либо a и b не следуют друг за другом, т.е. они не упорядочены.

Первые два отношения означают временно-подобность рассматриваемых событий, последнее – пространственно-подобность. Свойство частичной упорядоченности можно рассматривать как наиболее фундаментальную составную часть классических пространственно-временных отношений. При этом наиболее естественно проявляется имеющаяся в теории относительности связь между метрическими свойствами частичной упорядоченности: квадрат интервала между близкими точками положителен ($ds^2 > 0$), если точки-события упорядочены (временно-подобны), и отрицателен ($ds^2 < 0$), если точки-события не упорядочены (пространственно-подобны).

Таким образом, назначение задания координат – не более чем обеспечение нумерации различных точек-событий.

Выбор системы координат диктуется соображениями удобства, и если специально не оговорено, то не имеет физического смысла. В результате возникает необходимость дополнения теории аппаратом математического описания наблюдателей и привязки наблюдателем тензорных величин своей измерительной аппаратурой. Введем теперь понятие *системы отсчета*.

Системы отсчета Это понятие на качественном уровне может быть определено следующим образом¹⁹: «Под системой отсчета понимают систему координат, служащую для указания положения частиц в пространстве вместе со связанными с этой системой часами, служащими для указания времени». Из изложенного выше следует, что назначение координат – не более, чем обеспечение нумерации различных точек-событий. Введенные в теорию объекты – векторы и тензоры – имеют компоненты, зависящие от выбора системы координат (способа нумерации точек). В результате возникает необходимость дополнения теории аппаратом (методами) математического описания наблюдателей (одиночного или системы наблюдателей) и привязки наблюдателей тензорных величин к возможностям измерительной аппаратуры.

Такой математический аппарат называется методом *задания систем отсчета*. Одним из примером такого метода является *хроногеометрия*. Одной из важных задач для всех способов задания систем отсчета является описание зависимости результатов наблюдения от состояния движения наблюдателя. Это опять приводит к выделенности координаты времени.

Из СТО известно, что ход часов и компоненты тензорных величин в сравниваемых системах отсчета существенно зависят от относительной скорости этих систем отсчета. Поэтому предполагается, что каждый наблюдатель располагает как минимум собственными часами и имеет возможность

¹⁹Ландау Л. Д., Лифшиц И. М. Теория поля. – М.: Наука, 1973.

выделять (измерять) из определенных в месте его нахождения тензорных величин временные составляющие и дополнительные к ним пространственно-подобные составляющие. Перечисленным условиям удовлетворяет одиночный наблюдатель в хроногеометрии.

Наблюдатель обладает перечисленными возможностями именно в месте своего расположения, т.е. на своей временно-подобной мировой линии. Для оценки других точек-событий в хроногеометрии наблюдатель снабжен радиолокационной аппаратурой, что позволяет получать информацию об окрестности его мировой линии. Можно перейти к континууму наблюдателей, удовлетворяющих сформулированным требованиям, так что в каждой точке рассматриваемой области пространства определен наблюдатель. Тогда информация о физической ситуации в этой области собирается всей системой наблюдателей. Каждому наблюдателю соответствует своя временно-подобная мировая линия. В общем случае такие линии могут пересекаться, но тогда в точках пересечения окажутся два или несколько наблюдателей, что может существенно осложнить рассмотрение. Поэтому предполагают, что мировые линии, соответствующие разным наблюдателям, не пересекаются. В результате имеем важное понятие – конгруэнции временно-подобных мировых линий. Отметим, что под конгруэнцией понимают такую совокупность линий, когда через каждую точку проходит одна и только одна линия. Следовательно, указанный метод задания систем отсчета основан на определении в рассматриваемой области конгруэнции временно-подобных мировых линий.

Конгруэнции можно однозначно сопоставить поле единичных векторов τ^{μ} (монад), касательных к линиям конгруэнции. Этот метод задания систем отсчета поэтому называют *монадным методом*. Монадный метод нацелен на решение наиболее существенной части задач, стоящих перед методами задания систем отсчета – на описании зависимости результатов наблюдения от состояния движения наблюдателя. На его основе четко разделяются временные и пространственные составляющие тензоров. Однако с его помощью нельзя описать наблюдаемые величины по отдельным пространственно-подобным направлениям. Для этого необходимо снабдить наблюдателей пространственно-подобными ортами. Это решается в рамках более полных – диадных и тетрадных методов. При этом приборы-наблюдатели предполагаются пробными, т.е. не влияющими на геометрию пространства-времени.

Хроногеометрический и монадный (континуальный) метод могут быть развиты на основе концепции так называемого одиночного наблюдателя, когда исходной опять является одна временно-подобная мировая линия наблюдателя и указан путь (метод) переноса тензорных величин из произвольной точки пространства-времени на мировую линию этого наблюдателя.

Известно, что в ОТО результат переноса тензоров существенно зависит от пути переноса. В качестве путей можно использовать, например, изотропные (световые) геодезические от произвольных точек до мировой линии наблюдателя. Например, людей на земле можно рассматривать как одиночного наблюдателя, получающего информацию об окружающем мире с помощью приходящих световых сигналов.

Остановимся теперь на понятии «*инерциальная система координат*».

Инерциальная система координат Несколько упрощая суть дела, под инерциальной системой координат следует понимать систему координат, относительно которой свободное (т.е. не находящееся под действием внешних сил) тело движется прямолинейно и равномерно. Это определение инерциальная система координат сохраняется и в СТО. Всякая система координат, движущаяся прямолинейно и равномерно относительно заданной инерциальной системы координат, также будет инерциальной.

Аналогично определяется понятие *инерциальной системы отсчета*.

Б. Расширения представлений групп симметрий и инварианты моделей геометрии пространства-времени

Максвелл сформулировал свою теорию, используя математическое понятие нового типа: тензорное поле на четырехмерном пространстве-времени, удовлетворяющее системе уравнений в частных производных с необычной симметрией, и основано на несовместимости двух групп преобразований пространства-времени. С одной стороны, уравнения ньютоновой механики инвариантны относительно группы \mathcal{G}_{∞} , которую в физике теперь называют группой Галилея. Отметим, что группа \mathcal{G}_{∞} –

шестимерна. Она порождается тремя вращениями в пространстве координат и тремя движениями с постоянной скоростью вида

$$x \rightarrow x - ut, \quad t \rightarrow t. \tag{1}$$

С другой стороны, уравнения Максвелла в вакууме относительно группы \mathcal{G}_c , которую в физике называют группой Лоренца. Группа \mathcal{G}_c тоже шестимерна. Она порождается, как и \mathcal{G}_∞ , тремя вращениями вместе с тремя преобразованиями Лоренца для координат пространства времени вида

$$x \rightarrow \beta(x - ut), \quad t \rightarrow \beta\left(t - \frac{ux}{c^2}\right), \quad \beta = \left(1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^{-1/2}, \tag{2}$$

где c – скорость света. С математической точки зрения группа \mathcal{G}_c устроена проще, чем \mathcal{G}_∞ . В частности, \mathcal{G}_c – вещественная некомпактная форма полупростой алгебры Ли $A_1 \times A_1$, тогда как \mathcal{G}_∞ не полупроста²⁰.

Группа \mathcal{G}_c , как показал Минковский, в пределе $c \rightarrow \infty$ превращается в \mathcal{G}_∞ – полную группу симметрий ньютоновской механики. Однако существует дополнительная инвариантность уравнения Максвелла относительно тривиальной абелевой группы T_4 -сдвигов координат пространства-времени. Тогда естественная группа инвариантности теории Максвелла – не шестимерная группа Лоренца, а десятимерная группа Пуанкаре P – полупрямое произведение \mathcal{G}_c и T_4 . Соответственно, группа симметрий ньютоновской механики – не шестимерная группа \mathcal{G}_∞ , а десятимерная группа Галилея G – полупрямое произведение \mathcal{G}_∞ и T_4 . Ни группа P , ни группа G не являются при этом полупростыми группами²¹.

Уточним некоторые особенности преобразования Лоренца и его расширения. Преобразования Лоренца для координат x_a ($a=1,2,3$) и времени $t = x_0$ можно представить как:

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = a_{\mu\nu}x^\nu + b_\mu, \tag{3}$$

где $a_{\mu\nu}$, b_μ – вещественные параметры, причем $a_{\mu\nu}a^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda$, δ_μ^λ – символ Кронекера, по повторяющимся индексам подразумевается как обычно ковариантное суммирование. Совокупность преобразований вида (3) образует, как отмечалось, десятипараметрическую группу Ли, которую по предложению Вигнера называют в современной литературе группой Пуанкаре.

Эту группу обозначают символом $P(1,3)$. Преобразование (3) совместно с масштабными преобразованиями типа:

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = bx_\mu \tag{4}$$

образуют максимальную группу локальных линейных преобразований координат и времени, оставляющих инвариантными уравнения Максвелла.

²⁰ А.П. Исаев, Теория групп и симметрий. Системы корней простых конечномерных алгебр Ли, исключительные группы Ли и алгебры с делением. – Дубна: УНЦ ОИЯИ (УНЦ-2010-46). – 2010.

²¹ Н.Х. Ибрагимов, Группы преобразований в математической физике. – М.: Наука, 1983.

Подвергая x_μ последовательно преобразованию инверсии:

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = \frac{x_\mu}{x_\lambda x^\lambda}, \quad (5)$$

сдвига:

$$x'_\mu \rightarrow x''_\mu = x'_\mu - d_\mu \quad (6)$$

и вторичной инверсии:

$$x''_\mu \rightarrow x'''_\mu = \frac{x''_\mu}{x''_\lambda x''^\lambda} \quad (7)$$

получим нелинейные конформные преобразования:

$$x_\mu \rightarrow x'''_\mu = \frac{x_\mu - d_\mu x_\nu x^\nu}{1 - 2d_\nu x^\nu + x_\lambda x^\lambda d_\nu d^\nu}. \quad (8)$$

Уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований (8).

Совокупность преобразований (5-8) образует пятнадцатипараметрическую конформную группу $C(1,3) \supset P(1,3)$.

Эта группа является максимальной группой симметрии уравнений Максвелла с токами и зарядами (если ограничиться локальными (точечными) преобразованиями координат и времени).

Группа конформных преобразований в четырехмерном пространстве R_4 была изучена Ли²².

Отметим, что различные подсистемы уравнений Максвелла обладают симметрией относительно преобразований Галилея^{23,24,25}, но эти особенности относятся к части объекта и имеют ограниченное практическое применение. Так, например, ряд задач о взаимодействии частицы, имеющей спин, с внешним электромагнитным полем могут быть решены в рамках теории, инвариантной относительно группы Галилея.

В то же время существует простая группа D , вырожденным пределом которой является группа Пуанкаре P , в точности так же, как у полупростой группы \mathcal{G}_c вырожденным пределом является группа \mathcal{G}_∞ . Это группа де Ситтера D , вещественная некомпактная форма простой алгебры Ли B_2 . В действительности группа D является группой симметрий Вселенной без материи, радиус которой R является линейной функцией времени. Группа D в пределе плоского пространства $\lim R \rightarrow \infty$ вырождается в группу P так же, как \mathcal{G}_c вырождается в \mathcal{G}_∞ в ньютоновском пределе $c \rightarrow \infty$. При некоторых естественных предположениях существует восемь кинематических групп.

