

ФИЗИЧЕСКАЯ СТРОГОСТЬ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КОРРЕКТНОСТЬ МОДЕЛИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО РОБОТА: АДЕКВАТНОСТЬ РЕАЛЬНОМУ ОБЪЕКТУ И ТОЧНОСТЬ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ – МЕТОД ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ НА ЛАГРАНЖЕВЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЯХ

Ульянов Сергей Викторович¹, Ульянов Виктор Сергеевич², Решетников Андрей Геннадьевич³, Ульянова Ксения Викторовна⁴

¹Доктор физико-математических наук, профессор;
Государственный университет «Дубна»;
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;
Ведущий научный сотрудник;
Объединенный институт ядерных исследований,
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, д. 6;
e-mail: ulyanovsv46_46@mail.ru.

²Кандидат технических наук, доцент;
МИИГАиК;
105064, Москва, Гороховский пер., 4;
e-mail: ulyanovik@gmail.com.

³Старший научный сотрудник;
Объединенный институт ядерных исследований,
141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, д. 6;
e-mail: agreshetnikov@gmail.com.

⁴Студент;
Ресурсный центр "Медицинский Сеченовский Прединверсарий";
121059, Москва, 1-ая Бородинская улица, 2.
e-mail: Ksenia.ulianova.V@gmail.com.

На примере широко известной лабораторной системы, представленной как механический, динамически неустойчивый объект управления - каретка-маятник (шест), рассматриваются основные подходы и упрощения в создании нелинейной математической модели и структуры компьютерного моделирования ее системы управления. Обсуждаются методы создания математической модели с учетом упрощений физической модели и ее параметров, а также аспектов, связанных с математической точностью и физической строгостью математического описания динамического объекта и применения технологий создания интеллектуальных самообучающихся систем управления.

Ключевые слова: нелинейная механика, робототехника, интеллектуальные системы управления.

Для цитирования:

Физическая строгость и математическая корректность модели интеллектуального робота: адекватность реальному объекту и точность уравнений движения динамической системы – метод глубокого обучения на лагранжевых нейронных сетях / С. В. Ульянов, В. С. Ульянов, А. Г. Решетников, К. В. Ульянова // Системный анализ в науке и образовании: сетевое научное издание. 2022. № 1. С. 1–41.
URL : <http://sanse.ru/download/458>.

PHYSICAL RIGIDITY AND MATHEMATICAL CORRECTNESS OF THE INTELLIGENT ROBOT MODEL: ADEQUACY TO A PHYSICAL OBJECT AND ACCURACY OF MOTION DYNAMIC SYSTEM EQUATIONS – METHOD OF DEEP MACHINE LEARNING BASED ON LAGRANGIAN NEURAL NETWORKS

Ulyanov Sergey V.¹, Ulyanov Viktor S.², Reshetnikov Andrey G.³, Ulyanova Ksenia V.⁴

¹Grand PhD in Physical and Mathematical Sciences, professor;

*Dubna State University;
19 Universitetskaya Str., Dubna, Moscow region, 141980, Russia;
Leading Researcher of LIT JINR;
Joint Institute for Nuclear Research;
6 Joliot-Curie Str., Dubna, Moscow region, 141980, Russia;
e-mail: ulyanovsv@mail.ru.*

²*Ph.D in robotics, associate professor;
MIIGAiK;
4 Gorohovskiy Per., Moscow, 105064, Russia;
e-mail: ulyanovik@gmail.com.*

³*PhD in informatic, associate professor;
Joint Institute for Nuclear Research,
6 Joliot-Curie Str., Dubna, Moscow region, 141980, Russia;
e-mail: agreshetnikov@gmail.com.*

⁴*Student;
Resource Center "Medical Sechenov Pre-University";
2 1st Borodinskaya Str., Moscow, 121059, Russia;
e-mail: Ksenia.ulianova.V@gmail.com.*

On the example of a well-known laboratory system represented as a mechanical, dynamically unstable control object – cart-pole, the main approaches and simplifications in creating a nonlinear mathematical model and the structure of computer modeling of its control system are considered. Methods for creating a mathematical description using simplifications of the physical model and its parameters, as well as aspects related to the mathematical accuracy and physical rigor of the dynamic object mathematical description and use of technologies for creating intelligent self-learning control systems are discussed.

Keywords: non-linear mechanics, robotics, intelligent control systems.

For citation:

Ulyanov S. V., Ulyanov V. S., Reshetnikov A. G., Ulyanova K. V. Physical rigidity and mathematical correctness of the intelligent robot model: adequacy to a physical object and accuracy of motion dynamic system equations – method of deep machine learning based on lagrangian neural networks. System Analysis in Science and Education, 2021;(1):1–41(In Russ). Available from: <http://sanse.ru/download/458>.

Введение: Необходимость и достаточность описания математической модели в концепции интеллектуального управления с не доопределёнными параметрами и связями

Как было показано в [1], все три подхода классической механики к созданию математической модели объекта – уравнений движения, а именно, Ньютона, Лагранжа 2-го рода и Гамильтона-Якоби, имеют взаимосвязь, и соответственно выбор подхода зависит от задачи и способа ее решения [2]. Выбор соответствующей формы описания зависит от сложности задачи и, как будет показано далее, всевозможных условий и ограничений, наложенных на исследуемый объект. При этом, выбор классического подхода так же зависит от возможности его приведения в программируемую форму при помощи соответствующего математического программного обеспечения, а так же, возможности его упрощения, корректировки и параметризации [3].

Отмеченные особенности описания физических объектов рассмотрены в данной статье на классическом примере системы «каретка-перевернутый маятник» с учетом аспектов точности и строгости описания модели движения, а также, простоты и алгоритмической сложности представления.

Повышенная точность и строгость определения математического описания объекта т.е. математической модели (ММ) не всегда уместна с точки зрения трудозатрат на создание как самой модели, так и определение ее параметров и их описание, особенно с точки зрения применения

самообучающихся интеллектуальных систем управления. ММ должна быть в определенном смысле «сложной», т.е. физически строга и математически корректна по точности адекватного описания в соответствии с физической сложностью принятых законов движения, модели пространства-времени и недоопределенности параметров задачи, для которой создается ММ. Наряду с этим необходимо понимать каким будет выбор системы управления этой задачей.

В работах рассматривается интеллектуальная системы управления с интеллектуальной обратной связью основанная на представленном рис. 1.

Примечание. Обозначения в структуре рис. 1: ГА (ГА) – Генетический Алгоритм; f – Функция Принадлежности ГА(ГА); S – Энтропия Системы; S_c – Энтропия Контроллера (Регулятора); S_i – Энтропия Объекта Управления (одноколенный робот-велосипед); e – Ошибка Управления; u^* – Оптимальный Сигнал Управления; $m(t)$ – Внешние/Внутренние Воздействия; FC (НР) – Нечеткий Контроллер (Регулятор); FNN (ННС) – Нечеткая Нейронная Сеть; FLC (НЛСК) – Нечеткая Логическая Система Классификации; SSCQ (СМКУ) – Система Моделирования Качества Управления; K – Глобальное Оптимальное Решение Коэффициентов Усиления регулятора (Обучающий Сигнал); LPTR (НТПП) – Нечеткая Таблица Решающих Правил; CGS – Коэффициенты Усиления регулятора (в случае 2-х PD (ПД) регуляторов $K = (k_1, k_2, k_3, k_4)$).

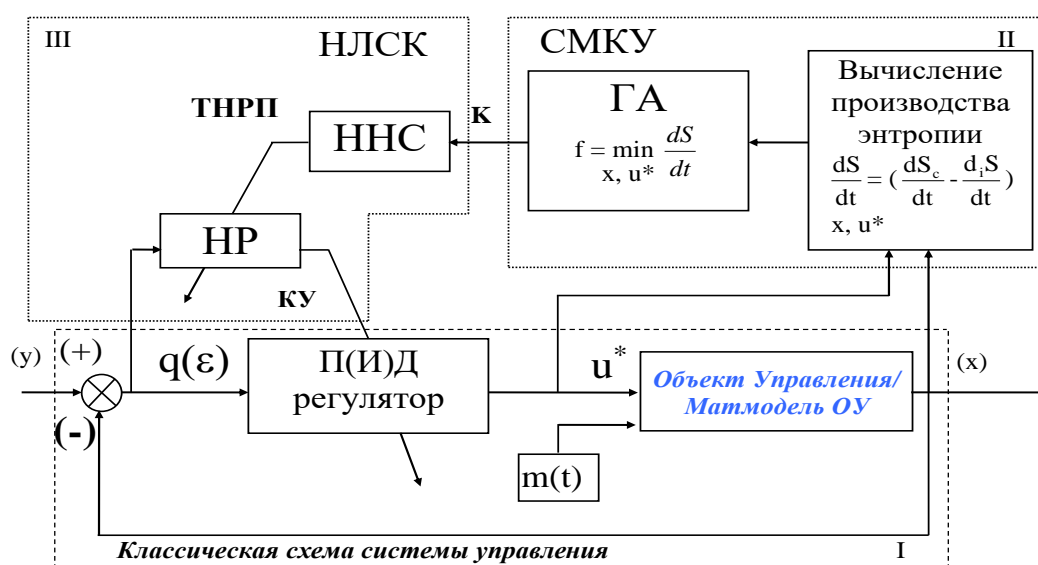


Рис. 1. Самоорганизующаяся Структура Искусственной, Интеллектуальной, Робастной Системы Управления с Новым Физическим Критерием Качества Управления

Как показали предыдущие исследования сложных нелинейных динамических систем, таких как, одноколенный робот - велосипед, автомобиль с управляемой амортизационной системой, мотоцикла (скутера), представленная выше схема справляется с первоначальной задачей робастного управления объектом.

Для обучения системы управления объекта, т.е. создания ее интеллектуальной БЗ, на первом этапе, Объект Управления представляется в виде комплексной (дополненной) расширенной ММ, которая в свою очередь должна быть выведена наиболее приближенно к реальному объекту. Адекватность математической и приближенности ее к физическому прототипу, как показали предыдущие исследования, гарантирует начальное корректное обучение системы на первых этапах создания интеллектуальной БЗ системы управления объектом. Таким образом, в представленной схеме блок ММ играет не маловажную роль и поэтому здесь остановимся подробнее на создании, компоновке, предположениях и выводе уравнений движения заданного объекта и создание его математической модели с применением соответствующих программных продуктов.

Одним из важнейших элементов в системе управления с интеллектуальной обратной связью является сам объект управления и/или его ММ.

Целью данной работы является описание оптимального для понимания подхода в создании ММ, с возможными упрощениями и определениями-описаниями, на примере классической задачи в динамике и теории управления – системы «каретка-маятник».

Постановка задачи: создание корректного математического описания физической модели каретка-маятник различными способами для оптимального выбора расчетной модели

В начале приведем выводы для уравнений движения системы каретка-маятник, а также сопутствующие обсуждения и анализ.

Рассмотрим перевернутый маятник, изображенный на рис. 1. Ось маятника монтируется на каретке (тележке), которая может перемещаться в горизонтальном направлении. Тележка приводится в действие мотором, который в момент времени t прикладывает к тележке силу f . Сам маятник является цилиндрическим телом с центром масс в точке P_{cm} .

Считается, что модель представляет собой неустойчивую систему, поскольку для поддержания равновесия маятника требуется внешняя управляющая сила f .

Для представленной модели системой *Обобщенных Координат* является – $q_i(t) = [x(t), y = 0, \theta(t)]$; где $i = 1, 2$. Как следует из приведенного выше, первым упрощением в системе будет совпадение точки вращения маятника O и точки центра масс каретки C_{cm} (см. рис. 2 (б)).

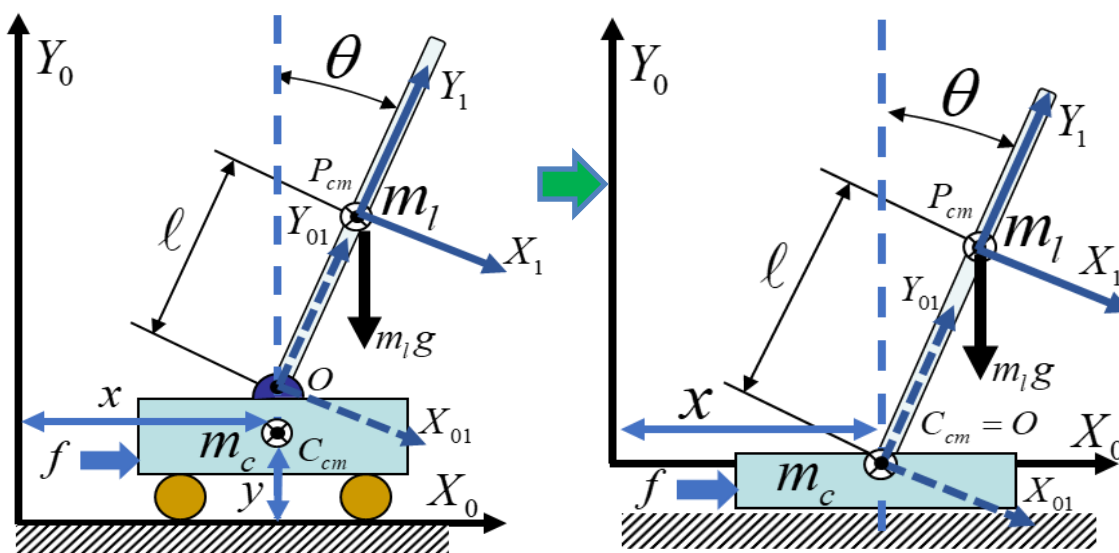


Рис. 2. (а) Физическая модель «каретка-маятник»; (б) упрощение физической модели в математическом описании

На рисунке приняты следующие обозначения: $\{X_0, Y_0\}$ – декартова система координат. При условии первого упрощения, т.е. совпадения точки вращения маятника O и точки центра масс каретки C_{cm} , система координат 0 также является инерциальной по отношению к каретке, при ее параллельном переносе в центр масс; x – горизонтальная координата положения каретки (центра масс) в декартовой системе координат $\{X_0, Y_0\}$; y – вертикальная координата положения каретки (центра масс) в декартовой системе координат $\{X_0, Y_0\}$. В случае упрощения на рис. 1(б). $y = \text{const} = 0$; m_c – масса каретки; C_{cm} – центр масс каретки; O – точка вращения маятника; $\{X_{01}, Y_{01}\}$ – инерциальная система координат поворота из плоскости каретки в плоскость маятника в точке O ; l – положение центра масс стержня маятника; m_l – масса стержня маятника; P_{cm} – центр масс стержня маятника; $\{X_1, Y_1\}$ – инерциальная система координат маятника.

Далее представим варианты вывода ММ методами *Лагранжа* и на основе второго закона *Ньютона*.

Описание ММ методом Лагранжа

Представленный далее вывод уравнений движения энергетическим методом Лагранжа

несколько отличается от изложенных в классической литературе по механике своей методологией, позволяющей систематизировать сам процесс вывода для его представления в математических пакетах прикладных программ, таких как – MathCAD, Maple и т.д [5,6].

Перейдем к выводу системы уравнений, описывающих движения динамического объекта «каретка-маятник» с использованием уравнения Лагранжа.

Лагранжиан в общем виде записывается как – $L = T - U$ – где T – кинетическая энергия всего объекта в целом, U – потенциальная энергия всего объекта. Уравнение Лагранжа второго порядка имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (1)$$

где $q_i, i = 1, 2, \dots, n$ – Обобщенные Координаты системы, в нашем случае, для системы «каретка-маятник» – $q_i(t) = [x(t), y = 0, \theta(t)], i = 1, 2$.

На практике объект часто состоит из множества подвижных частей, каждая из которых имеет свой центр масс, поэтому в обобщенном случае Лагранжиан имеет следующий вид: $L = \sum L_{j_part}$, где $L_{part} = T_{part} - U_{part}$, где T_{part} – кинетическая энергия каждой части систем, в нашем случае "каретка" и "маятник", вычисляемая по следующей формуле: $T_{part} = T_{part}^{Tr} + T_{part}^{Rot}$, где T_{part}^{Tr} – кинетическая энергия поступательного движения:

$$T_{part}^{Tr} = \frac{1}{2} M_{part} \left(\left(\frac{dX_{part}(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dY_{part}(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dZ_{part}(t)}{dt} \right)^2 \right), \quad (2)$$

а $X_{part}(t), Y_{part}(t), Z_{part}(t)$ – определяются из векторов положения центров масс соответствующих частей ($part$) системы: $Pr_{part} = [X_{part}(t), Y_{part}(t), Z_{part}(t)]$; где M_{part} – приведенные массы каждой из механических подвижных частей систем, в нашем случае – «каретка и маятник»; T_{part}^{Rot} – кинетическая энергия вращения:

$$T_{part}^{Rot} = \frac{1}{2} \left(I_{part_x} (\omega_{part_x})^2 + I_{part_y} (\omega_{part_y})^2 + I_{part_z} (\omega_{part_z})^2 \right), \quad (3)$$

где $I_{part_{x,y,z}}$ – инерциальные моменты механических частей системы относительно принципиальных осей координат $\{Xo, Yo, Zo\}$, в нашем случае – «каретка и маятник»; $\omega_{part_{x,y,z}}$ – угловые скорости механических частей системы относительно принципиальных осей координат $\{Xo, Yo, Zo\}$, рассчитанные по методу углов Эйлера; U_{part} – потенциальная энергия механических систем робота, вычисляемая по формуле:

$$U_{part} = M_{part} \cdot g \cdot Z_{part}(t), \quad (4)$$

здесь M_{part} – приведенные массы каждой из механических подвижных частей систем, в нашем случае – каретка и маятник; g – постоянная гравитационная составляющая, $Z_{part}(t)$ – члены векторов положения центров масс Pr_{part} , описанные ранее.

Таким образом, после подстановки лагранжиана в уравнение движения Лагранжа, и принимая во внимание независимость потенциальной энергии от обобщенных скоростей системы, получаем приведенное уравнение движения Лагранжа для каждой из частей системы:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{d\dot{q}_i} T_{part} \right) - \frac{d}{dq_i} T_{part} + \frac{d}{dq_i} U_{part} + \frac{d}{d\dot{q}_i} D_{part} = \tau_i + C_i + \xi_i, \quad (5)$$

где $\frac{d}{d\dot{q}_i} D_{part}$ - сила трения в части системы, τ_i - управляющая сила (вращающие моменты), C_i - приведенные коэффициенты Лагранжа для голономных ограничений при их наличии в системе, ξ_i - случайные внешние/внутренние воздействия действующие в системе.

Представленное уравнение справедливо для всех открытых систем, т.е. имеющих консервативные (внутренние силы – трения, проскальзывание, заедание и т.д) и не консервативные (внешние силы воздействия – управление, внешние помехи и случайные воздействия, и т.д.) силы воздействия. В случае закрытой системы («шарового коня в вакууме») уравнение принимает вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{d\dot{q}_i} T_{part} \right) - \frac{d}{dq_i} T_{part} + \frac{d}{dq_i} U_{part} = 0 \quad (6)$$

При таком распределении дифференцирования по частям системы процесс вывода уравнений возможно систематизировать, запрограммировать, а также избежать возникновения возможных ошибок и/или возможности их быстрого исправления в процессе вывода уравнений.

Одним из наиболее проблематичных в выводе уравнений движения методом Лагранжа представленном выше, являются определение угловых скоростей всех частей системы. Остановимся подробнее на данном изложении на примере некоего объекта, центр масс которого повернут в пространстве вокруг всех трех осей координат (рис. 3).

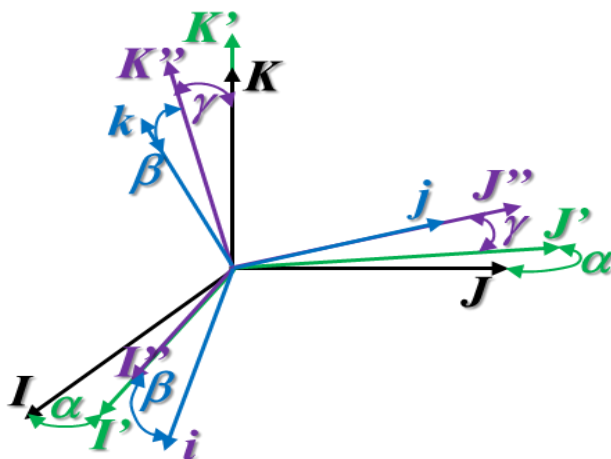


Рис. 3. Геометрическая интерпретация вращения в трехмерном пространстве

Определим положение повернутых базисных векторов $\{i, j, k\}$ по отношению к системе фиксированных базисных векторов $\{I, J, K\}$ (рис. 2):

$$\begin{aligned} i &= \cos(\beta) \cdot I' (= I'') - \sin(\beta) \cdot K' (= K'') \\ j &= \cos(\gamma) \cdot J' + \sin(\gamma) \cdot K' (= K'') \\ k &= \cos(\beta) \cdot K' + \sin(\beta) \cdot I' (= I'') \end{aligned}$$

Уравнение вектора угловой скорости системы записывается как угловая скорость, умноженная на соответствующий ось, вокруг которой происходит вращение, и имеет следующий вид:

$$w = \frac{d}{dt} \alpha \cdot K (= K'') + \frac{d}{dt} \gamma \cdot I' (= I'') + \frac{d}{dt} \beta \cdot j (= J'')$$