Более точно кинематической группой называется группа, которая может служить группой симметрии однородной и изотропной Вселенной в согласии с общими принципами квантовой механики²⁶.

Среди восьми кинематических групп только группа D является простой, остальные семь получаются из нее тремя предельными переходами по всевозможным комбинациям.

²²Барут А., Рончка Р. Теория представления групп и ее приложения. – М.: Мир, 1980. – Т. 1, 2.

²³Дайсон Ф.Дж. Упущенные возможности // УМН. – 1980. – Т. 35. – Вып. 1. – С. 172-191.

²⁴Le Bellac M., Levi-Leblond J.M. Galilean electromagnetism // Nuovo Cimento. – 1973. – Vol. 14. – №1. – Pp. 217-235.

²⁵Фушич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. – Киев: Наукова Думка, 1983. – Гл. 7, 9.

²⁶Vacry H., Levy-Leblond J.V. Possible kinematics // J. Math. Phys. – 1968. – Vol. 9. – Pp. 1605-1614.

Более точно, пусть f обозначает предел плоского пространства $R \rightarrow \infty$, n – ньютоновский предел $c \rightarrow \infty$ и s обозначает статический предел $c \rightarrow 0$. Все восемь групп тогда можно изобразить вершинами куба, при этом $D, P = fD$ и $G = nfD$ – единственные кинематические (еретические) группы, соответствующие ортодоксальным физическим мирам.

С математической точки зрения остальные пять групп ничем не хуже.

Наиболее интересная из приведенных «еретических» групп – группа $N = nD$ и $C = sfD$.

Группа $N = nD$ описывает ньютоновскую вселенную в искривленном пространстве-времени.

Группа $C = sfD$ описывает Вселенную с абсолютным пространством, в противоположность галилеевской группе D , где абсолютно время.

Примечание. Группу $C = sfD$ открыл Леви-Леблонд²⁷ и назвал ее группой Кэрролла. В мире Кэрролла у всех тел нулевая скорость; однако, они могут иметь ненулевой импульс. Напомним, что в моделях кинематики Галилея время абсолютно: два одновременных события в одной инерциальной системе координат измеряются одновременно в другой инерциальной системе координат. Однако в модели кинематики Кэрролла, наоборот, пространство абсолютно: два события, которые определены в точке инерциальной системы координат, определяются в той же точке пространства в другой инерциальной системе координат. Как известно, Кэрролл был чистым математиком, но сумел предвидеть этот эффект²⁸ еще в 1871г.: «Медленная страна – сказала королева – приходится, видишь ли, бежать со всех ног, чтобы оставаться на месте».

Остановимся теперь (согласно группе Кэрролла «будем бежать, оставаясь на месте») подробнее на групповых свойствах некоторых моделей геометрии пространства-времени, к которым в последнее время уделяется повышенное внимание.

Предварительно поясним примером.

В декартовой системе координат в плоском пространстве-времени (независимо от релятивистского или нерелятивистского случая) уравнения движения

$$x^i = x_0^i + v^i (t - t_0), \quad v^i = \frac{dx^i}{dt} = \text{const}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (9)$$

или

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = 0 \quad (10)$$

описывает инерциальное движение (uniform rectilinear motions – inertial motions).

Множество наблюдателей в пространстве-времени, движущихся вдоль (9) или (10), образуют инерциальную систему отсчета, которое обозначается как \mathcal{F} . В заданном плоском пространстве-времени форма уравнений (9) и (10) не изменяется при применении линейных преобразований с 10 параметрами. Но при этом можно показать^{29,30}, что более общее преобразование типа:

$$\mathcal{T}: x^\mu = f^\mu(x), x^0 = ct, \mu = 0, 1, 2, 3$$

в виде линейного дробного (fractional) преобразования Умова – Вейля-Фока типа:

²⁷J.M. Levy-Leblond, Une nouvelle limite non-relativiste du groupe de Poincare // Ann. Inst. H. Poincare. – 1965. – Vol. A3. – Pp. 1-12.

²⁸L. Carroll, Through the looking-glass and what Alice found there. – London: McMillan. – 1871.

²⁹S. N. Manida, Fock-Lorentz transformations and time-varying speed of light // arXiv: gr-qc/9905046v1. – 1999.

³⁰C.-G. Huang, Principle of relativity, 24 possible kinematical algebras and new geometries with Poincare symmetry // arXiv:1004.1268v2 [gr-qc] – 2010.

$$\mathcal{T}: \quad l^{-1}x'^{\mu} = \frac{A^{\mu}_{\nu}l^{-1}x^{\nu} + a^{\mu}}{b^{\nu}l^{-1}x^{\nu} + d} \quad \text{и} \quad \det \mathcal{T} = \begin{vmatrix} A & a \\ b^{\nu} & d \end{vmatrix} = 1, \quad (11)$$

где $A = \{A^{\mu}_{\nu}\}$ – 4×4 матрица, a, b – 4×1 матрицы, $d \in R$, $b^{\nu} = \eta^{\nu\mu} b_{\mu}$, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ также оставляют уравнения (9) и (10) инвариантными.

При этом преобразование (11) образует группу, а число генераторов группы составляет 24. Это означает, что следует ожидать значительно больше моделей геометрий пространства-времени, допускающих движения (9) и (10). Тогда преобразования (11) типа Фока-Лоренца между инерциальными системами отсчета S и S' , движущимися относительно друг друга с постоянной скоростью v (вдоль общей оси x), определяются в следующем виде:

$$t' = \frac{\gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)}{1 + \lambda v \gamma x - \lambda c^2 (\gamma - 1) t}; \quad x' = \frac{\gamma (x - vt)}{1 + \lambda v \gamma x - \lambda c^2 (\gamma - 1) t}; \quad (12)$$

$$y' = \frac{y}{1 + \lambda v \gamma x - \lambda c^2 (\gamma - 1) t}; \quad z' = \frac{z}{1 + \lambda v \gamma x - \lambda c^2 (\gamma - 1) t}; \quad \gamma = 1 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где $c = 299,792,458 \text{ м/сек}$ и постоянная λ соотносится с постоянной Хаббла в виде $H \propto \lambda c^2$. Если положить $H \approx 10^3 \text{ км сек}^{-1} \text{ Мрс}^{-1}$, то получим $\lambda \sim 10^{-35} \text{ м}^{-2} \text{ сек}$, что свидетельствует о близости знаменателей в (12) к 1 для всех произведений соответствующих длин и скоростей. Поэтому эти преобразования очень близки к преобразованиям Лоренца.

Следовательно, с математической точки зрения преобразования (12) образуют группу, которая изоморфна группе Лоренца являясь нелинейным представлением группы Лоренца.

Однако математическая модель не отражает ее физическую корректность без соответствующей интерпретации. Нетрудно проверить прямой подстановкой, что преобразование Фока-Лоренца сохраняет инвариантным выражение вида $\frac{\tilde{n}^2 t^2 - \tilde{x}^2}{(1 - \lambda \tilde{n}^2 t^2)^2}$ так, что:

$$\frac{\tilde{n}^2 t^2 - \tilde{x}^2}{(1 - \lambda \tilde{n}^2 t^2)^2} = \text{inv}, \quad \frac{\tilde{n}^2 t_1 - x_1 x_2}{(1 - \lambda \tilde{n}^2 t_1)(1 - \lambda \tilde{n}^2 t_2)} = \frac{\tilde{n}^2 t'^2 - \tilde{x}'^2}{(1 - \lambda \tilde{n}^2 t'^2)^2} = \text{inv}. \quad (13)$$

Если применить преобразование проективной геометрии типа:

$$x \mapsto X = \frac{x}{1 + a \cdot x}, \quad X^{\mu} = \frac{x^{\mu}}{1 + a_{\alpha} \cdot x^{\alpha}}, \quad (14)$$

то можно вычислить метрику плоского пространства $ds^2 = dX \cdot dX = \eta_{\mu\nu} dX^{\mu} dX^{\nu}$ в виде:

$$ds^2 = \frac{dx \cdot dx}{(1 + a \cdot x)^2} - \frac{2a \cdot dx \cdot x \cdot dx}{(1 + a \cdot x)^3} + \frac{x \cdot x (a \cdot dx)^2}{(1 + a \cdot x)^4} \quad (15)$$

для заданного пространства времени. Известно³¹, что применяя (13) и (14) можно получить как проективные преобразования инвариантную метрику пространства-времени в виде:

$$ds^2 = \frac{1 - (\lambda c \tilde{x})^2}{(1 - \lambda c^2 t)^4} dt^2 + \frac{2 \lambda c^2 \tilde{x} d\tilde{x} dt}{(1 - \lambda c^2 t)^3} - \frac{d\tilde{x}^2}{(1 - \lambda c^2 t)^2}. \quad (16)$$

³¹Stepanov S. S. Fundamental physical constants and the principle of parametric incompleteness // arXiv: physics/9909009 (см. Appendix 3, С. 16).

Однако, несмотря на сложный вид метрики (16) она локально изоморфна части метрики пространства-времени Минковского.

Так, например³², если ввести новые координаты:

$$T = \frac{t}{1 + \lambda c^2 t}, \quad X = \frac{x}{1 + \lambda c^2 t}, \quad (17)$$

то метрика (16) преобразуется к виду

$$ds^2 = c^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2. \quad (18)$$

В терминах данных новых координат преобразование Фока-Лоренца (12) принимает следующий вид:

$$T' = \gamma \left(T - \frac{v}{c^2} X \right); \quad X' = \gamma (X - vT); \quad Y' = Y; \quad Z' = Z. \quad (19)$$

Преобразования (19) являются преобразованиями Лоренца для системы отсчета (T, X, Y, Z) .

Таким образом, с математической точки зрения преобразования Фока-Лоренца являются другой формой преобразования Лоренца в СТО в нетрадиционных координатах.

В свою очередь, метрика (16) может быть преобразована к следующему виду:

$$ds^2 = -\frac{1}{(1 - \lambda c^2 t)^2} \left(d\bar{x} - \frac{\bar{c} + \lambda c^2 \bar{x}}{1 - \lambda c^2 t} dt \right) \left(d\bar{x} - \frac{-\bar{c} + \lambda c^2 \bar{x}}{1 - \lambda c^2 t} dt \right).$$

При $ds^2 = 0$ получим уравнение для переменной скорости света в виде $d\bar{x}/dt = C(\bar{x}, t)$, в отличие от постулата Эйнштейна о постоянстве скорости света в любой инерциальной системе отсчета.

Более того, если ввести новую координату времени

$$\tau = \tau_0 - \frac{1}{\lambda c^2} \sqrt{\frac{1 - (\lambda c \bar{x})}{1 - \lambda c^2 t}},$$

то получим метрику пространства-времени Робертсона-Уолкера в виде:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - a^2(\tau) (d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega^2), \quad (20)$$

где $a(\tau) = c|\tau - \tau_0|$ и использовались обозначения сферической системы координат с радиусом $\lambda c|\bar{x}| = \tanh \chi$. С помощью известных преобразований³³ метрика (20) переводится в метрику пространства-времени Минковского типа (18).