Вычислим угловые скорости относительно принципиальных осей координат принимая во внимание, что ортогональные ось при перемножении обнуляются:

$$\begin{aligned}
\varpi_x = w \cdot i &= \frac{d}{dt} \alpha \cdot K (= K') \cdot i + \frac{d}{dt} \gamma \cdot I' (= I'') \cdot i + \frac{d}{dt} \beta \cdot j (= J'') \cdot i = \frac{d}{dt} \alpha \cdot K (= K') \cdot \{\cos(\beta) \cdot I' (= I') - \sin(\beta) \cdot K''\} + \\
&+ \frac{d}{dt} \gamma \cdot I' (= I'') \cdot \{\cos(\beta) \cdot I' (= I') - \sin(\beta) \cdot K''\} + \frac{d}{dt} \beta \cdot j (= J'') \cdot \{\cos(\beta) \cdot I' (= I') - \sin(\beta) \cdot K''\} = \\
&= -\frac{d}{dt} \alpha \cdot K \cdot \sin(\beta) \cdot \{\cos(\gamma) \cdot K' (= K) - \sin(\gamma) \cdot (\cos(\alpha) \cdot J - \sin(\alpha) \cdot I)\} + \frac{d}{dt} \gamma \cdot \cos(\beta) = \\
&= -\frac{d}{dt} \alpha \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\gamma) + \frac{d}{dt} \gamma \cdot \cos(\beta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varpi_y = w \cdot j &= \frac{d}{dt} \alpha \cdot K (= K') \cdot j (= J'') + \frac{d}{dt} \gamma \cdot I' (= I'') \cdot j (= J'') + \frac{d}{dt} \beta \cdot j (= J'') \cdot j (= J'') = \\
&= \frac{d}{dt} \alpha \cdot K (= K') \cdot (\cos(\gamma) \cdot J' + \sin(\gamma) \cdot K' (= K)) + \frac{d}{dt} \beta = \frac{d}{dt} \alpha \cdot \sin(\gamma) + \frac{d}{dt} \beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varpi_z = w \cdot k &= \frac{d}{dt} \alpha \cdot K (= K') \cdot k + \frac{d}{dt} \gamma \cdot I' (= I'') \cdot k + \frac{d}{dt} \beta \cdot j (= J'') \cdot k = \frac{d}{dt} \alpha \cdot K (= K') \cdot \{\cos(\beta) \cdot K'' + \sin(\beta) \cdot I' (= I')\} + \\
&+ \frac{d}{dt} \gamma \cdot I' (= I'') \cdot \{\cos(\beta) \cdot K'' + \sin(\beta) \cdot I' (= I')\} + \frac{d}{dt} \beta \cdot j (= J'') \cdot \{\cos(\beta) \cdot K'' + \sin(\beta) \cdot I' (= I')\} = \\
&= \frac{d}{dt} \alpha \cdot K \cdot \cos(\beta) \cdot \{\cos(\gamma) \cdot K' (= K) - \sin(\gamma) \cdot J'\} + \frac{d}{dt} \gamma \cdot \sin(\beta) = \\
&= \frac{d}{dt} \alpha \cdot K \cdot \cos(\beta) \cdot \{\cos(\gamma) \cdot K' (= K) - \sin(\gamma) \cdot (\cos(\alpha) \cdot J - \sin(\alpha) \cdot I)\} + \frac{d}{dt} \gamma \cdot \sin(\beta) = \\
&= \frac{d}{dt} \alpha \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) + \frac{d}{dt} \gamma \cdot \sin(\beta)
\end{aligned}$$

Пример демонстрирует метод вычисления угловых скоростей в пространстве относительно принципиальных (декартовых) осей координат $\{X, Y, Z\}$. В случае плоского объекта – «каре́тка-маятник», угловые скорости будут записаны следующим образом:

$$\varpi_x = \varpi_y = 0; \varpi_z = \frac{d}{dt} \theta.$$

Перейдем к непосредственному выводу уравнений движения. Для нахождения координат центров масс каждого из элементов по отношению к стационарной системе координат, применяем метод переноса и поворота инерциальных систем координат, подробно описанный в пособиях по классической механике [2].

Матрица преобразования $T0$, получаемая путем параллельного переноса стационарной системе координат $\{X_0, Y_0, Z_0\}$ в инерциальную систему координат объекта, в точку центра масс каретки C_{cm} совпадающую с точкой вращения маятника O :

$$T0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x(t) \\ 0 & 1 & 0 & y(t) = 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Как видно из рис. 1 первое упрощение исключает из системы колеса и обнуляет вертикальную составляющую положения центра масс каретки C_{cm} .

Следующая матрица $R1$ отображает поворот системы координат в точке $C_{cm} = O$ в систему $\{X_{01}, Y_{01}, Z_{01}\}$ на угол $\theta(t)$:

$$R1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & \sin(\theta(t)) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Далее матрица преобразования $T1$, получаемая в результате переноса системы координат $\{X_{0l}, Y_{0l}, Z_{0l}\}$ в систему координат $\{X_l, Y_l, Z_l\}$, вдоль оси Y_{0l} в точку центра масс маятника P_{cm} на расстояние l , имеет вид:

$$T1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица положения центра масс каретки $C_{cm} = O$ определяется как:

$$T_{Ccm} = T0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x(t) \\ 0 & 1 & 0 & y(t)=0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вектор положения центра масс каретки $C_{cm} = O$ определяется перемножением матрицы на нормализующий вектор:

$$Pr_C = T0 \cdot P_{cm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x(t) \\ 0 & 1 & 0 & y(t)=0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Определим матрицу и вектор положения центра масс маятника P_{cm} :

$$T_{Ccm} = T0 \cdot R1 \cdot T1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & \sin(\theta(t)) & 0 & \sin(\theta(t))l + x(t) \\ -\sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 & \cos(\theta(t))l + y(t)(=0) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Pr_p = T0 \cdot R1 \cdot T1 \cdot P_{cm} = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & \sin(\theta(t)) & 0 & \sin(\theta(t))l + x(t) \\ -\sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 & \cos(\theta(t))l + y(t)(=0) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta(t))l + x(t) \\ \cos(\theta(t))l \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Далее определим квадраты скоростей центров масс каретки C_{cm} и маятника P_{cm} для вычисления кинетической энергии поступательного движения T_{part}^{Tr} соответствующих частей – каретки и маятника в соответствии с уравнением (2):

$$\left(\frac{dX_{Cart}(t)}{dt} \right)^2 = \dot{x}^2(t); \quad \left(\frac{dY_{Cart}(t)}{dt} \right)^2 = 0;$$

$$\left(\frac{dX_{Pole}(t)}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\{\sin(\theta(t))l + x(t)\}}{dt}\right)^2 = \dot{\theta}^2(t)\cos(\theta(t))^2l^2 + 2\dot{\theta}(t)\dot{x}(t)\cos(\theta(t))l + \dot{x}^2(t)$$

$$\left(\frac{dY_{Pole}(t)}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\{\cos(\theta(t))l\}}{dt}\right)^2 = \dot{\theta}^2(t)\sin(\theta(t))^2l^2$$

Кинетические энергии поступательного движения T_{part}^{Tr} соответствующих частей вычисляются по формуле (2):

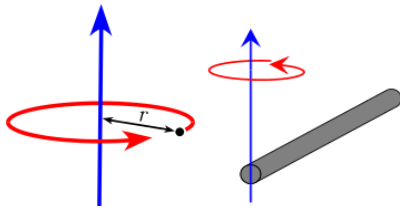
$$T_{Cart}^{Tr} = \frac{1}{2}m_c\dot{x}^2(t),$$

$$T_{Pole}^{Tr} = \frac{1}{2}m_l\{\dot{\theta}^2(t)\cos(\theta(t))^2l^2 + 2\dot{\theta}(t)\dot{x}(t)\cos(\theta(t))l + \dot{x}^2(t) + \dot{\theta}^2(t)\sin(\theta(t))^2l^2\} = \frac{1}{2}m_l(\dot{\theta}^2(t)l^2 + 2\dot{\theta}(t)\dot{x}(t)\cos(\theta(t))l + \dot{x}^2(t))$$

Определим кинетические энергии вращения T_{part}^{Rot} соответствующих частей системы в соответствии с уравнением (3):

$$T_{Cart}^{Rot} = 0, \quad T_{Pole}^{Rot} = \frac{1}{2}I_{P-Z}\dot{\theta}^2(t),$$

где I_{P-Z} момент вращения маятника относительно оси вращения $\{Z\}$ вычисляемый для разных вариантов маятника как [2] (для наглядности рисунок для пояснения расположен рядом с текстом по просьбе слушателей лекций в Международной школе «Аналитика больших данных и наука о данных»):



Точка массой M находится на расстоянии r от оси вращения -

$$I = Mr^2 (*).$$

Тонкий стержень длиной L и массой M , перпендикулярный оси вращения, вращается вокруг одного конца - $I = \frac{1}{3}ML^2 (**)$

Для унификации определим $I_{P-Z} = km_l l^2$ соответственно $T_{Pole}^{Rot} = \frac{1}{2}km_l l^2 \dot{\theta}^2(t)$.

Кинетические энергии соответствующих частей системы имеют вид:

$$T_{Cart} = T_{Cart}^{Tr} + T_{Cart}^{Rot} = \frac{1}{2}m_c\dot{x}^2(t) + 0;$$


$$T_{Pole} = T_{Pole}^{Tr} + T_{Pole}^{Rot} = \frac{1}{2}m_l(\dot{\theta}^2(t)l^2 + 2\dot{\theta}(t)\dot{x}(t)\cos(\theta(t))l + \dot{x}^2(t)) + \frac{1}{2}km_l l^2 \dot{\theta}^2(t)$$

Далее определим потенциальные энергии соответствующих частей системы U_{part} уравнение (4) принимая во внимание, что в плоской системе каретка-маятник, вертикальной осью является $\{Y\}$:

$$U_{Cart} = m_c \cdot g \cdot 0; \quad U_{Pole} = m_l \cdot g \cdot \cos(\theta(t))l$$

Далее, в соответствии с уравнение Лагранжа (6) проведем раздельное дифференцирование и приводим уравнение к виду (1) для всей системы в целом продифференцированной по соответствующим Обобщенным Координатам системы - $q_i, i=1,2$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{d\dot{x}(t)} T_{Cart} \right) - \frac{d}{dx(t)} T_{Cart} + \frac{d}{dx(t)} U_{Cart} &= m_c \ddot{x}(t); \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{d\dot{x}(t)} T_{Pole} \right) - \frac{d}{dx(t)} T_{Pole} + \frac{d}{dx(t)} U_{Pole} &= m_l \ddot{x}(t) + l m_l \left[\ddot{\theta}(t) \cos(\theta(t)) - \dot{\theta}^2(t) \sin(\theta(t)) \right] \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{d\dot{\theta}(t)} T_{Cart} \right) - \frac{d}{d\theta(t)} T_{Cart} + \frac{d}{d\theta(t)} U_{Cart} &= 0; \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{d\dot{\theta}(t)} T_{Pole} \right) - \frac{d}{d\theta(t)} T_{Pole} + \frac{d}{d\theta(t)} U_{Pole} &= l m_l \left[\ddot{x}(t) \cos(\theta(t)) - \dot{\theta}(t) \dot{x}(t) \sin(\theta(t)) + \ddot{\theta}(t)(k+1) \right] + \\
+ l m_l \dot{\theta}(t) \dot{x}(t) \sin(\theta(t)) - g l m_l \sin(\theta(t)) &= l m_l \left[\ddot{x}(t) \cos(\theta(t)) + \ddot{\theta}(t)(k+1) - g \sin(\theta(t)) \right]
\end{aligned}$$



$$\begin{cases} (m_c + m_l) \ddot{x}(t) + l m_l \left[\ddot{\theta}(t) \cos(\theta(t)) - \dot{\theta}^2(t) \sin(\theta(t)) \right] = 0 \\ l m_l \left[\ddot{x}(t) \cos(\theta(t)) + \ddot{\theta}(t)(k+1) - g \sin(\theta(t)) \right] = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Получившаяся в результате система уравнений (7) дополняется внешними и внутренними силами, действующими на систему (5), поэтому сокращение множителей во втором уравнение системы не допустимо т.к. при добавлении сил произойдет не совпадение по размерностям в уравнении.

Таким образом, добавляя внешние и внутренние силы воздействия получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (m_c + m_l)\ddot{x}(t) + lm_l [\ddot{\theta}(t) \cos(\theta(t)) - \dot{\theta}^2(t) \sin(\theta(t))] + \dot{x}(t)C_1 = f(t) + \xi_1(\tau) \\ lm_l [\ddot{x}(t) \cos(\theta(t)) + \ddot{\theta}(t)(k+1) - g \sin(\theta(t))] + \dot{\theta}(t)C_2 = \xi_2(\tau) \end{cases}; \quad (8a.6)$$

где $\dot{x}(t)C_1, \dot{\theta}(t)C_2$ – силы трения в каретке и маятнике возникающие в момент их движения и в зависимости от реализации соединения; $f(t)$ – управляющая сила, зависящая от принятого метода управления; $\xi_1(\tau), \xi_2(\tau)$ – случайные стохастические воздействия на систему с применением системы формирующих фильтров [7].

Далее решим систему уравнений (8) относительно ускорений $\ddot{x}(t)$ и $\ddot{\theta}(t)$ для последующего компьютерного моделирования процесса движения:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \frac{\cos(\theta(t)) [lm_l g \sin(\theta(t)) - \dot{\theta}(t)C_2 + \xi_2(\tau)] - l(k+1) [lm_l \dot{\theta}^2(t) \sin(\theta(t)) - \dot{x}(t)C_1 + f(t) + \xi_1(\tau)]}{l(m_l \cos^2(\theta(t)) - (m_c + m_l)(k+1))} \\ \ddot{\theta}(t) = \frac{lm_l [lm_l \dot{\theta}^2(t) \sin(\theta(t)) - \dot{x}(t)C_1 + f(t) + \xi_1(\tau)] \cos(\theta(t)) - (m_c + m_l) [lm_l g \sin(\theta(t)) - \dot{\theta}(t)C_2 + \xi_2(\tau)]}{m_l l^2 (m_l \cos^2(\theta(t)) - (m_c + m_l)(k+1))} \end{cases} \quad (9)$$

Таким образом определена система уравнений движения объекта представленного на рис. 1а с упрощениями отображенными на рис. 1б.

Упрощения увеличивают неопределенность параметров объекта, однако с этим может справиться интеллектуальная система компенсации редукции параметров описания за счет соответствующих продукционных нечетких логических правил в базе знаний в соответствии с теоремой об универсальном аппроксиматоре как основного свойства нечеткой модели. С другой стороны, неоправданно глубокое усложнение модели может привести к тому, что модель может оказаться избыточной и некорректно параметризована.

Метод Лагранжа позволяет произвести вычисление ММ для любой динамической системы с внешними воздействиями, при этом дает возможность вариации внешних и внутренних сил, а также

голономных и не голономных ограничений [8].

Далее представим другой вариант вывода уравнения движения методом проекции сил основанном на втором законе Ньютона.

Описание ММ методом проекции сил второго закона Ньютона

Для получения ММ в случаях, когда необходимо определить силы реакции (инерции) системы, прибегают к использованию второго закона Ньютона вместо уравнений Лагранжа. Система уравнений движения определяется через проекцию векторов «всех» действующих на объект сил на оси обобщенной системы координат $\{X_0, Y_0, Z_0\}$ – неинерциальную систему, сохраняющих ее состояние в равновесии. Данный подход предполагает применение принципа д’Аламбера к второму закону Ньютона, сводящего проблему динамики к проблеме статики: $F - ma = 0$, т.е. тело находится в равновесии под действием реальной силы F и фиктивной силы $(-ma)$ [9]. Фиктивную силу называют также силой инерции и обратной действующей силой $F + F^* = 0$ где F^* – сила инерции.

На рис. 4 графически представлены силы и реакции сил в системе «каретка-маятник».

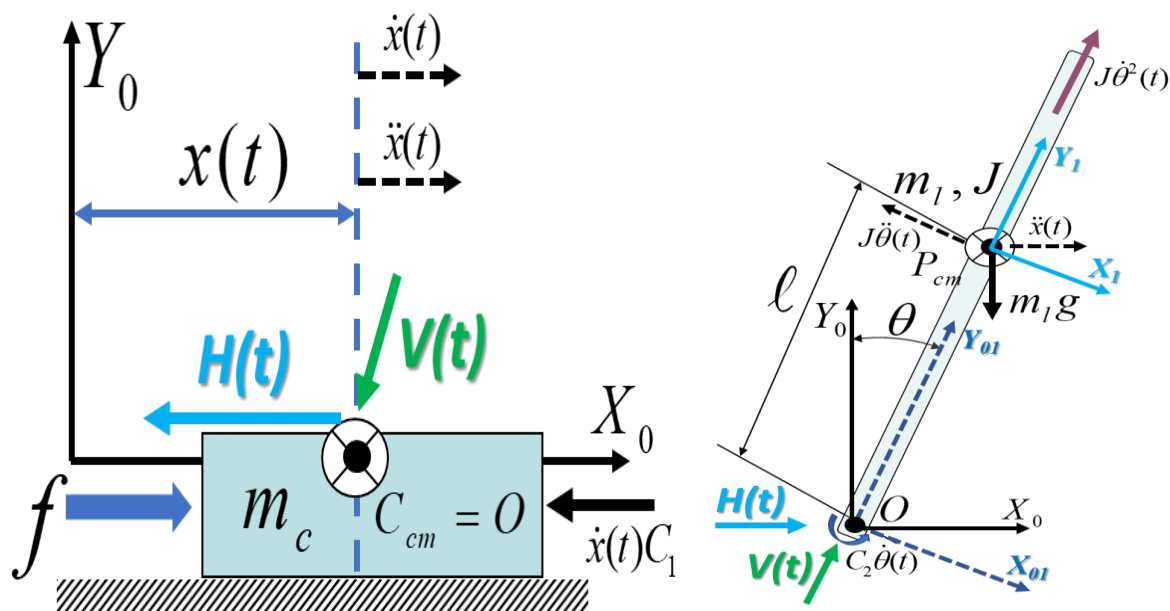


Рис. 4. Физическая Модель Каретка-Маятник для метода проекции сил

На рис. 3 приняты следующие обозначения: $\{X_0, Y_0\}$ – декартова система координат. При условии первого упрощения, т.е. совпадения точки вращения маятника O и точки центра масс каретки C_{cm} , система координат O также является инерциальной по отношению к каретке, при ее параллельном переносе в центр масс; x – горизонтальная координата положения каретки (центра масс) в декартовой системе координат $\{X_0, Y_0\}$. $\dot{x}(t), \ddot{x}(t)$ – линейная скорость и ускорение соответственно; y – вертикальная координата положения каретки (центра масс) в декартовой системе координат $\{X_0, Y_0\}$. В случае упрощения на рис. 1(б) имеем $y = \text{const} = 0$; m_c – масса каретки; C_{cm} – центр масс каретки; O – точка вращения маятника; $\{X_{0l}, Y_{0l}\}$ – инерциальная система координат поворота из плоскости каретки в плоскость маятника в точке O ; l – положение центра масс стержня маятника; m_l – масса стержня маятника; J – момент инерции маятника; P_{cm} – центр масс стержня маятника; $\{X_l, Y_l\}$ – инерциальная система координат маятника; mg – сила тяжести в центре масс маятника; $H(t)$ – горизонтальная и $V(t)$ вертикальная силы реакции у оси маятника; C_1, C_2 – коэффициенты вязкого трения при движении каретки и вращении маятника.

Перейдем к выводу ММ методом проецирования сил воздействия и реакции на основе второго закона Ньютона.

Определим положение точки центра масс маятника P_{cm} по отношению к точке его вращения O выраженное в системе координат $\{X_0, Y_0\}$:

$$x_{P_{cm}|O}(t) = l \sin \theta(t), \quad y_{P_{cm}|O}(t) = l \cos \theta(t); \quad (10a,6)$$

Определим скорости точки P_{cm} по отношению к точке O по отношению к осям XO взяв производную по времени $x_{P_{cm}|O}(t), y_{P_{cm}|O}(t)$.

$$\dot{x}_{P_{cm}|O}(t) = \dot{\theta}(t)l \cos \theta(t), \quad \dot{y}_{P_{cm}|O}(t) = -\dot{\theta}(t)l \sin \theta(t); \quad (11a,6)$$

Далее определим ускорение точки центра масс маятника P_{cm} по отношению к точке его вращения O выраженное в системе координат $\{X_0, Y_0\}$:

$$\ddot{x}_{P_{cm}|O}(t) = l[\ddot{\theta}(t) \cos \theta(t) - \dot{\theta}^2(t) \sin \theta(t)], \quad \ddot{y}_{P_{cm}|O}(t) = -l[\ddot{\theta}(t) \sin \theta(t) + \dot{\theta}^2(t) \cos \theta(t)]; \quad (12a,6)$$

Уравнения (12a,6) описывают ускорение точки центра масс маятника P_{cm} относительно точки O . Поэтому, для абсолютного ускорения точки P_{cm} (то есть ускорение относительно "мировой" системы координат $\{X_0, Y_0\}$) в (12a) добавляется ускорение точки O по оси X_0 . Каретка не движется вертикально, поэтому абсолютное ускорение по оси y задается как $\ddot{y}_{P_{cm}|O}(t)$.

$$\ddot{x}_{P_{cm}}(t) = \ddot{x}(t) + l[\ddot{\theta}(t) \cos \theta(t) - \dot{\theta}^2(t) \sin \theta(t)], \quad \ddot{y}_{P_{cm}}(t) = -l[\ddot{\theta}(t) \sin \theta(t) + \dot{\theta}^2(t) \cos \theta(t)]; \quad (13a,6)$$

Далее применяем принцип д'Аламбера определим силы инерции F^i с направлением противоположным направлению ускорения (силы сопротивления маятника в точке P_{cm} ускорению по осям $\{X_0, Y_0\}$), для чего умножим уравнения (13a,6) на массу маятника m_l .

$$\begin{aligned} (F_{P_{cm}}^i)_x &= -m_l \ddot{x}_{P_{cm}}(t) = -m_l [\ddot{x}(t) + l[\ddot{\theta}(t) \cos \theta(t) - \dot{\theta}^2(t) \sin \theta(t)]], \\ (F_{P_{cm}}^i)_y &= -m_l \ddot{y}_{P_{cm}}(t) = m_l l[\ddot{\theta}(t) \sin \theta(t) + \dot{\theta}^2(t) \cos \theta(t)]; \end{aligned} \quad (14a,6)$$

Определим силы, действующие на каретку. Внешними силами, действующими на каретку, являются - горизонтальная сила управления f , сила, передаваемая стержнем маятника в точке O , возникающая в результате инерционного сопротивления массы маятника в точке P_{cm} , а также сила тяжести mg , действующая на эту же массу. Кроме того, существует собственное инерционное сопротивление тележки, то есть сопротивление тележки ускорению.

Принимая во внимание, что тележка не движется вертикально, анализ ограничивается горизонтальными проекциями сил, действующими на тележку - сила f , горизонтальная составляющая силы инерции маятника (см. (14a)) и сила инерции тележки. Суммируя эти силы и приравнявая их к нулю в соответствии с принципом д'Аламбера, получаем:

$$\begin{aligned} f(t) - m_l \ddot{x}(t) + (F_{P_{cm}}^i)_x &= 0 \Rightarrow f(t) - m_c \ddot{x}(t) - m_l [\ddot{x}(t) + l[\ddot{\theta}(t) \cos \theta(t) - \dot{\theta}^2(t) \sin \theta(t)]] = 0 \Rightarrow \\ f(t) &= m_c \ddot{x}(t) + m_l [\ddot{x}(t) + l[\ddot{\theta}(t) \cos \theta(t) - \dot{\theta}^2(t) \sin \theta(t)]] \Rightarrow \\ (m_c + m_l) \ddot{x}(t) + l m_l [\ddot{\theta}(t) \cos(\theta(t)) - \dot{\theta}^2(t) \sin(\theta(t))] &= f(t) \end{aligned} \quad (15)$$

Отметим, что $m_c \ddot{x}(t)$ - термин представляет собой силу инерции, возникающую в результате ускорения тележки; эта сила приложена в направлении, противоположном ускорению тележки, т.е. положительное ускорение приводит к отрицательной силе инерции. Как видно уравнение (15) совпадает с уравнением (8a) до введение дополнительных сил, действующих на каретку.