Рассмотрим еще один пример применения преобразования Фока-Лоренца к метрике пространства-времени Милна типа $ds^2 = d\tau^2 - \tau^2 d\beta^2$, диаграмма пространства-времени которого показана на рис. 4. На рис. 4 τ -постоянные гиперболы и β -постоянные линии определяют координаты Милна. Отношение между координатами (x, t) преобразования Фока-Лоренца и координатами (X, T) пространства Минковского определяются в виде:

$$\tau = \sqrt{T^2 - X^2}, \quad \tanh \beta = \frac{X}{T}. \quad (21)$$

³²Jafari N., Shariati A. Operational indistinguishably of varying speed of light theories // Int. J. Mod. Phys. – 2004. – Vol.13D. – Pp. 709-716. (доступно: Comments on varying speed of light theories // 0312007.pdf).

³³Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. Gravitation. – N.Y.: Academic Press, 1973.

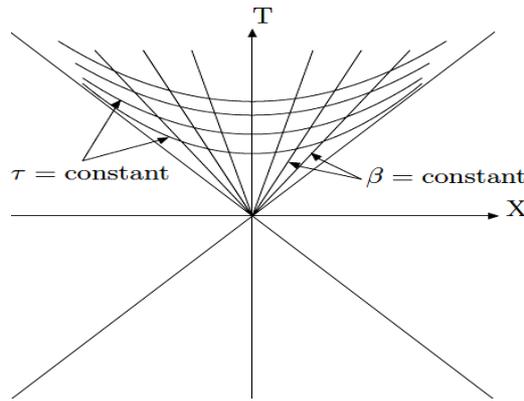


Рис. 4. Диаграмма геометрии пространства-времени Милна в терминах координат (T, X)

Применение соотношений (21) дает возможность определить координаты Милна (τ, β) через координаты преобразования Фока-Лоренца (t, x) в виде:

$$\tau = \frac{\sqrt{t^2 - x^2}}{1 + \lambda c^2 t}, \quad \tanh \beta = \frac{x}{t}. \tag{22}$$

Все перечисленное выше относительно преобразования Фока-Лоренца относится также к пространству-времени Милна.

В более общем случае³⁴, применяя методы проективной геометрии, рассматривается отображение:

$$S = f^{-1} \circ \Lambda \circ f, \quad \Lambda \in SO(1, n-1), \tag{23}$$

где Λ – преобразование пространства-времени (например, преобразование Лоренца), преобразования f и f^{-1} имеют вид:

$$f : x \mapsto X = \frac{x}{1 + a^T Hx} \quad \text{и} \quad f^{-1} : X \mapsto x = \frac{X}{1 - a^T HX}, \tag{24}$$

а метрика пространства-времени имеет вид $H = [\eta_{\mu\nu}] = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. Тогда преобразование новых координат в инерциальной системе отсчета:

$$x'^\mu = \frac{X'}{1 - a^T HX'} = \frac{\Lambda Hx}{1 + a^T Hx} \cdot \frac{1 + a^T Hx}{1 + a^T H(\mathbb{I} - \Lambda)x} = \frac{\Lambda x}{1 + a^T H(\mathbb{I} - \Lambda)x},$$

что в стандартных обозначениях СТО записывается как:

$$x'^\mu = \frac{\Lambda_\nu^\mu x^\nu}{1 + a_\alpha (\delta_\beta^\alpha - \Lambda_\beta^\alpha) x^\beta}. \tag{25}$$

Рассмотрим частные случаи преобразований (25).

1. Для времениподобных преобразований параметр $a^\mu = (-1, 0)$ и отображения f и f^{-1} в (24)

имеют вид: $f : x^\mu \mapsto X^\mu = \frac{x^\mu}{1 + t}$ и $f^{-1} : X^\mu \mapsto x^\mu = \frac{X^\mu}{1 - T}$.

³⁴Jafari N., Shariati A. A projective interpretation of some doubly special relativity theories // Phys. Rev. – 2011. – Vol. 84D. – №6. – P. 065038 (доступно: arXiv:1109.6891v1 [gr-qc] – 2011).

Для частного случая, когда системы отсчета движутся параллельно оси x^1 в (25) имеем:

$$\left[\Lambda_v^\mu \right] = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{bmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Для $a^0 = -1$ и $a^i = 0$ имеем $a_0 = 1$ и $a_i = 0$, а поэтому знаменатель в (25) имеет вид:

$$1 + a_\alpha (\delta_\beta^\alpha - \Lambda_\beta^\alpha) x^\beta = 1 - t(\gamma - 1) + \gamma v x$$

и преобразование (25) записывается как:

$$t' = \frac{\gamma(t - vx)}{1 - t(\gamma - 1) + \gamma v x}; \quad x' = \frac{\gamma(x - vt)}{1 - t(\gamma - 1) + \gamma v x}. \quad (26)$$

Преобразование (26) есть ничто иное, как преобразование Фока-Лоренца (12).

2. Для пространственноподобных преобразований параметр $a^\mu = (0, 1)$ и отображения f и f^{-1}

в (24) имеют вид: $f : x^\mu \mapsto X^\mu = \frac{x^\mu}{1+x}$ и $f^{-1} : X^\mu \mapsto x^\mu = \frac{X^\mu}{1-X}$, а поэтому знаменатель в (25)

имеет вид: $1 + a_\alpha (\delta_\beta^\alpha - \Lambda_\beta^\alpha) x^\beta = 1 - x(\gamma - 1) + \gamma v t$ откуда следует новые преобразования:

$$t' = \frac{\gamma(t - vx)}{1 - x(\gamma - 1) + \gamma v t}; \quad x' = \frac{\gamma(x - vt)}{1 - x(\gamma - 1) + \gamma v t}. \quad (27)$$

3. Для светоподобных преобразований параметр $a^\mu = (-1, 1)$ и знаменатель в (25) имеет вид:

$1 + a_\alpha (\delta_\beta^\alpha - \Lambda_\beta^\alpha) x^\beta = 1 + (t+x)(1-\gamma+\gamma v)$ откуда следует еще новые преобразования:

$$t' = \frac{\gamma(t - vx)}{1 + (t+x)(1-\gamma+\gamma v)}; \quad x' = \frac{\gamma(x - vt)}{1 + (t+x)(1-\gamma+\gamma v)}. \quad (28)$$

Хорошо известно, что группа с максимальной симметрией в четырехмерном невырожденном пространстве-времени имеет 10 независимых параметров. Выше уже отмечалось, что модели пространства-времени Минковского, де Ситтера и анти де Ситтера все относятся к данному типу. Также группа пространства-времени Галилея имеет 10 параметров в кинематической группе геометрии трехмерного пространства и одномерного времени. На вопрос сколько же существует возможных десятипараметрических кинематических групп для геометрий четырехмерного пространства-времени, ответили Бэкри и Леви-Леблонд. На основе трех предположений и применения метода Иону-Вигнера было показано, что существует 8 типов алгебр Ли, которым соответствуют 11 возможных кинематических групп. К таким группам относятся группа Пуанкаре, де Ситтера, анти де Ситтера, неоднородная группа SO(4), пара-Пуанкаре, группа Галилея, Ньютона-Хука, анти Ньютона-Хука, пара-Галилея, Кэрролла и статическая группа.

Если третье предположение, что инерциальные преобразования в заданном направлении пространства-времени формируют некомпактную группу ослабить, то другие 3 классических геометрических кинематических групп могут быть добавлены такие как геометрии Евклида, Римана Лобачевского. Поскольку группа Пуанкаре является основной, которая удовлетворяет принципу относительности, то рассмотрим теперь в качестве примера возможные модификации группы Пуанкаре и их особенности при построении геометрии пространства-времени^{35,36}.

³⁵Huang C.H., Tian Yu, Wu X.N., Xu Z., Zhou B. Geometries with the second Poincare symmetry // Commun. Theor. Physics. – 2012. – Vol.57. – №5. – Pp. 553-562.

³⁶R. Aldrovandi, J. G. Pereira, A Second Poincare group // arXiv:gr-qc/9809061v1. – 1998.

Напомним, что преобразования Пуанкаре координат пространства-времени в компактном виде записывается как:

$$x'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + l a^{\mu}, \quad L \in \text{SO}(1,3), \quad (29)$$

где a^{μ} – безразмерные параметры, переводящие исходное событие $O(o^{\mu})$ в событие $P(x_p^{\mu} = l(L^{-1})^{\mu}_{\nu} a^{\nu})$.

Алгебра вторичного группы Пуанкаре порождает вторичное преобразование Пуанкаре:

$$x'^{\mu} = \frac{L^{\mu}_{\nu} x^{\nu}}{1 + l^{-1} b_{\lambda} x^{\lambda}}, \quad (30)$$

где b_{μ} – безразмерные параметры, которые выражены также в терминах 5×5 матриц $\begin{pmatrix} L & 0 \\ b^t & 1 \end{pmatrix}$, где $b^t := (\eta_{\mu\nu} b^{\nu})$ определяет транспонирование 4×1 матриц b .

Очевидно, что как часть линейных дробных преобразований (30) оставляют инвариантными движения (9), но преобразования (30) не сохраняют метрику пространства-времени Минковского.

Таким образом, между исходной алгеброй и измененной алгеброй Пуанкаре в алгебраическом смысле нет различия, но в пространстве-времени Минковского (30) преобразования не инвариантны по отношению к метрике.

1.1.3. Физические аспекты проблемы Вундгейлера

Вместе с тем принцип сохранения количества движения и энергии, введенный Картаном, дает уравнениям классической механики форму, ковариантную относительно общей группы преобразований координат и времени. При этом никакого нового объекта не вводится, кроме компонент g_{ik} метрического тензора криволинейной системы координат. В свою очередь, К.В. Мелихов показал³⁷, что канонические уравнения Гамильтона остаются ковариантными при канонических преобразованиях, охватывающих не только координаты и импульсы системы, но и время. При этом нового объекта также не вводится.

Из изложенного следует, что в рассматриваемом случае имеем два совершенно различные ситуации. В первом случае, как уравнениям Максвелла, так и уравнениям классической механики можно придать ковариантный вид относительно любой группы преобразований за счет введения новых вспомогательных функций (новых объектов) в исходные уравнения. Но, как отмечалось, при этом можно получить по существу новые уравнения, а не обобщение старых уравнений при новых преобразованиях системы пространство – время.

Во втором случае, рассмотренным Картаном и Меликовым, имеем действительно обобщение (без введения дополнительных объектов, кроме компонент метрического тензора g_{ik}) уравнений классической механики для общего преобразования пространственно – временных координат или для касательных преобразований, охватывающих не только координаты и импульсы, но и время. Еще раз следует подчеркнуть, что здесь имеем дело с действительным обобщением классических уравнений механики, так как никаких новых объектов в эти уравнения по существу не вводится.

Здесь следует сделать ряд существенных пояснений и замечаний, которые позволят читателю понять более глубоко смысловое и физическое содержание решения проблемы Вундгейлера.

³⁷Мелихов К.В. О касательных преобразованиях // Доп. к книге Ф. Франк, Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. – М., 1937. – Ч. II. – С.209-223.