Определим моменты сил вращения или крутящие моменты действующие на маятник. В системе 3 силы влекут за собой вращающий момент, действующий на маятник, это -

- (I) сила тяжести mg , действующая на маятник в точке P_{cm} ;
- (II) сила инерции, возникающая от сопротивления массы маятника в P_{cm} , в момент движения каретки влево или вправо под маятником;
- (III) инерциальная сила вращательная или момент инерции [10].

Три результирующих момента должны находиться в равновесии в соответствии с принципом

д'Аламбера, что дает дополнительное уравнение движения для модели «каретка-маятник».

Инерционная сила в точке P_{cm} описывается уравнениями $F_{P_{cm}}^i$, как это определено в уравнениях (14а,б). Векторное произведение [11] единичного радиального вектора $l_{Y01}(l)$ и сил $F_{P_{cm}}^i$ представляет вектор направленный вдоль оси вращения маятника $\{Z_{01}=Z_0\}$, а величина и знак этого результирующего вектора представляет значение (величину и знак) крутящего момента силы [12] в точке поворота O , возникающего в результате действия силы $F_{P_{cm}}^i$. Учитывая, что ось вращения неподвижна и параллельна оси $\{Z_{01}=Z_0\}$, величина и знак результирующего вектора задаются только его Z компонентом следующим образом:

$$\begin{aligned} l_{Y01}(l) &= [l \sin \theta(t), l \cos \theta(t), 0], \\ F_{P_{cm}}^i &= \left[-m_l \left[\ddot{x}(t) + l[\ddot{\theta}(t) \cos \theta(t) - \dot{\theta}^2(t) \sin \theta(t)] \right], m_l l [\ddot{\theta}(t) \sin \theta(t) + \dot{\theta}^2(t) \cos \theta(t)], 0 \right]; \\ M_{P_{cm}} &= \left[l_{Y01}(l) \times F_{P_{cm}}^i \right]_Z = [0 \cdot m_l l [\ddot{\theta}(t) \sin \theta(t) + \dot{\theta}^2(t) \cos \theta(t)] - l \cos \theta(t) \cdot 0, l \sin \theta(t) \cdot 0 - \\ &- 0 \cdot (-m_l [\ddot{x}(t) + l[\ddot{\theta}(t) \cos \theta(t) - \dot{\theta}^2(t) \sin \theta(t)]]), l \sin \theta(t) \cdot m_l l [\ddot{\theta}(t) \sin \theta(t) + \dot{\theta}^2(t) \cos \theta(t)] - \\ &- l \cos \theta(t) \cdot (-m_l [\ddot{x}(t) + l[\ddot{\theta}(t) \cos \theta(t) - \dot{\theta}^2(t) \sin \theta(t)]])] = \\ &= [0, 0, m_l l (\sin \theta(t) \cdot l [\ddot{\theta}(t) \sin \theta(t) + \dot{\theta}^2(t) \cos \theta(t)] + \cos \theta(t) \cdot [\ddot{x}(t) + l[\ddot{\theta}(t) \cos \theta(t) - \dot{\theta}^2(t) \sin \theta(t)]])] = \\ &= m_l l (l \ddot{\theta}(t) + \ddot{x}(t) \cos \theta(t)) \end{aligned} \quad (16)$$

Одним из условий правильного решения данного уравнения является правильный порядок операндов уравнения, т.к. операция векторного перемножения является коммутативной [9,12].

Определим крутящий момент силы, возникающий в результате воздействия силы тяжести mg на маятник в точке P_{cm} :

$$M_g = -m_l g l \sin(\theta(t)) \quad (17)$$

Состояние не устойчивого равновесия возникает при абсолютно вертикальном положении маятника ($\theta(t) = 0$).

Момент инерции [13] маятника:

$$M_i = J \ddot{\theta}(t) = k m_l l^2 \ddot{\theta}(t) \quad (18)$$

Суммируя три момента сил $M_{P_{cm}}, M_g, M_i$ (ур. (16-18)) и приравнявая их к нулю по принципу д'Аламбера, получаем:

$$\begin{aligned} M_{P_{cm}} + M_g + M_i &= 0 \Rightarrow m_l l (l \ddot{\theta}(t) + \ddot{x}(t) \cos \theta(t)) - m_l g l \sin(\theta(t)) + k m_l l^2 \ddot{\theta}(t) = 0 \Rightarrow \\ l m_l [\ddot{x}(t) \cos(\theta(t)) + \ddot{\theta}(t)(k+1) - g \sin(\theta(t))] &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Как видно уравнение (19) совпадает с уравнением (8б) до введение дополнительных сил, действующих на маятник.

Далее, как и в предыдущем параграфе в уравнения вводятся внешние и внутренние силы воздействующие на систему – силы трения, стохастические воздействия и т.д. получаем (8а,б). Как и в предыдущем параграфе, решим систему уравнений (8) относительно ускорений $\ddot{x}(t)$ и $\ddot{\theta}(t)$ приняв во внимание момент инерции для стержня длиной $L=2l$ (см. (**)) $I_l = \frac{1}{3} m_l (2l)^2 = k m_l l^2$ где $k=4/3$.

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \frac{\cos(\theta(t)) [lm_l g \sin(\theta(t)) - \dot{\theta}(t)C_2 + \xi_2(\tau)] - l(7/3) [lm_l \dot{\theta}^2(t) \sin(\theta(t)) - \dot{x}(t)C_1 + f(t) + \xi_1(\tau)]}{l(m_l \cos^2(\theta(t)) - (m_c + m_l)(7/3))} \\ \ddot{\theta}(t) = \frac{lm_l [lm_l \dot{\theta}^2(t) \sin(\theta(t)) - \dot{x}(t)C_1 + f(t) + \xi_1(\tau)] \cos(\theta(t)) - (m_c + m_l) [lm_l g \sin(\theta(t)) - \dot{\theta}(t)C_2 + \xi_2(\tau)]}{m_l l^2 (m_l \cos^2(\theta(t)) - (m_c + m_l)(7/3))} \end{cases} \quad (20)$$

Выведенные уравнения уже имеют упрощения физической модели, как это представлено на рис. 1, но для убедительности и в дополнение к представленному выводу, покажем еще один вариант вывода уравнений движения системы каретка-маятник, в котором будут приняты дополнительные упрощения ММ в виде небольшой аппроксимации. Более того, полученная аппроксимированная модель используется системой интеллектуального управления для обучения БЗ и в дальнейшем применяется на реальном объекте, представленном на рис. 5.

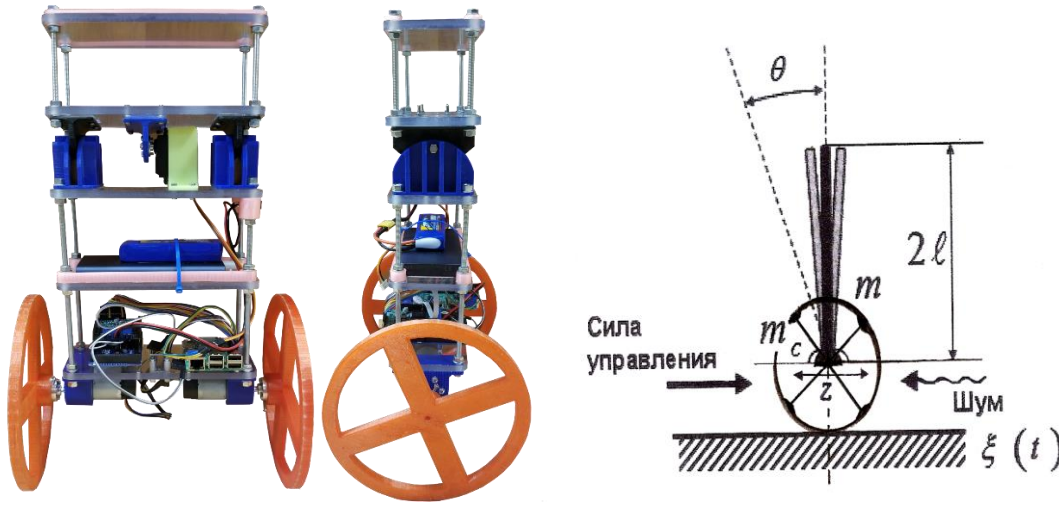


Рис. 5. Робот перевернутый маятник и его Физическое описание

Несмотря на все упрощения система интеллектуального управления компенсирует не доопределённые параметры и успешно справляется с задачей управления даже при внешних воздействиях [14].

Описание ММ методом проекции сил второго закона Ньютона в матричной форме с аппроксимацией

Далее кратко представим вывод уравнения ММ системы каретка-маятник в матричной форме. Для начала представим матрицу поворота координат $\{X_0, Y_0\}$ в $\{x, y\}$ и ее дифференцирование по времени, согласно рис. 5:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{B}} = \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \frac{d\theta}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B} \dot{\theta} = \mathbf{B}_\downarrow \dot{\theta}$$

Система базовых уравнений движения системы в соответствии с рис. 5 имеет вид:

$$\begin{cases} m_c \ddot{\mathbf{O}}_G = \mathbf{F}_e - \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_R \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} m_l \ddot{\mathbf{r}}_G^1 = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_g \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} I \ddot{\theta} + C \dot{\theta} = \mathbf{B} \mathbf{r}_L^1 \times \mathbf{F}_i \end{cases} \quad (23)$$

где C – коэффициент вязкого трения вращения маятника, а остальные члены уравнения описаны далее.

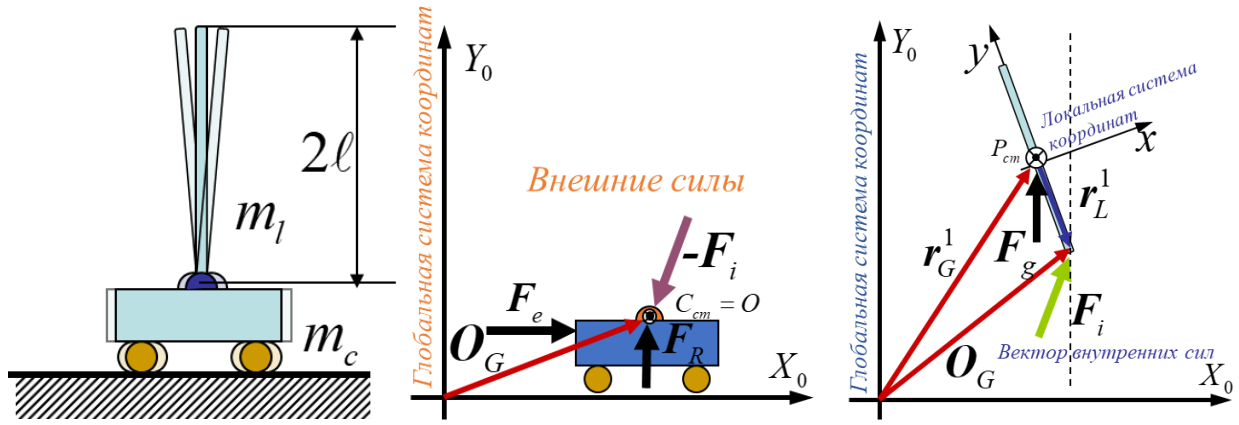


Рис. 6. Физическая Модель Каретка-Маятник для метода проекции сил в векторной форме с аппроксимацией

На рис. 6 приняты следующие обозначения: $\{X_0, Y_0\}$ – декартова-глобальная система координат, связанная с кареткой; $\{x, y\}$ – локальная система координат, связанная с маятником; C_{cm} – центр масс каретки; O – точка вращения маятника; P_{cm} – центр масс стержня маятника; m_c – масса каретки; m_l – масса стержня маятника; l – положение центра масс стержня маятника, а $2l$ его полная длина; O_G – вектор положения центра масс каретки C_{cm} и точки вращения маятника O в глобальной системе координат $\{X_0, Y_0\}$, как на рис. 4. Условие первого упрощения физической модели – совпадения точки вращения маятника O и точки центра масс каретки C_{cm} , система координат O также является инерциальной по отношению к каретке, при ее параллельном переносе в центр масс, т.е. вертикальное смещение $y = \text{const} = 0$; r_G^1 – вектор положения центра масс маятника P_{cm} в глобальной системе координат $\{X_0, Y_0\}$; r_L^1 – вектор положения центра масс маятника P_{cm} в локальной системе координат $\{x, y\}$; F_e, F_i, F_R, F_g – вектора проекции сил, действующих на систему «каровка-маятник».

Определяем производные по времени вектора положения центра масс маятника r_G^1 :

$$r_G^1 = O_G - B r_L^1 \quad (24)$$

$$\dot{r}_G^1 = \dot{O}_G - B_{\downarrow} \dot{\theta} r_L^1 \quad (25)$$

$$\ddot{r}_G^1 = \ddot{O}_G - (B_{\downarrow} \ddot{\theta} - B \dot{\theta}^2) r_L^1 \quad (26)$$

Из уравнений (22) и (26) следует следующее выражение:

$$F_i = m_l \ddot{r}_G^1 - F_g = m_l \left\{ \ddot{O}_G - (B_{\downarrow} \ddot{\theta} - B \dot{\theta}^2) r_L^1 \right\} - F_g \quad (27)$$

Из уравнений (23) и (27) следует следующее выражение, где \times означает векторное произведение:

$$I \ddot{\theta} + C \dot{\theta} = B r_L^1 \times \left[m_l \left\{ \ddot{O}_G - (B_{\downarrow} \ddot{\theta} - B \dot{\theta}^2) r_L^1 \right\} - F_g \right] \quad (28)$$

Из уравнений (21) и (27) определяем следующее выражение:

$$m_c \ddot{O}_G = F_e - m_l \left\{ \ddot{O}_G - (B_{\downarrow} \ddot{\theta} - B \dot{\theta}^2) r_L^1 \right\} + F_g + F_R = F_e - m_l \ddot{O}_G + m_l (B_{\downarrow} \ddot{\theta} - B \dot{\theta}^2) r_L^1 + F_g + F_R \quad (29)$$

Откуда определим следующее выражение:

$$\ddot{O}_G = \frac{F_e + m_l (B_{\downarrow} \ddot{\theta} - B \dot{\theta}^2) r_L^1 + F_g + F_R}{m_c + m_l} \quad (30)$$

Определим далее вектора в уравнение (30) в глобальной и локальной системах координат соответственно:

в глобальной системе координат $\{X_0, Y_0\}$ -

$$\ddot{O}_G = \begin{Bmatrix} \ddot{X}_c \\ 0 \end{Bmatrix}; F_e = \begin{Bmatrix} u \\ -m_c g \end{Bmatrix}; F_g = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_l g \end{Bmatrix}; F_R = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_R \end{Bmatrix}$$

здесь f_R условия ограничений при движении каретки по направляющим (рельсам) определяемая как:

$$f_R = (m_c + m_l)g - m_l \ell (\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta), \text{ и соответственно}$$

$$\therefore \mathbf{F}_R = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ (m_c + m_l)g - m_l \ell (\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) \end{Bmatrix}$$

реакция силы, действующая на каретку со стороны направляющих;

$$\text{в локальной системе координат } \{x, y\} - \mathbf{r}_L^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\ell \end{Bmatrix}.$$

Далее определим выражение для \ddot{X}_c из уравнения (30) для этого определим следующее выражение:

$$\begin{aligned} m_l (\mathbf{B}_l \ddot{\theta} - \mathbf{B} \dot{\theta}^2) \mathbf{r}_L^1 &= \\ &= m_l \left(\begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \ddot{\theta} - \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \dot{\theta}^2 \right) \begin{Bmatrix} 0 \\ -\ell \end{Bmatrix} = m_l \begin{bmatrix} -\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta & -\ddot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta & -\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\ell \end{Bmatrix} = \\ &= -m_l \ell \begin{Bmatrix} -\ddot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ -\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Подстановкой в уравнение (30) данного выражения получаем следующее уравнение с ограничениями в общей форме:

$$\ddot{\mathbf{O}}_G = \frac{1}{m_c + m_l} \left\{ \begin{pmatrix} u \\ -m_c g \end{pmatrix} + m_l \ell \begin{pmatrix} -\dot{\theta}^2 \sin \theta + \ddot{\theta} \cos \theta \\ \dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m_l g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_R \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \ddot{X}_c \\ 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

Из уравнения (31) определим выражение для ускорения \ddot{X}_c с ограничениями имеет вид:

$$\ddot{X}_c = \frac{1}{m_c + m_l} \left[u + m_l \ell (-\dot{\theta}^2 \sin \theta + \ddot{\theta} \cos \theta) \right] \quad (32)$$

Далее определим выражение для $\ddot{\theta}$ из уравнения (28):

$$\begin{aligned}
I\ddot{\theta} + C\dot{\theta} &= \mathbf{B}\mathbf{r}_L^1 \times \left[m_l \left\{ \ddot{\mathbf{O}}_G - (\mathbf{B}_\downarrow \ddot{\theta} - \mathbf{B}\dot{\theta}^2) \mathbf{r}_L^1 \right\} - \mathbf{F}_g \right] \\
&= \begin{Bmatrix} \ell \sin \theta \\ -\ell \cos \theta \end{Bmatrix} \times \left[m_l \left\{ \frac{\mathbf{F}_e + m_l (\mathbf{B}_\downarrow \ddot{\theta} - \mathbf{B}\dot{\theta}^2) \mathbf{r}_L^1 + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_R}{m_c + m_l} - \frac{(m_c + m_l)(\mathbf{B}_\downarrow \ddot{\theta} - \mathbf{B}\dot{\theta}^2) \mathbf{r}_L^1}{m_c + m_l} \right\} - \mathbf{F}_g \right] \\
&= \begin{Bmatrix} \ell \sin \theta \\ -\ell \cos \theta \end{Bmatrix} \times \left[\frac{m_l}{m_c + m_l} \left\{ \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_R - m_c (\mathbf{B}_\downarrow \ddot{\theta} - \mathbf{B}\dot{\theta}^2) \mathbf{r}_L^1 \right\} - \mathbf{F}_g \right] \\
&= \begin{Bmatrix} \ell \sin \theta \\ -\ell \cos \theta \end{Bmatrix} \times \left[\frac{m_l}{m_c + m_l} \left\{ \begin{pmatrix} u \\ -m_c g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m_l g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ (m_c + m_l)g - m_l \ell (\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) \end{pmatrix} + m_c \ell \begin{pmatrix} -\ddot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ -\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta \end{pmatrix} \right\} - \begin{pmatrix} 0 \\ -m_l g \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{Bmatrix} \ell \sin \theta \\ -\ell \cos \theta \end{Bmatrix} \times \left[\frac{m_l}{m_c + m_l} \left\{ \begin{pmatrix} u + m_c \ell (-\ddot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta}^2 \sin \theta) \\ -m_c g - m_l g + (m_c + m_l)g - m_l \ell (\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) - m_c \ell (\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) \end{pmatrix} \right\} - \begin{pmatrix} 0 \\ -m_l g \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{Bmatrix} \ell \sin \theta \\ -\ell \cos \theta \end{Bmatrix} \times \left[\frac{m_l}{m_c + m_l} \left\{ \begin{pmatrix} u - m_c \ell (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \\ -\ell (\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta)(m_c + m_l) \end{pmatrix} \right\} - \begin{pmatrix} 0 \\ -m_l g \end{pmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} \ell \sin \theta \\ -\ell \cos \theta \end{Bmatrix} \times \left\{ \begin{pmatrix} \frac{m_l}{m_c + m_l} (u - m_c \ell (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta)) \\ \frac{-m_l \ell}{m_c + m_l} (\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta)(m_c + m_l) + m_l g \end{pmatrix} \right\} \\
&= \ell \sin \theta \left[\frac{-m_l \ell}{m_c + m_l} (\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta)(m_c + m_l) + m_l g \right] + \frac{m_l \ell}{m_c + m_l} \cos \theta (u - m_c \ell (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta)) \\
&= -m_l \ell^2 \sin \theta (\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) + m_l g \ell \sin \theta + \frac{m_l \ell u}{m_c + m_l} \cos \theta - \frac{m_l m_c \ell^2}{m_c + m_l} \cos \theta (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \\
&= -m_l \ell^2 \left(1 - \frac{m_l}{m_c + m_l} \cos^2 \theta \right) \ddot{\theta} - m_l \ell^2 \frac{m_l}{m_c + m_l} \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta + m_l g \ell \sin \theta + \frac{m_l \ell u}{m_c + m_l} \cos \theta
\end{aligned}$$

Соответственно из уравнения (30) получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
I\ddot{\theta} + C\dot{\theta} &= \mathbf{B}\mathbf{r}_L^1 \times \left[m_l \left\{ \ddot{\mathbf{O}}_G - (\mathbf{B}_\downarrow \ddot{\theta} - \mathbf{B}\dot{\theta}^2) \mathbf{r}_L^1 \right\} + \mathbf{F}_g \right] = \\
&= -m_l \ell^2 \left(1 - \frac{m_l}{m_c + m_l} \cos^2 \theta \right) \ddot{\theta} - m_l \ell^2 \frac{m_l}{m_c + m_l} \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta + m_l g \ell \sin \theta + \frac{m_l \ell u}{m_c + m_l} \cos \theta \\
&\therefore
\end{aligned}$$

$$m_l \ell^2 \left\{ \frac{4}{3} - \frac{m_l}{m_c + m_l} \cos^2 \theta \right\} \ddot{\theta} = m_l \ell \left(-\ell \frac{m_l}{m_c + m_l} \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta + g \sin \theta + \frac{u}{m_c + m_l} \cos \theta \right) - C\dot{\theta}$$

Выражение для определения ускорения $\ddot{\theta}$ с ограничениями имеет вид:

$$\ddot{\theta} = \frac{g \sin \theta + \frac{\cos \theta}{m_c + m_l} (u - m_l \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta) - \frac{C}{m_l \ell} \dot{\theta}}{\ell \left(\frac{4}{3} - \frac{m_l}{m_c + m_l} \cos^2 \theta \right)} \quad (33)$$

В выражениях (32) и (33) u – управляющая сила.

В полученных уравнениях были приняты соответствующие ограничения, приближения и аппроксимация момента инерции, но несмотря на различия с уравнениями в предыдущих разделах, система управления справляется с задачей обучения БЗ интеллектуального управления.