1. Когда речь идет о классической механике Ньютона, то это значит, что независимо от принятой в пространстве-времени системы координат 4-мерный континуум должен быть евклидовым, т.е. при всех вещественных преобразованиях координат он должен иметь определенно-положительную квадратичную форму:

$$ds^2 > 0 \quad (31)$$

и компоненты тензора Римана-Кристоффеля должны тождественно равняться нулю, т.е.

$$R_{iknm} = 0. \quad (32)$$

Никакими вещественными преобразованиями координат в рамках механики Ньютона эти требования не могут быть нарушены.

Кроме того, в рамках любой ковариантной формулировки механики Ньютона должно существовать преобразование координат, приводящее к расслоению 4-мерного пространственно-временного континуума на 3-мерное евклидово пространство и инвариантное время. При этом полностью сохраняется с математической точки зрения полнота описания процессов, рассматриваемых в классической механике Ньютона.

Наоборот, если путем введения новых объектов в классическую механику указанные требования (31) и (32) нарушаются, то имеем в этом случае дело с новой системой, которая не тождественна классической механике Ньютона.

2. В механике специальной теории относительности (СТО) имеем дело с другими фундаментальными требованиями. Во-первых, существуют три возможности, соответствующие введению пространственно-подобных, времени-подобных и изотропных мировых линий:

$$ds^2 > 0; \quad ds^2 < 0; \quad ds^2 = 0. \quad (33)$$

Во-вторых, требование (30) сохраняется, т.е. пространство-время остается плоским, но носит псевдоевклидов характер.

3. При переходе к общей теории относительности (ОТО) сохраняется требование неопределенности квадратичной формы (31) и, кроме того, по крайней мере некоторые компоненты тензора Римана-Кристоффеля:

$$R_{iknm} \neq 0. \quad (34)$$

Таким образом, между механикой Ньютона, СТО и ОТО существуют глубокие принципиальные различия уже на уровне математических моделей. Другими словами, новые объекты (например, системы метрического тензора g_{ik} системы криволинейных координат) не должны нарушать фундаментальных требований (31-34). При выполнении этих требований невозможно никакими преобразованиями координат превратить механику Ньютона в СТО, а СТО в ОТО. Если ввести, например, в классическую механику Ньютона в качестве объекта метрический тензор g_{ik} , нарушающий требование (31), то не получим уже модель механики Ньютона.

Поэтому утверждение А. Вундгейлера: «Правильное определение теории относительности было бы – в связи с этим кругом идей – таково: совокупность физических законов, инвариантных относительно преобразований пространства и времени и составленных исключительно при помощи координат событий и некоторого (метрического) тензора (в качестве объекта)» было бы правильно по отношению к классической механике Ньютона, если бы выполнялись условия (31), (32), т.е. $ds^2 > 0$, $R_{iknm} = 0$ и пространственно-временной континуум допускал расслоение на 3-мерное евклидово пространство и инвариантное время. Определение ОТО, данное Вундгейлером, неприменимо, если не выполнены отмеченные фундаментальные условия (33) и (34).

В этом заключается принципиальное различие рассматриваемых теорий.

Поэтому расширение объекта в смысле Вундгейлера допустимо до тех пор, пока не нарушаются основные положения рассматриваемой теории. Если эти требования нарушаются, то по существу, отходим от рассматриваемой теории к другой теории. То же самое можно утверждать относительно уравнений Максвелла.

Как отмечалось, А. Вундгейлер прав в своих утверждениях до тех пор, пока вводимые расширения исходной группы являются представлениями исходной группы преобразований, а вновь вводимый объект является представлением исходного объекта.

Таковы математические аспекты проблемы Вундгейлера.

Однако важнейшее значение имеют также физические аспекты рассматриваемой проблемы.

Поясним физические аспекты рассматриваемой проблемы следующими примерами.

Пусть интерпретация F_{ik} имеет физический смысл напряженности электромагнитного поля, x^1, x^2, x^3, x^0 – физический смысл координат и времени в псевдоевклидовом пространстве СТО. Другими словами, предположим, что указанные величины могут быть измерены методами, вытекающими из содержательной физической сущности теории относительности и теории электромагнитного поля. В этом случае напряженности электромагнитного поля F_{ik} должны удовлетворять уравнениям Максвелла. Введение в уравнения Максвелла дополнительных функций разрушит их физическую интерпретацию. Таково физическое разъяснение проблемы Вундгейлера применительно к уравнениям Максвелла.

В случае рассмотренных выше моделей Картана и Мелихова имеем дело с переменными, являющимися просто аналитическими функциями действительных пространственных координат и времени. Причем все события в этих системах принадлежат плоскому 3-мерному евклидовому пространству и времени, являющимся инвариантом. Другими словами, это своеобразная параметризация, вводимая вместо переменных x^1, x^2, x^3 и t , применяемых в классической механике.

С другой стороны, в ОТО имеем дело с искривленным или римановым 4-мерным пространственно-временным континуумом, который не может быть «расслоен» на плоское 3-мерное евклидово пространство и инвариантное время никакими преобразованиями координат. В этом заключается, как отмечалось, глубокое различие между теорией относительности и механикой Ньютона.

Вместе с тем, физические аспекты рассматриваемой проблемы дают полное ее решение. Поэтому подчеркнем еще раз, что определение теории относительности как теории инвариантов общей группы преобразований пространства и времени, как это делает Вундгейлер, неточно.

Одновременно следует заметить, что приведенное утверждение В.А. Фока о том, что «сама по себе ковариантность уравнений отнюдь не является выражением какого-либо физического закона» в свете изложенного также является неточным. В действительности требование ковариантности любых уравнений физики относительно соответствующих групп преобразований само по себе является физическим законом^{38,39}. В другом месте сам В.А. Фок утверждает⁴⁰: «Любая теория, кроме явно нелепой, должна быть ковариантной».

Из изложенного следует, что при рассмотрении, например, реальных процессов управления квантово-релятивистскими объектами типа на рис. 1, нельзя ограничиться анализом чисто математических моделей без параллельного анализа физической сущности рассматриваемых процессов [3, 4].

2. Особенности объектов релятивистской теории динамических систем

Один из важнейших результатов изложения проблемы А. Вундгейлера заключается, согласно п. 1.1.1, в следующем. Задание только одной группы преобразований, относительно которой должны быть инвариантны уравнения любой теории без точно сформулированного определения объекта этой

³⁸Оливер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989.

³⁹Гольденблат И.И., Ульянов С.В. Введение в теорию относительности и ее приложения в новой технике. – М.: Физматгиз, 1979.

⁴⁰Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: Гостехиздат, 1955.

теории, является совершенно недостаточным не только для последовательного изложения физической теории, но даже и её математической модели. Примеры, приведенные А. Вундгейлером, хорошо иллюстрируют это положение.

Итак, всякая физическая теория (а, следовательно, и её математическая модель) должны состоять из двух «переменных»: объекта Ω и группы преобразований \mathcal{G} , или в символике Вундгейлера ее можно записать в виде $\{\Omega, \mathcal{G}\}$. Что касается группы преобразований \mathcal{G} , то в релятивистской квантовой теории это будет в общем случае неоднородная группа Лоренца (группа Пуанкаре) и все её представления, необходимые для преобразования различных тензорных и спинорных полей. Как известно, теория представления групп хорошо разработана и, в частности, для группы Лоренца. Аналогичная ситуация имеет место в дорелятивистской квантовой теории по отношению к группе Галилея. Однако, что касается объекта Ω в физической теории, то требование Вундгейлера о его полном и однозначном определении во многих работах не рассматривались.

Основная идея Вундгейлера о том, что нельзя определять инварианты любой заданной группы преобразований без точной формулировки свойств объекта, к которому данная группа применяется, далеко не всегда учитывается.

В связи с изложенным отметим следующее. Если в качестве объекта рассмотреть встречающиеся поля, то легко убедиться, что в зависимости от физических особенностей этого поля, к нему как к ОУ должны применяться различные требования.

Поясним данный тезис примерами.

Существуют физические поля, связанные с переносом энергии, импульса и информации. В релятивистской физике такие поля не могут распространяться со скоростью, превышающей скорость света. Однако, как хорошо известно, существуют поля, не связанные с переносом ни энергии, ни импульса, а следовательно, и информации. Рассмотрим примеры таких полей.

Пример 1: Физический смысл функции действия S . Как известно, существуют физические поля, не связанные с переносом ни энергии, ни импульса, а, следовательно, и информации. В качестве примера такого поля можно указать на действие $S(x_1, x_2, x_3, x_0)$. Дело в том, что перемещение поверхности $S = const$ не связано с перемещением какой-либо частицы в континууме движущихся экземпляров, движение которого в целом описывает функция S . Более точно, производные функции по координатам $(\partial S / \partial x_i) = p_i$ дают значение компонент вектора энергии-импульса частицы, находящейся в данный момент времени t в данной точке пространства. В другой момент времени компоненты вектора $(\partial S / \partial x_i) = p_i$ в той же точке пространства относятся уже к другой частице. Таким образом, уравнение Гамильтона-Якоби дает описание потока невзаимодействующих тождественных частиц в эйлеровом, а не в лагранжевом представлении (в смысле классической гидродинамики).

Примечание. Подчеркнем еще раз, что в ньютоновой (до релятивистской) механике для частицы, движущейся в консервативном поле, имеем $H = const$, но из уравнения Гамильтона-Якоби (45)

следует $\frac{\partial S}{\partial t} = -H$. Однако никакого противоречия здесь нет. Первое уравнение $H = const$ относится

к одной и той же частице, за движением которой производится наблюдение; второе уравнение Гамильтона-Якоби относится к точке пространства, через которую в различные моменты времени проходят различные частицы. В связи с этим отметим, что уравнение Гамильтона-Якоби описывает поток невзаимодействующих тождественных частиц, которые в момент времени $t = 0$ заполняют непрерывным образом 6-мерное пространство координат и импульсов и, следовательно, имеют различное начальное значение энергии.

Изложенное дает полное объяснение, почему поверхность действия $S = const$ распространяется в релятивистской механике со скоростью, превышающей скорость света.

Аналогичный эффект имеет место в кинематике теории относительности для волновых процессов определенного типа, для которых существуют сверхсветовые скорости.

Проиллюстрируем данное утверждение примером, имеющим важное для интерпретации законов квантовой релятивистской теории информации и процессов извлечения скрытой квантовой информации в классических состояниях.