Как можем видеть, метод проекции сил более трудоемок и зависит от вариантов рассмотрения проекций сил, направлений вращения и движения. Запрограммировать данный метод в системе математического ПО практически невозможно, а сам метод имеет ограничения в применимости, а

именно, метод проекции применим к динамическим системам, имеющим устойчивое или не устойчивое положение равновесия, к которому стремится система. В случае, когда динамическая система глобально не устойчива и имеет ограничения (голономные и не голономные), применение метода не дает полного описания системы и ограничивает возможность обучения ее системы управления т.к. при неполноте ММ будет крайне затруднительно определить качественные параметры ее движения и управления – производство энтропии [15-20]. К подобного рода системам с глобально неустойчивым положением относятся – одноколенный робот, коптер, аэроплан и т.д., вычисление таких систем необходимо проводить с применением метода Лагранжа.

Процесс вывода уравнений методом Лагранжа удобно представить в системе математического ПО – *Maple*, которое позволяет проводить все этапы вывода уравнений без особых трудностей, а возможные ошибки, возникающие при больших объемах математических операции, могут быть быстро исправлены во всем процессе вычисления.

В заключении вывода уравнений движения системы «каретка-маятник» отметим, что физическая модель и ее математическое описание должно соответствовать сложности решаемой задачи. В случае системы «каретка-маятник», упрощения оправданы до определенной степени, пока неопределённость параметров компенсируется интеллектуальностью системы управления. С другой стороны, усложнение модели необходимо в случае ее непосредственной зависимости от вводимых дополнительных параметров. Так например, в случае если каретка будет передвигаться и управляться посредством колесного привода, как представлено на рис. 1(а), то в систему возможно ввести описание колес, а так же возможные внешние воздействия, трение, их проскальзывание и т.д. Но развивая усложнение модели можно достичь молекулярных основ взаимодействия колеса и поверхности, что приведет к не возможности получения ММ в целом.

На примере коптера – ММ выведенная методом проекции сил не дает полной картины поведения столь сложного, глобально неустойчивого объекта, а следовательно, модель должна быть дополнена необходимыми компонентами – инерция и положение в пространстве роторов и пропеллеров, положение центра масс объекта, внешние воздействия и т.д., а также выведена методом Лагранжа, описанным ранее. Только при этих добавлениях можно получить необходимое и достаточное математическое описание, способное представлять состояние объекта управления в системе обучения интеллектуального управления (рис. 1).

Численное интегрирование ММ: схема компьютерного моделирования каретка-маятник в системе Matlab/Simulink

Полученные в первой части уравнения движения удобно моделировать в системе *Matlab/Simulink* применяя широко известные методы – Эйлера, Рунге-Кутта, Адамса. Как показывает практика метод Рунге-Кутта с точностью 4-го порядка интегрирования достаточна для проведения компьютерного моделирования [21].

Далее представим схему моделирования ММ в *Matlab/Simulink* с исключением алгебраических петель [14] на рис. 7. Здесь мы не станем подробно излагать все параметры модели в ПО *Matlab*, основной задаче здесь является представление ММ в системе моделирования.

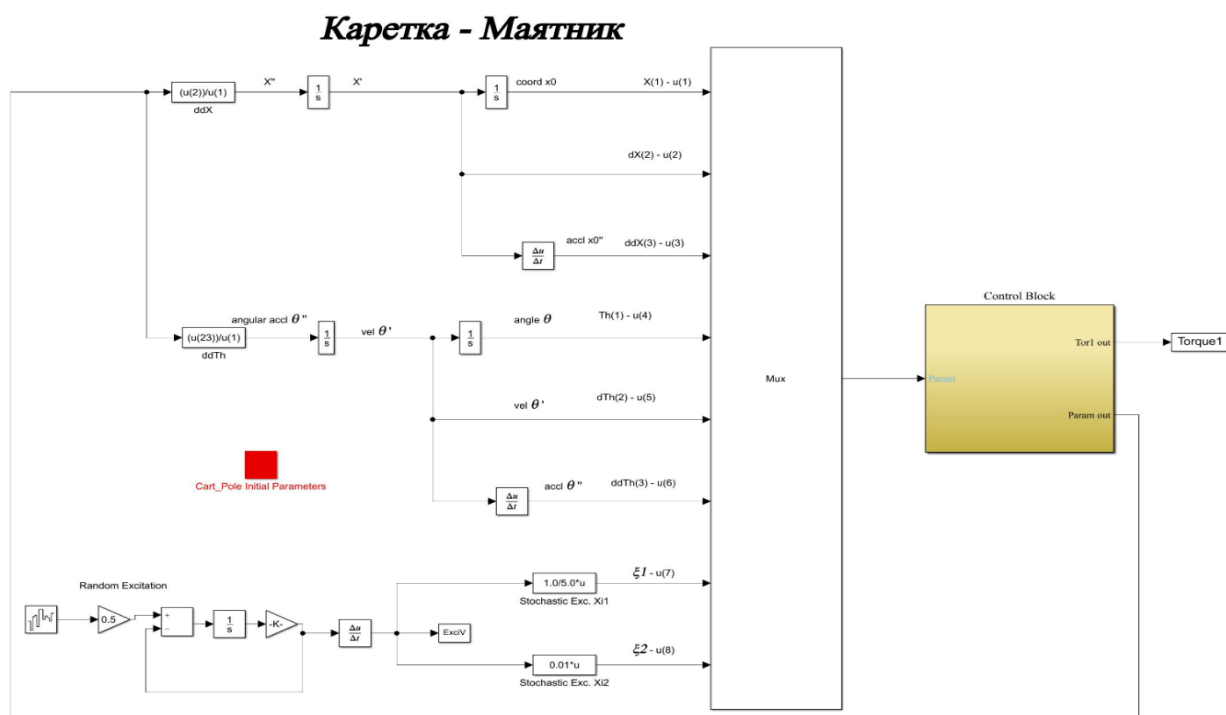


Рис. 7. Компьютерная модель «каретка-маятник» в Matlab/Simulink

Для представления уравнений движения (20) в системе *Matlab/Simulink* выводы необходимые преобразования, записывающиеся в следующем виде, согласно рис. 2:

$$ddX := ((mP * g * \sin(u(4)) * 1 - C2 * u(5) + u(8)) * \cos(u(4)) - l * (7/3) * (\sin(u(4)) * u(5)^2 * 1 * mP - C1 * u(2) + u(7) + u(9))) / (l * (\cos(u(4))^2 * mP - (Mc + mP) * (7/3)));$$

$$ddTh := (l * mP * (\sin(u(4)) * u(5)^2 * 1 * mP - C1 * u(2) + u(7) + u(9)) * \cos(u(4)) - (Mc + mP) * (mP * g * \sin(u(4)) * 1 - C2 * u(5) + u(8))) / (mP * l^2 * (\cos(u(4))^2 * mP - (Mc + mP) * (7/3)));$$

Далее, данные выражения вставляются в соответствующие блоки *ddX* и *ddTh* в рис. 2.

Выбрав соответствующий метод интегрирования, его параметры – шаг, время, создав файл параметров (*Cart-Pole Initial Parameters* блок), а также, обозначив начальные состояния системы - $\{x(0), \dot{x}(0), \ddot{x}(0); \theta(0), \dot{\theta}(0), \ddot{\theta}(0)\}$ в соответствующих блоках интеграторов – $1/s$, задав систему управления в блоке управления – *Control Block*, можно начать процесс компьютерного моделирования.

Ограничения движения механической системы - голономные и неголономные связи

В предыдущих частях приведен простой пример, не сложный с точки зрения моделирования, лабораторной механической системы Каретка-Маятник, однако объекты, применяемые в реальном мире, имеют огромное количество ограничений, а некоторые из них представим ниже.

Одним из немаловажных ограничений системы в динамике объекта являются разнообразные ограничения его движения. В физике твердого тела ограничения разделяют на интегрируемые и неинтегрируемые, или другими словами – голономные и неголономные, а их определения и объяснения можно найти в литературе по механике или в интернете [22-24]. Здесь мы не будем углубляться в теоретические основы, а заострим внимание на реализации этих ограничений в системе уравнений движения объекта управления для правильного представления компьютерного моделирования.

В представленной выше модели «каретка-маятник», ограничения, имеющие место в физическом объекте (в системе присутствуют оба вида ограничений), были исключены из вывода уравнений ввиду плоскостного представления системы, т.е. упрощения. Поэтому, ввиду отсутствия

ограничений в ранее представленной модели «каретка-маятник», в качестве примера, характеризующего голономные и неголономные ограничения, выберем модель Одноколенного робота велосипеда, имеющую оба вида ограничений, показанная на рис. 8 и подробно описанного в диссертационной работе [5].

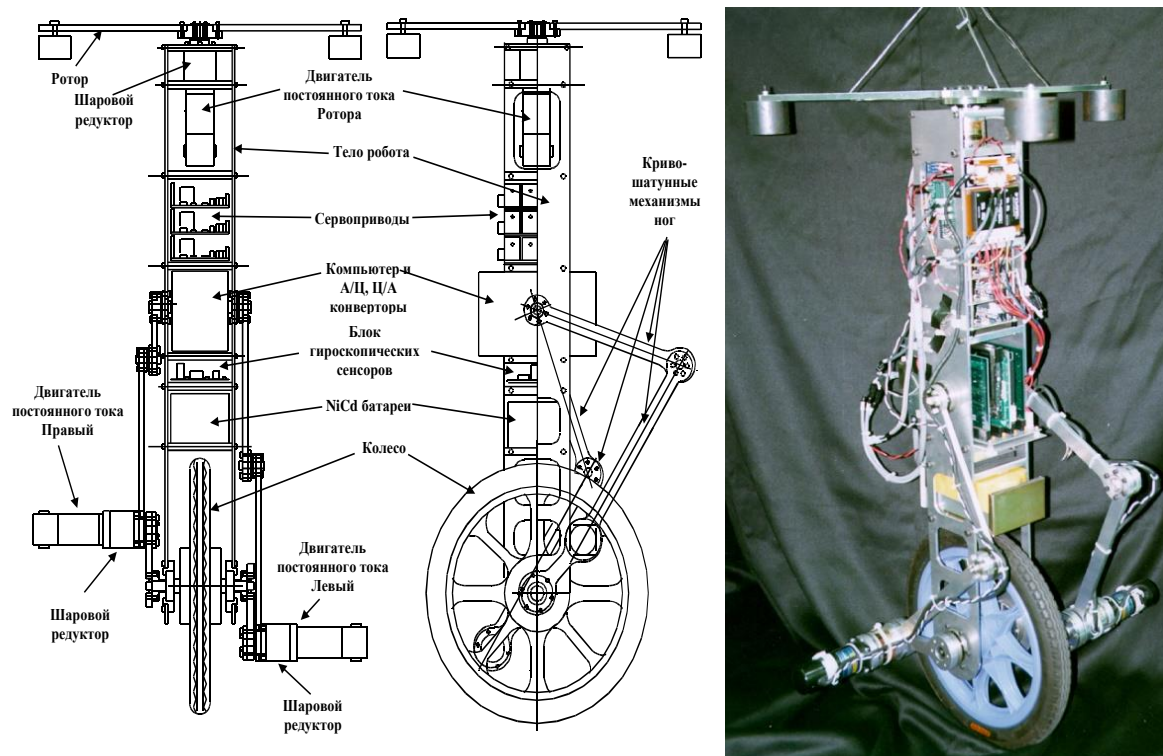


Рис. 8. Физическая Модель Одноколенного робота велосипеда

В начале остановимся на неголономных ограничениях движения Одноколенного робота велосипеда [25]. Для описания физического процесса движения робота на плоскости, применяются неинтегрируемые (неголономные) уравнения ограничений, описывающие процесс поступательного движения системы в зависимости от скорости движения (скорости вращения колеса) и от условий взаимодействия между колесом и поверхностью, по которой движется объект. Данные уравнения неголономных ограничений описывают скорость точки контакта колеса $O[x_0, y_0]$ с поверхностью движения по отношению к стационарной системе координат $\{X, Y, Z\}$ (рис. 9).