Пример 2. Рассмотрим две инерциальные системы отсчета s^A и s^B . Допустим, что система отсчета s^B движется относительно s^A с постоянной скоростью v в положительном направлении оси x^A . Обе системы связаны преобразованием Лоренца:

$$x^B = \frac{x^A - vt^A}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad t^B = \frac{t^A - \frac{v}{c^2}x^A}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad x^A = \frac{x^B + vt^B}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad t^A = \frac{t^B + \frac{v}{c^2}x^B}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Допустим теперь, что в системе отсчета s^A (одновременно по часам системы s^A) в момент $t^A = 0$ срабатывают источники света, расположенные вдоль оси x^A на равных друг от друга расстояниях. Этого можно достигнуть, если каждый источник света соединить с часами, снабженными устройством, замыкающим контакт в момент, когда стрелки часов показывают время $t^A = 0$. Таким образом, каждый источник света срабатывает независимо друг от друга. С точки зрения системы отсчета s^B включение источников света уже не будет одновременным. Так, источник света, имеющий в системе отсчета s^A координату x^A , включится (по часам системы s^B) в момент t^B , опреде-

ляемый в виде $t^B = \frac{\frac{v}{c^2}x^A}{\sqrt{1 - \beta^2}}$. Таким образом, с точки зрения системы отсчета s^B включения источ-

ников света (информации) представляются в виде некоторого волнового процесса, распространяющегося в отрицательном направлении x^B . Определим скорость распространения этого волнового процесса. Разность времен включения источников света Δt^B (по часам системы s^B) будет

равна $\Delta t^B = \frac{\frac{v}{c^2}\Delta x^A}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, где Δx^A – расстояние между двумя указанными источниками света в

системе отсчета s^A . Но так как $\Delta x^B = \frac{\Delta x^A}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, то отсюда следует, что отношение $\left| \frac{\Delta x^B}{\Delta t^B} \right| = \frac{c^2}{v} > c$,

поскольку $v < c$.

Итак, рассматриваемая волна распространяется (для наблюдателя в системе отсчета s^B) со сверхсветовой скоростью. Однако, никакого противоречия с теорией относительности здесь нет, так как от одного источника света к другому нет передачи энергии, импульса и информации.

Будем в дальнейшем физические поля, рассматриваемые как ОУ, называть *объектами первого рода*, если распространение фронта волны такого поля связано с переносом энергии-импульса, а, следовательно, и информации.

Согласно этому определению, если в физической теории встречаются поля, которые непосредственно не связаны с переносом энергии-импульса, а, следовательно, и с переносом информации, то такие поля будем называть *объектами второго рода*.

Аналогичный эффект имеет место в кинематике теории относительности для волновых процессов определенного типа, для которых существуют сверхсветовые скорости. Однако, никакого противоречия с принципами теории относительности в этом случае нет, так как упомянутые волновые процессы не связаны с переносом энергии, импульса или информации от одной точки пространственно-временного континуума к другой. Следовательно, имеем дело с объектом второго рода согласно приведенной классификации.

Приведенный пример имеет самостоятельное значение для разработки аксиоматики теории относительности и основ релятивистской логики, использующей кинематические аспекты СТО для фор-

мировании логической оценки и интерпретации событий в зависимости от используемой системы отсчета.

Рассмотрим еще один поучительный пример.

Пример 3: «Парадоксы» релятивистского уравнения Гамильтона-Якоби. Рассмотрим некоторые особенности физически корректной интерпретации вычисления скорости распространения поверхности действия $S = S(x_1, x_2, x_3, t) = \text{const}$ в (33) где действие S удовлетворяет релятивистскому уравнению Гамильтона-Якоби (41) в виде:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + m^2 c^2 = 0. \quad (35)$$

В данном случае имеем характеристическую поверхность φ вида $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_0) = c_1, x_0 = ict$, заданную в 4-мерном пространственно-временном континууме. Поскольку характеристическая поверхность является поверхностью разрыва старших производных рассматриваемого фронта волны, очень большое значение приобретает вопрос о скорости распространения этой поверхности в пространственно-временном континууме.

Если задана некоторая поверхность $\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = 0$, то скорость распространения фронта волны будет определяться в 4-мерном пространственно-временном континууме в виде:

$$v = -\frac{\partial \varphi / \partial t}{G}, \quad G = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2}.$$

Применяя данное выражение к (35), получим следующий результат:

$$v^2 = \frac{(\partial S / \partial t)^2}{\sum_{i=1}^3 (\partial S / \partial x_i)^2}. \quad (36)$$

Из (35) и (36) следует:

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{(\partial S / \partial t)^2}{(\partial S / \partial t)^2 - m^2 c^4}, \quad (37)$$

причем, как следует из (36), всегда имеет место неравенство:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 > m^2 c^4. \quad (38)$$

Таким образом, поверхность действия $S = \text{const}$ распространяется со сверхсветовой скоростью, несмотря то, что само действие S является решением релятивистки инвариантного уравнения (46). Однако никакого противоречия с теорией относительности здесь нет.

Как отмечалось, функция действия S является в физической интерпретации потенциалом для энергии-импульса и с перемещением поверхности $S = \text{const}$ не связано перемещение каких-либо частиц, которые всегда движутся со скоростью, меньшей (или равной) скорости света c .

Следовательно, функция действия S также является объектом второго рода.

Примером наличия сверхсветовой скорости распространения фронта волны наблюдаемого процесса, следующего непосредственно из преобразования Лоренца, является интегральный эффект гравитационного смещения.

Пример 4: Интегральный эффект гравитационного смещения и сверхсветовые скорости из преобразования Лоренца. Введем инерциальную систему отсчета K , в которой покоятся системы часов $\dots, A_{-1}, A_0, A_1, \dots$, снабженные ракетными двигателями, как это показано на рис. 5.

Примем также, что часы $\dots, A_{-1}, A_0, A_1, \dots$ синхронизованы с часами системы K . Предположим, что на часах $\dots, A_{-1}, A_0, A_1, \dots$ в момент $t = 0$ (по часам системы K) одновременно включаются ракетные двигатели. Допустим, что еще одна инерциальная система отсчета $\bar{K}(\bar{x}, \bar{y})$, которая движется относительно системы K с постоянной скоростью \mathcal{G} в положительном направлении оси x системы K . Как будет выглядеть процесс включения двигателей часов $\dots, A_{-1}, A_0, A_1, \dots$ с точки зрения системы $\bar{K}(\bar{x}, \bar{y})$? Здесь имеет место полная аналогия с рассмотренным ранее случаем вспышек лампочек, одновременных по часам системы s^B .

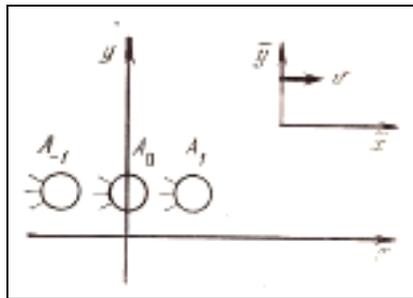


Рис. 5. Интегральный эффект гравитационного смещения

Приведем, однако, здесь подробно необходимые формулы. Воспользуемся преобразованием Лоренца. По часам системы $\bar{K}(\bar{x}, \bar{y})$ часы $\dots, A_{-1}, A_0, A_1, \dots$ будут включаться в моменты времени:

$$\dots, \bar{t}_{A_{-1}} = \frac{(-\mathcal{G}/c^2)l_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \bar{t}_{A_0} = 0, \quad \bar{t}_{A_1} = \frac{(+\mathcal{G}/c^2)l_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \dots$$

В приведенных формулах l_0 – расстояние между часами, измеренное в системе K . Как и следовало ожидать, процесс включения ракетных двигателей, одновременный по часам системы K (предполагается, что каждый двигатель включается в тот момент, когда часы A_k показывают время $t = 0$), оказывается неодновременным с точки зрения системы $\bar{K}(\bar{x}, \bar{y})$, а именно: часы A_1 включаются раньше, чем часы A_0 ; часы A_0 включаются раньше, чем часы A_{-1} и т.д. Этот процесс с точки зрения наблюдателей системы $\bar{K}(\bar{x}, \bar{y})$ будет представляться в виде волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси x системы K .

Найдем скорость распространения этой волны. Ракетный двигатель часов A_k включается (по часам системы $\bar{K}(\bar{x}, \bar{y})$) в момент:

$$\bar{t}_{A_k} = \frac{(-\mathcal{G}/c^2)kl_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{39}$$

а ракетный двигатель часов A_{k-1} включился (по часам системы $\bar{K}(\bar{x}, \bar{y})$) в момент:

$$\bar{t}_{A_{k-1}} = \frac{(-\mathcal{G}/c^2)(k-1)l_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{40}$$

Разность между моментами включения часов A_k и A_{k-1} (по часам системы $\bar{K}(\bar{x}, \bar{y})$) будет равняться

$$\bar{t}_{A_k} - \bar{t}_{A_{k-1}} = \frac{(-\mathcal{G}/c^2)l_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Расстояние между часами A_k и A_{k-1} , измеренное в системе $\bar{K}(\bar{x}, \bar{y})$ до включения двигателей, равняется $l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$. Поэтому, учитывая (41), получим:

$$\frac{l_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{(-\vartheta / c^2) l_0 / \sqrt{1 - \beta^2}} = -\frac{c^2}{\vartheta} \left(1 - \frac{\vartheta^2}{c^2} \right) = -\frac{c^2}{\vartheta} + \vartheta. \quad (41)$$

Из (41) видно, что волна включения двигателей может распространяться со *сверхсветовой скоростью* отрицательном направлении оси x (скорость её может меняться от 0 до ∞).

Итак, получили сверхсветовую скорость распространения волны включения двигателей *непосредственно из преобразования Лоренца*. Нетрудно видеть, что, как и ранее, никакого противоречия с теорией относительности здесь нет. В самом деле, двигатель любых часов A_k включается независимо от включения других двигателей в тот момент, когда стрелка часов A_k показывает время $t = 0$ (для этого нетрудно придумать простое технической устройство, связанное с часами A_k). Таким образом, включение двигателей не связано с передачей энергии и импульса, а следовательно, и информации от одних часов к другим (как отмечалось, двигатели включаются независимо друг от друга). Поэтому сверхсветовая скорость распространения волны включения двигателей в системе $\bar{K}(\bar{x}, \bar{y})$ ни в коем случае не противоречит принципам теории относительности. Здесь имеем дело с как бы «рекламной» скоростью, когда лампочки включаются последовательно (и независимо) друг от друга.

Следовательно, в данном случае также имеем дело с *объектом второго рода*.

Рассмотрим следствие указанного релятивистского эффекта.

Пример 5: Интегральный эффект гравитационного смещения показаний часов. Предположим теперь, что все двигатели будут работать в течение одного итого же времени t (по часам системы K), пока их скорость не станет равной $+\vartheta$ (т.е. скорости движения системы \bar{K} относительно системы K). Итак, в момент выключения всех двигателей (по часам системы K) все они окажутся покоящимися в системе \bar{K} по часам системы K . Так как все часы и связанные с ними двигатели предполагаются совершенно одинаковыми, то, очевидно, все часы будут двигаться относительно системы K совершенно одинаково. Из этого обстоятельства можно сделать два вывода: а) расстояние между часами l_0 (с точки зрения системы K) не изменится за время движения, поэтому расстояние между этими часами, измеренное в системе \bar{K} , после того как они в ней успокоятся, должно увеличиться и равняться $l_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$; б) все часы A_k в момент выключения двигателей, будут одновременно (по часам системы K) показывать одно и тоже время τ . Из приведенных выводов можно, в свою очередь, вывести важные следствия. Если все часы A_k в тот момент, когда они успокоились в системе \bar{K} (по часам системы K), показывают одно и тоже время, то это означает, что в системе \bar{K} они не синхронизированы. Для того чтобы эти часы были синхронизированы в системе \bar{K} , они должны иметь (одновременно с точки зрения системы K) следующие показания:

$$\dots, \bar{t}_{A_1} = \frac{t - (\vartheta / c^2)(x_0 + l_0)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \bar{t}_{A_0} = \frac{t - (\vartheta / c^2)x_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \bar{t}_{A_1} = \frac{t - (\vartheta / c^2)(x_0 - l_0)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \dots \quad (42)$$

Здесь x_0 – координата A_0 в системе K в тот момент, когда их скорость достигла величины $+\vartheta$ и они успокоились.

Итак, часы A_1 «ушли» по отношению к часам A_0 вперед (по часам системы \bar{K}) на величину:

$$\Delta t_{A_1 A_0} = \frac{\vartheta}{c^2} l_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (43)$$

а часы A_0 , в свою очередь, «ушли» вперед по отношению к часам A_{-1} на величину:

$$\Delta t_{A_0, A_{-1}} = \frac{\mathfrak{g}}{c^2} l_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{44}$$

и т.д.

Результаты, записанные в формулах (43), (44), относятся к тому времени в системе \bar{K} , когда часы $\dots, A_1, A_0, A_{-1}, \dots$ уже успокоились в этой системе. Приведенные формулы (43), (44) дают точное значение *интегрального эффекта гравитационного смещения показаний часов*. В самом деле, для наблюдателя, связанного с часами A_0 , полученный результат может быть просто объяснен тем, что за время действия гравитационного поля часы A_1 шли быстрее, так как находились в области более высокого гравитационного потенциала, а часы A_{-1} , шли медленнее, так как находились в области более низкого гравитационного потенциала.

Итак, интегральный подход к оценке влияния ускорения на физические процессы дал возможность получить точное интегральное значение гравитационного смещения показаний часов для рассматриваемого случая.

В приведенном анализе не вводилось каких-либо специальных дополнительных гипотез. В конечном счете полученный результат является прямым следствием преобразования Лоренца. Конечно, приведенные формулы дают интегральный результат влияния гравитационного смещения на показания часов за время действия гравитационного поля. Интересно отметить, что этот интегральный эффект не зависит от истории процесса, а зависит только от той скорости $\mathfrak{g} = \text{const}$, с которой движется система \bar{K} по отношению к системе K .

Указанный результат относится только к интегральному эффекту гравитационного смещения показаний часов, т.е. к разнице показаний часов A_k и A_{k-1} в системе отсчета \bar{K} в соответствии с установленной синхронизацией часов в этой системе. Что же касается абсолютного значения показаний часов A_k в момент, когда они останавливаются в системе \bar{K} , то оно, разумеется, зависит от истории процесса.

Пример 6: Физическая интерпретация гравитационного смещения и кинематика сверхсветовых скоростей. Рассмотрим теперь процесс выключения двигателей с точки зрения системы отсчета \bar{K} . Во-первых, следует отметить, что с точки зрения системы \bar{K} часы $\dots, A_1, A_0, A_{-1}, \dots$ остановились неодновременно (в то время как с точки зрения системы K они остановились в системе \bar{K} одновременно), а именно часы $\dots, A_1, A_0, A_{-1}, \dots$ будут останавливаться в системе \bar{K} с точки зрения этой системы к моменту времени:

$$\dots, \bar{t}_{A_1} = \frac{t - (\mathfrak{g}/c^2)(x_0 + l_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \bar{t}_{A_0} = \frac{t - (\mathfrak{g}/c^2)l_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \bar{t}_{A_{-1}} = \frac{t - (\mathfrak{g}/c^2)(x_0 - l_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \dots$$

Таким образом, с точки зрения системы \bar{K} выключение двигателей, связанных с часами, будет носить характер волнового процесса, распространяющегося со скоростью:

$$-\frac{l_0}{\sqrt{1-\beta^2} \cdot \frac{\mathfrak{g}}{c^2} \cdot \frac{l_0}{\sqrt{1-\beta^2}}} = -\frac{c^2}{\mathfrak{g}}. \tag{45}$$

Эта волна будет распространяться в отрицательном направлении оси x со *сверхсветовой скоростью*. Заметим, что скорость распространения волны выключения двигателей с точки зрения системы отсчета \bar{K} отличается от соответствующей величины в системе K (в системе K они выключаются одновременно).

Это различие объясняется тем обстоятельством, что в первом случае наблюдатели системы \bar{K} измеряли расстояние между часами A_k , покоящимися в системе K , а во втором случае они измеряют расстояние между этими же часами, но уже покоящимися в системе \bar{K} .

Разумеется, в этом случае, также как и в рассмотренном случае волны включения двигателей, никакого противоречия с теорией относительности нет, несмотря на наличие сверхсветовой скорости распространения этой волны. Здесь, также как и в предыдущем случае, распространение волны не связано с передачей энергии и импульса, а следовательно, и информации.

Таким образом, получаем объект второго рода.

Рассмотрим некоторые физические особенности полученных релятивистских кинематических эффектов сверхсветовых скоростей, скрытых в состояниях релятивистских динамических систем.

В связи с этим сделаем еще одно замечание, имеющее принципиальное значение. По существу, в рассматриваемом примере имели дело с тремя системами отсчета: 1) инерциальной системой K ; 2) инерциальной системой \bar{K} ; и 3) неинерциальной системой, связанной с часами A_0 .

Рассматриваемый процесс был подробно проанализирован с точки зрения обеих инерциальных систем K и \bar{K} . Однако с точки зрения неинерциальной системы отсчета, связанной с часами A_0 , можно судить об интегральном эффекте гравитационного смещения показаний часов, вызванного действующим в этой системе гравитационным полем. Никаких метрических соотношений (т.е. вопросов измерения пространственных расстояний, промежутков времени, процессов синхронизации и т.д.) в этой неинерциальной системе не устанавливалось. Наблюдатель, связанный с часами A_0 , может не знать, что все двигатели, связанные с часами $\dots, A_1, A_0, A_{-1}, \dots$, должны быть включены одновременно с точки зрения системы отсчета K . Однако после включения двигателей наблюдатель, связанный с часами A_0 , оказывается в совершенно другой и притом неинерциальной системе отсчета.

Поэтому для него события, которые считались в системе K одновременными, больше не могут рассматриваться как одновременные. Заметим, что хотя неинерциальная система отсчета, связанная с часами A_0 , существует *конечное* время, наблюдатель, связанный с часами A_0 , может за время существования этой системы судить о событиях, *сколь угодно удаленных во времени как в прошлое, так и в будущее*.

Наконец, когда часы A_0 останавливаются в системе \bar{K} , наблюдатель, связанный с этими часами, опять оказывается в новой пространственно-временной ориентации. Теперь он должен судить о событиях, происшедших раньше или позже, да и вообще обо всех метрических соотношениях уже с точки зрения системы отсчета \bar{K} .

В частности, например, если для наблюдателей, находящихся в системе K , время между включением и выключением всех двигателей конечная величина, то для наблюдателя, связанного с часами A_0 , после его «перелета» в систему этот процесс, как видели, не будет конечным во времени: *он примет характер волны, распространяющейся со сверхсветовой скоростью, начавшейся в бесконечно далеком прошлом и заканчивающийся в бесконечно будущем*.

В рассмотренных примерах не анализировались метрические соотношения, существующие в неинерциальной системе отсчета, связанной с часами A_0 , а ограничились только интегральной оценкой гравитационного смещения.

Вместе с тем детальный анализ метрических соотношений в неинерциальных системах отсчета имеет исключительно важное значение. Данный вопрос рассмотрен в Части 2 настоящей работы.

Здесь отметим, что в приведенном рассмотрении проявляется своеобразная *относительность конечного и бесконечного*. В самом деле, в то время как в системе K между моментами включения всех двигателей и выключения прошло конечное время, в системе отсчета \bar{K} этот процесс растягивается от $-\infty$ до ∞ .

Из изложенного следует, что наличие сверхсветовых скоростей в объектах второго рода СТО и ОТО не приводит к нарушению закона причинности и находится в полном согласии с постулатами теории относительности. Наличие подобных объектов уже в рамках классической релятивистской теории имеет большое значение при построении моделей и алгоритмов управления релятивистскими

системами, так как управление связано с передачей информации в пространственно-временного континуума.

Таким образом, модель релятивистской системы и алгоритм управления должны описываться в терминах объекта первого рода. Аналогичный вывод имеет место для квантовых релятивистских систем. Данный вопрос рассмотрен в следующей части работы.

Рассмотрим поучительный пример исследования динамического поведения релятивистского осциллятора под действием линейной силы.

Пример 7: Ангармоническое поведение релятивистского осциллятора [9 - 12]. Напомним, что линейный классический осциллятор массы m под действием линейной упругой силы kx в состоянии нулевого равновесия описывается уравнением Ньютона – Хука вида $\frac{d}{dt}[m\dot{x}] = -kx$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. При начальных условиях $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 0$ решение данного уравнения как известно имеет вид:

$x(t) = a \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$. Одной из проблем (с точки зрения теории относительности) является определе-

ние скорости движения массы осциллятора в виде: $\dot{x}(t) = a\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$, которая имеет макси-

мальное значение $\vartheta_{\max} = a\sqrt{\frac{k}{m}}$ и может превышать скорость света при соответствующем выборе

значения амплитуды a . Уравнение Ньютона можно записать в виде $F = \frac{dp}{d\bar{t}}$, где \bar{t} является координатным (лабораторным) временем, а p описывает релятивистский импульс (момент) вида:

$$p = \frac{m\vartheta}{\sqrt{1 - \vartheta^2 / c^2}}, \quad \vartheta = d\bar{x} / d\bar{t} \text{ – скорость движения массы осциллятора и } c \text{ – скорость света.}$$

Уравнение движения релятивистского осциллятора можно получить из уравнения:

$$F = \frac{dp}{d\bar{t}} = \frac{d}{d\bar{t}} \frac{m\vartheta}{\sqrt{1 - \vartheta^2 / c^2}} = \frac{d}{dt} \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2 / c^2}} = \frac{m}{\left[1 - \left(\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2}. \quad (46)$$

Тогда, подставляя (46) в уравнение Ньютона $\frac{dp}{d\bar{t}} + k\bar{x} = 0$ получим:

$$\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} + \frac{k}{m} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \bar{x} = 0 \quad (47)$$

или в безразмерной форме ($x = \frac{\omega_0 \bar{x}}{c}$, $t = \omega_0 \bar{t}$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – угловая частота нерелятивистского линейного осциллятора) в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left[1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} x = 0. \quad (48)$$

Система (48) является существенно нелинейной (в отличие от ньютонова осциллятора), консервативной, член $(dx/dt)^2$ не влияет на затухание амплитуды колебаний и при $(dx/dt)^2 \ll 1$ уравнение (48) принимает вид $(d^2x/dt^2) + x = 0$ линейного осциллятора и собственное время τ эквивалентно координатному времени \bar{t} .

Введем фазовые переменные (x, y) и уравнение (48) можно записать в виде:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -(1-y^2)^{\frac{3}{2}} x \quad (49)$$

и траектория фазового портрета задается как решение уравнения первого порядка вида:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(1-y^2)^{\frac{3}{2}} x}{y}. \quad (50)$$

Физически реализуемые решения уравнений (49) и (50) задаются областью $-\infty < x < +\infty$ и $-1 < y < +1$, т.е. скорость движения, в отличие от нерелятивистского осциллятора ограничена.

Данный факт объясняется тем, что переменная y связана с релятивистским параметром $\beta = v/c$, где скорость света ограничивает скорость движения осциллятора $-c < v < +c$, что и приводит к физическому ограничению $-1 < y < +1$. Траектории движения релятивистского осциллятора как решения уравнения (50) являются замкнутыми в открытой области фазового пространства, заданной в виде $-\infty < x < +\infty$ и $-1 < y < +1$. Это означает, что физические решения являются периодическими.

Однако, в отличие от нерелятивистского гармонического осциллятора, движение релятивистского осциллятора содержит многократные высокочастотные составляющие. Рассмотрим уравнение (47) с позиции метода гармонического баланса, широко применяемого в задачах решения нелинейных уравнений. Произведем замену переменных в виде $y \rightarrow u$, так что выполняется условие $-\infty < u < +\infty$. Тогда требуемое преобразование имеет вид:

$$y = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}. \quad (51)$$

Введем новую независимую переменную $\xi = \omega t$, и соответствующее дифференциальное уравнение второго порядка для переменной u примет вид:

$$\omega^2 \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = 0. \quad (52)$$

При $\omega \equiv 1$ уравнение (52) примет вид:

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = 0, \quad u(0) = A, \quad \dot{u}(0) = 0. \quad (53)$$

Новая независимая переменная выбрана так, что решение уравнения (53) является периодической функцией от ξ периода 2π .

Уравнение (53) является примером консервативной нелинейной осцилляторной системы, в которой безразмерная воздействующая сила имеет иррациональную форму.

Уравнение (53) может быть получено из соответствующего вариационного функционала:

$$J(u) = \int_0^t \left\{ -\frac{\dot{u}^2}{2} + \sqrt{1+u^2} \right\} dt.$$

Соответствующий Гамильтониан H имеет вид:

$$H = \frac{\dot{u}^2}{2} + \sqrt{1+u^2}, \quad H_{t=0} = \sqrt{1+A^2}, \quad H - H_{t=0} = \frac{\dot{u}^2}{2} + \sqrt{1+u^2} - \sqrt{1+A^2}. \quad (54)$$

Подставим возможное решение $u(t) = A \cos(\omega t)$ в (48) и получим:

$$\frac{1}{2} A^2 \omega^2 \sin(\omega t)^2 + \sqrt{1 + (A \cos(\omega t))^2} - \sqrt{1 + A^2}.$$

При $\omega t = \frac{\pi}{4}$ получим $\frac{1}{2} A^2 \omega^2 + \sqrt{1 + \frac{A^2}{2}} - \sqrt{1 + A^2}.$

Тогда приближенное решение для угловой частоты примет вид:

$$\omega = \frac{\sqrt{-2\sqrt{4 + 2A^2} + 4\sqrt{1 + A^2}}}{A}.$$

В результате приближенное решение имеет вид:

$$u(t) = A \cos\left(\frac{\sqrt{-2\sqrt{4 + 2A^2} + 4\sqrt{1 + A^2}}}{A} \cdot t\right). \tag{55}$$

На рис. 6 представлены результаты для (55) при различных значениях амплитуды A .

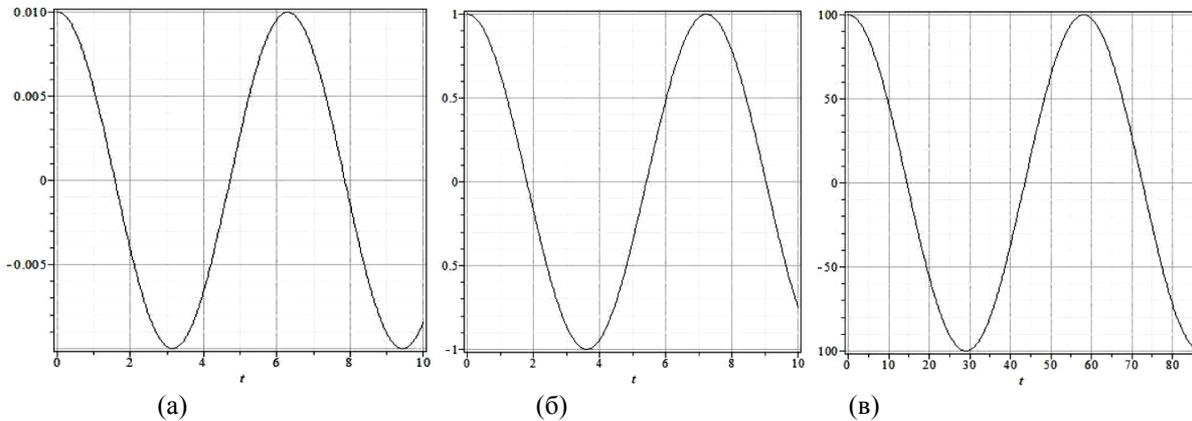


Рис. 6. Вид решений уравнения (10) при $A = 0.01$ (а); при $A = 1$ (б); и $A = 100$ (в)

Приведенный анализ динамического поведения релятивистского осциллятора рассматривался в лабораторной системе отсчета, т.е. сила $F = \frac{dp}{dt} = -kx$ являлась трехкомпонентным вектором. Если рассматривать систему отсчета движущейся частицы, то в этом случае $F = \frac{dp}{d\tau} = -kx$ и действующая на частицу сила будет рассматриваться как 4-вектор скалярного потенциала Лоренца типа $\frac{1}{2} kx^\mu x_\mu$ ($x_\mu = (ct, x)^T$) и уравнение движения имеет вид:

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} = -kx. \tag{56}$$

Тогда эквивалентное форме (47) уравнение движения имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right]^2 x = 0. \tag{57}$$

Таким образом, для записи обеих форм в координатном времени соответствующей величины $\frac{dp}{dt}$ необходимо записать оба уравнения, как $\frac{dp}{dt} = F_t$ и $\frac{dp}{dt} = F_\tau$ с $F_t = -kx$ для формы 3-вектора силы и $F_\tau = -kx\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}$ для формы 4-вектора силы соответственно.

Для сравнения качественного поведения систем (47) и (57) приведем к безразмерной форме данные уравнения с помощью преобразований $x = aq$ и $t = \sqrt{m/k}s$ так, что условие $x(0) = a$ дает $q(s=0) = 1$. Определим отношение начальной потенциальной энергии к энергии покоя как $\sigma \equiv \frac{1}{2} \frac{ka^2}{mc^2}$, т.е., параметр, определяющий размер релятивистской коррекции.

Тогда рассматриваемые уравнения примут вид:

$$q_N''(s) = -q_N(s), \quad q_t''(s) = -q_t(s) \left[1 - 2\sigma q_t'(s)^2 \right]^{\frac{3}{2}}, \quad q_\tau''(s) = -q_\tau(s) \left[1 - 2\sigma q_\tau'(s)^2 \right]^2 \quad (58)$$

соответственно.

На рис. 7 показаны результаты моделирования уравнений (58) для разных значений параметра σ .

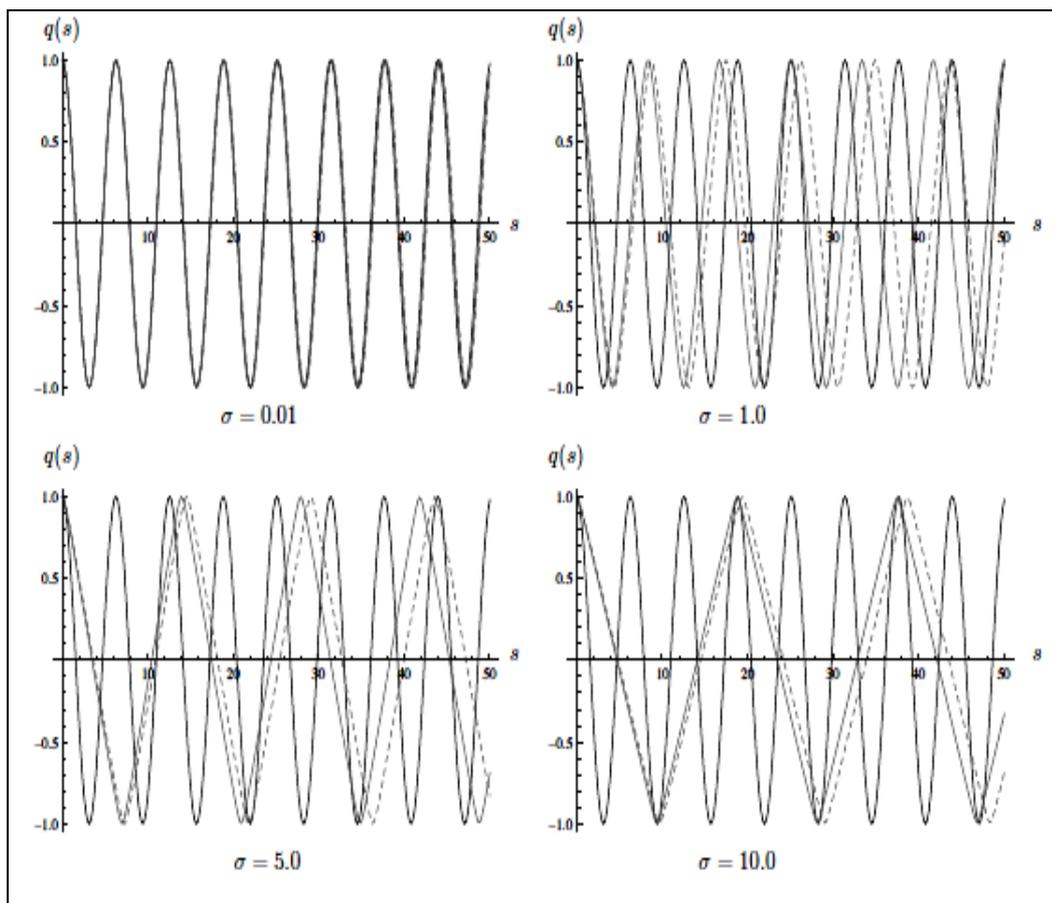


Рис. 7. Сравнение поведения $q_N(s)$ нерелятивистского (черный цвет), релятивистского $q_t(s)$ (серый цвет) и $q_\tau(s)$ (серый пунктирный цвет) осцилляторов

Как видно из результатов, представленных на рис. 7, при малых значениях параметра σ траектории движения слабо различимы и различие происходит с увеличением параметра σ .

Рассмотренные решения можно записать как:

$$x(t) = x_0 + \left(\sqrt{1 + \Pi^2} - \sqrt{1 + \Pi_0^2} \right) \frac{c^2}{a}, \quad \Pi(t) = \frac{p(t)}{m_0 c} = \Pi_0 + \frac{at}{c}. \quad (59)$$

Предел в нерелятивистском случае имеет вид:

$$x^{(NR)}(t) = x_0 + \frac{1}{2} \left[\left(\Pi_0 + \frac{at}{c} \right)^2 - \Pi_0^2 \right] \frac{c^2}{a}, \quad \Pi^{(NR)}(t) = \Pi_0 = \frac{p_0}{m_0 c} = \gamma_0 \beta_0, \quad (60)$$

$(\beta = \mathfrak{V} / c, \gamma = 1 / \sqrt{1 - \beta^2})$ и соответствует уравнению ускоренного движения классического осциллятора.

Обсудим уравнение Лиувилля, описывающее эволюцию распределений $\rho(x, p, t)$ ансамбля релятивистских частиц на фазовом пространстве.

В лабораторной системе отсчета эволюция плотности распределения $\rho(x, p, t)$ частиц в фазовом пространстве описывается уравнением Лиувилля следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, p, t) = \hat{L} \rho(x, p, t), \quad (61)$$

где оператор Лиувилля \hat{L} задается в виде:

$$\hat{L} = \left[\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x} \right].$$

В случае свободной релятивистской частицы оператор Лиувилля имеет вид:

$$\hat{L} = -c \frac{\Pi}{\sqrt{1 + \Pi^2}} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Рассмотрим релятивистский Гамильтониан следующего вида:

$$H = c \sqrt{p^2 + (m_0 c)^2} + \frac{1}{2} k x^2, \quad (62)$$

который в принятых обозначениях можно записать как:

$$H = m_0 c^2 \left(\sqrt{1 + \Pi^2} + \frac{1}{2} \eta^2 \right), \quad \eta = \frac{\omega}{c} x, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_0}}.$$

Обозначив $\lambda = \omega t$, оператор Лиувилля для данного Гамильтониана записывается как:

$$\hat{L} = - \frac{\Pi}{\sqrt{1 + \Pi^2}} \frac{\partial}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial}{\partial \Pi}, \quad (63)$$

решение которого осуществляется итерационным методом в виде:

$$\rho_n = \rho(\eta_n, \Pi_n; 0) \text{ при } \delta\lambda = \omega \delta t,$$

где

$$\eta_n = \eta_{n-1} - F' \left(\Pi_{n-1} + \eta_{n-1} \frac{\delta\lambda}{2} \right) \delta\lambda, \quad F(\Pi) = \sqrt{1 + \Pi^2}$$

и

$$\Pi_n = \Pi_{n-1} + \frac{\eta_n + \eta_{n-1}}{2} \delta\lambda.$$

На рис. 8 показана эволюция фазового пространства при начальном Гауссовском распределении.

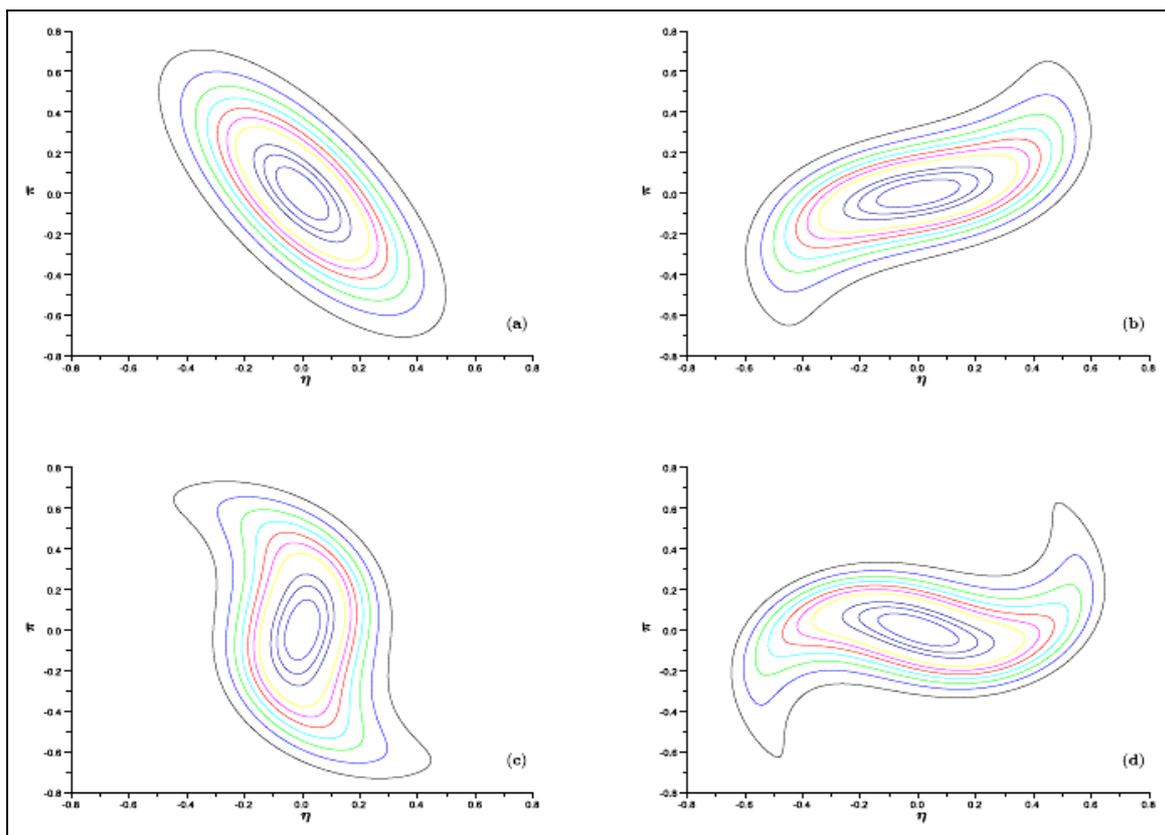


Рис. 8. Эволюция фазового пространства при $\delta\lambda = 5 \times 10^{-3}$ после (а) $n = 0$; (б) $n = 1000$; (в) $n = 1400$; (г) $n = 2400$

Эволюция глобального распределения с учетом релятивистского эффекта приведена на рис. 9.

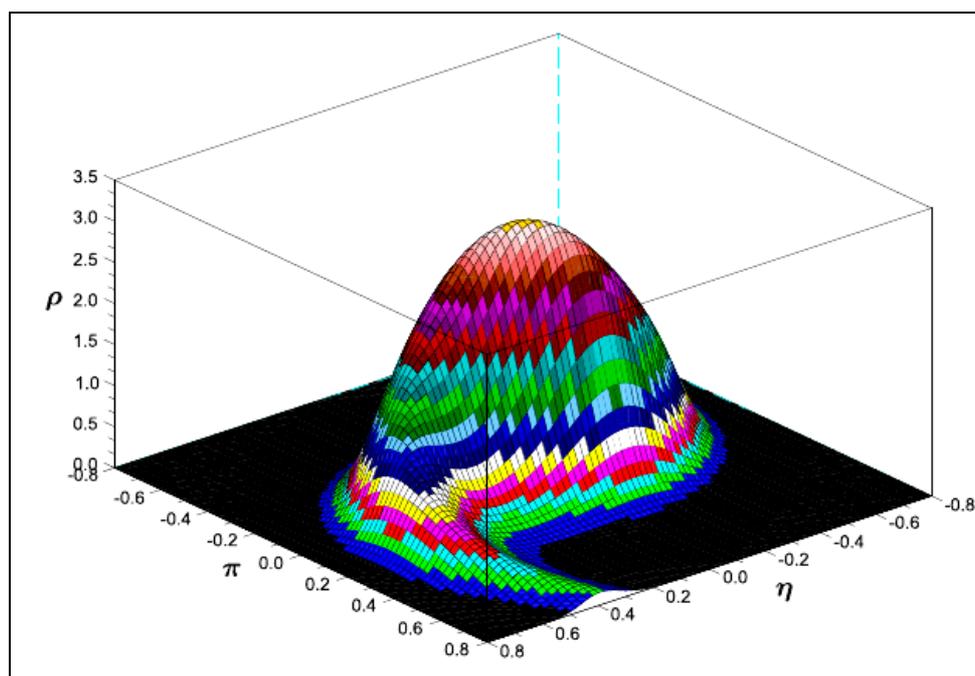


Рис. 9. Плотность распределения фазового пространства ($n = 2400$)

Влияние релятивистского эффекта заметно на «хвосте» распределения, когда величина момента большая и поэтому релятивистский эффект особенно заметен.

В классическом нерелятивистском случае начальное Гауссовское распределение и эволюция контура фазового пространства реализуется через непрерывную деформацию эквивалентных площадей эллипсов.

Выводы

Рассмотрены особенности проблемы Вундгейлера на примере релятивистских объектов и обсуждены вопросы корректности нелинейных преобразований систем отсчета в пространственно-временных континуумах. Решение данных вопросов имеет принципиальное значение при обосновании таких вопросов как допустимость сверхсветовых скоростей в моделях релятивистских объектов и процессах передачи информации, экспериментальной проверки СТО и ОТО, возможности практического использования релятивистских эффектов и др. На примерах объектов первого и второго рода показана возможность обоснования корректности интерпретации физических эффектов типа сверхсветовых скоростей в релятивистских инвариантных системах.

Список литературы

1. Литвинцева Л.В., Ульянов С.В. Квантовый нечеткий вывод для создания баз знаний в робастных интеллектуальных регуляторах // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2007. – №6.
2. Литвинцева Л.В., Ульянов С.В. Интеллектуальные системы управления. Ч. 1. Квантовые вычисления и алгоритм самоорганизации // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2009. – №6.
3. Гольденблат И.И., Ульянов С.В. Введение в теорию относительности и ее приложения в новой технике. – М.: Физматгиз, 1979.
4. Петров Б.Н., Уланов Г.М., Ульянов С.В. Проблемы управления релятивистскими и квантовыми динамическими системами: Информационные и термодинамические аспекты. – М.: Наука, 1982.
5. Ульянов С.В., и др. Логические и квантовые парадоксы интеллектуальных квантовых и мягких вычислений // Системный анализ в науке и образовании: сетевое научное издание. – Дубна, 2010. – № 2. – [Электронный ресурс]. URL: <http://www.sanse.ru/archive/16>. – 0421000111\0018.
6. Cabello A. Bibliographic guide to the foundations of quantum mechanics and quantum information // arXiv:quant-ph/0012089v12. – 2004.
7. Aharonov Y., Rohrlich D. Quantum paradoxes: Quantum theory for the perplexed (Physics Textbook). – Weinheim, Cambridge: Wiley-VCH. – 2005.
8. Peres A. Quantum theory: Concepts and methods. – Fundamental Theories of Physics. – Vol. 72. – N.Y.: Kluwer Academic Publ. – 2002.
9. Belendez A., Mendez D.I., Alvarez M.L., Pascual C., Belendez T. Approximate analytical solutions for the relativistic oscillator using a linearized harmonic balance methods // Intern. J. Modern Phys. – 2009. – Vol. 23. – №4. – Pp. 521-536.
10. Ganji D.D., Azimi M. Notes on relativistic harmonic oscillator // The General Science J. (Babol University of Technology) – 2009. – №3. – Pp. 10-13.
11. Clark D., Franklin J., Mann N. Relativistic linear restoring force // arXiv:1205.5299v1 [physics.class-ph]. – 2012.
12. Babusci D., Dattoli G., Quantromini M., Sabia E. Relativistic harmonic oscillator // arXiv:1209.2876v1 [math-ph]. – 2012.