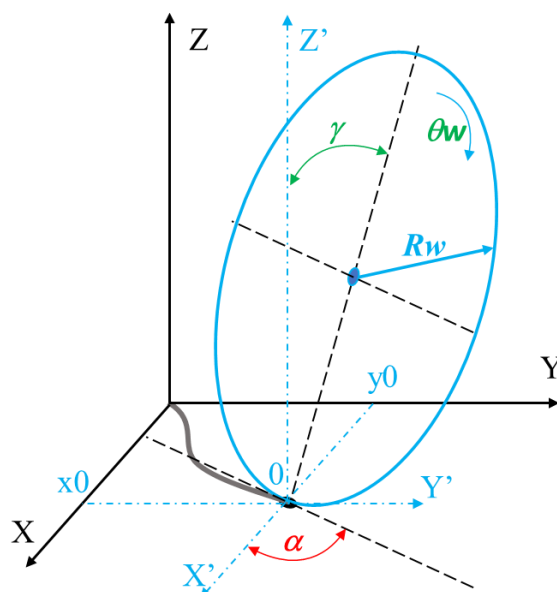


Рис. 9. Модель неголономных ограничений движения колеса (диска)

Уравнения физических неголономных ограничений движения одноколесного робота-велосипеда, в случае не проскальзывания между колесом и поверхностью движения, имеют вид:

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = R_w \cdot \frac{d\theta_w(t)}{dt} \cdot \cos(\alpha(t)); \quad \frac{dy_0(t)}{dt} = R_w \cdot \frac{d\theta_w(t)}{dt} \cdot \sin(\alpha(t));$$

где R_w – радиус колеса, $\dot{\theta}_w(t)$ – скорость вращения колеса, $\alpha(t)$ – угол рыскания.

Далее выражение скоростей координат x_0 , y_0 в кинетической части уравнения Лагранжа заменяются на уравнения неголономных ограничений. Таким образом, после преобразований система базовых координат робота $q_i(t) = [x_0, y_0, \alpha, \gamma, \beta, \theta_w, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \eta]$ преобразуется в систему обобщенных координат уравнения движения одноколесного робота-велосипеда: $q_j(t) = [\alpha, \gamma, \beta, \theta_w, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \eta]$ см. [5].

Отметим тот факт, что в данной системе так же сделаны упрощения, а именно – в системе отсутствует проскальзывание колеса на поверхности движения и изменение положения точки контакта 0 $[x_0, y_0, z_0=0]$ по координате Z – абсолютно гладкий пол. Данные лабораторные условия были изменены в последствии для модели 4-х колесного автомобиля, привнеся усложнения, а также дополнительные функции случайных внешних воздействий [6].

Также интересен теоретический анализ неголономных систем в общем виде, изложенный в работе [3], в нем, однако не рассматривается практическое применение на реальном объекте и в реальной задаче.

Перейдём к следующему виду ограничений – голономным, т.е. геометрическим ограничениям на положения тел системы. В Одноколесном роботе велосипеде такие ограничения присутствуют в трехзвенной замкнутой шатунно-кривошипной системы "ног" (рис. 8).

Далее приведем матанализ данной системы для определения C_i – приведенных коэффициентов Лагранжа для голономных ограничений в системе уравнений движения (5).

Анализ голономной части системы происходит в несколько этапов:

- 1 Виртуально размыкаем звенья 1-3 и 2-4, как показано на рис. 10;
- 2 Звенья $e1$, $e2L$ и $e3x$, $e4L$ проецируются на оси координат X_3 , Z_3 , связанной с системой «звенья 3,4 - неподвижные части моторов и редукторов»;
- 3 Рассчитываем приведенные коэффициенты Лагранжа C_i и сами коэффициенты λ_n из уравнений первых производных по времени, а также вторые производные по времени уравнений проекции расстояний на оси координат.

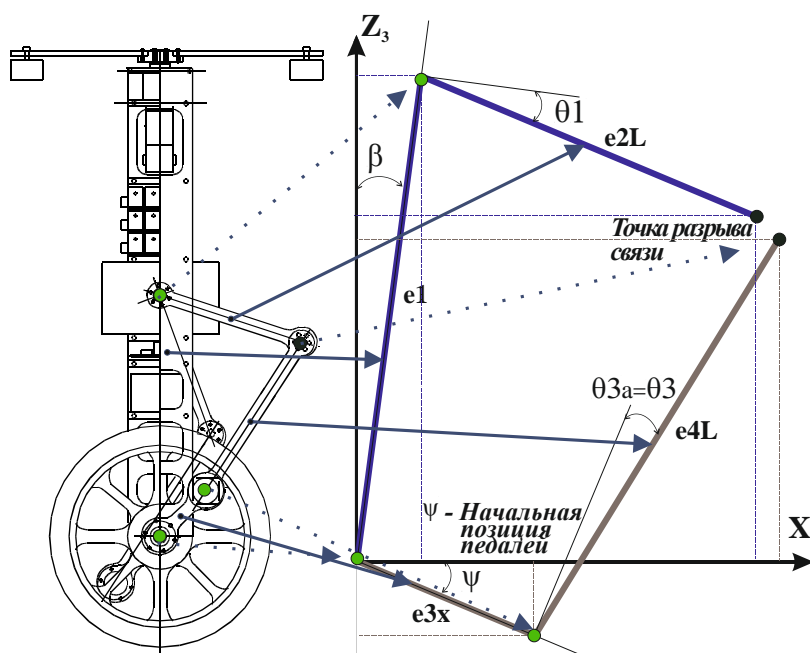


Рис. 10. Пример проецирования виртуально разорванной шатунно-кривошипной системы

Уравнения проекций правой части системы ног, имеет следующий вид:

$$e1 \cdot \sin(\beta) + e2L \cdot (\cos(\beta) \cdot \cos(\theta1) - \sin(\beta) \cdot \sin(\theta1)) - e3x \cdot \cos(\psi) - e4L \cdot (\sin(\psi) \cdot \cos(\theta3a) + \cos(\psi) \cdot \sin(\theta3a)) = 0 \quad (34)$$

$$e1 \cdot \cos(\beta) - e2L \cdot (\sin(\beta) \cdot \cos(\theta1) + \cos(\beta) \cdot \sin(\theta1)) + e3x \cdot \sin(\psi) - e4L \cdot (\cos(\psi) \cdot \cos(\theta3a) - \sin(\psi) \cdot \sin(\theta3a)) = 0 \quad (35)$$

Уравнения проекций левой части системы ног:

$$e1 \cdot \sin(\beta) + e2L \cdot (\cos(\beta) \cdot \cos(\theta2) - \sin(\beta) \cdot \sin(\theta2)) + e3x \cdot \cos(\psi) - e4L \cdot (\sin(\psi) \cdot \cos(\theta4a) + \cos(\psi) \cdot \sin(\theta4a)) = 0 \quad (36)$$

$$e1 \cdot \cos(\beta) - e2L \cdot (\sin(\beta) \cdot \cos(\theta2) + \cos(\beta) \cdot \sin(\theta2)) - e3x \cdot \sin(\psi) - e4L \cdot (\cos(\psi) \cdot \cos(\theta4a) - \sin(\psi) \cdot \sin(\theta4a)) = 0 \quad (37)$$

Примечание: $e4L = 2 \cdot e4, e2L = 2 \cdot e2, \theta3 = \theta3a, \theta4 = \theta4a, \psi = \Psi, \Psi = \theta w + \psi_{constant}$.

Первая производная по времени функций уравнения (34):

$$\left[\left(\frac{d}{dt} \beta(t) \right) \cdot (e1 \cdot \cos(\beta(t)) - 2 \cdot e2 \cdot \sin(\beta(t) + \theta1(t))) + \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right) \cdot (e3x \cdot \sin(\psi(t)) - e4L \cdot \cos(\psi(t) + \theta3a(t))) \right] - 2 \cdot e2 \cdot \sin(\beta(t) + \theta1(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \theta1(t) \right) - e4L \cdot \cos(\psi(t) + \theta3a(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \theta3a(t) \right) = 0$$

Первая производная по времени функций уравнения (35):

$$- \left(\frac{d}{dt} \beta(t) \right) \cdot (e1 \cdot \sin(\beta(t)) + 2 \cdot e2 \cdot \cos(\beta(t) + \theta1(t))) + \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right) \cdot (e3x \cdot \cos(\psi(t)) + e4L \cdot \sin(\psi(t) + \theta3a(t))) - 2 \cdot e2 \cdot \cos(\beta(t) + \theta1(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \theta1(t) \right) + e4L \cdot \sin(\psi(t) + \theta3a(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \theta3a(t) \right) = 0$$

Первая производная по времени функций уравнения (36):

$$\left(\frac{d}{dt} \beta(t) \right) \cdot (e1 \cdot \cos(\beta(t)) - 2 \cdot e2 \cdot \sin(\beta(t) + \theta2(t))) - \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right) \cdot (e3x \cdot \sin(\psi(t)) + e4L \cdot \cos(\psi(t) + \theta4a(t))) - 2 \cdot e2 \cdot \sin(\beta(t) + \theta2(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \theta2(t) \right) - e4L \cdot \cos(\psi(t) + \theta4a(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \theta4a(t) \right) = 0$$

Первая производная по времени функций уравнения (37):

$$\left[\left(\frac{d}{dt} \beta(t) \right) \cdot (e1 \cdot \sin(\beta(t)) + 2 \cdot e2 \cdot \cos(\beta(t) + \theta2(t))) + \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right) \cdot (e4L \cdot \sin(\psi(t) + \theta4a(t)) - e3x \cdot \cos(\psi(t))) \right] - 2 \cdot e2 \cdot \cos(\beta(t) + \theta2(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \theta2(t) \right) + e4L \cdot \sin(\psi(t) + \theta4a(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} \theta4a(t) \right) = 0$$

Примечание: $\left(\frac{d}{dt} \Psi(t) \right) = \left(\frac{d}{dt} \theta w(t) \right) \cdot \left(\frac{d^2}{dt^2} \Psi(t) \right) = \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta w(t) \right)$. Обобщенные координаты уравнения

движения одноколесного робота-велосипеда имеют вид - $q_j(t) = [\alpha, \gamma, \beta, \Psi, \theta w, \theta1, \theta2, \theta3, \theta4, \eta]$

Из уравнений первых производных определяется матрица коэффициентов Лагранжа:

$$A_{i,j} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \alpha & \gamma & \beta & \Psi & \theta w & \theta1 & \theta2 & \theta3 & \theta4 & \eta \end{matrix} \\ & \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{matrix} \lambda_1 \rightarrow \\ \lambda_2 \rightarrow \\ \lambda_3 \rightarrow \\ \lambda_4 \rightarrow \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1,3} & 0 & a_{1,5} & a_{1,6} & 0 & a_{1,8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{2,3} & 0 & a_{2,5} & a_{2,6} & 0 & a_{2,8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & 0 & a_{3,5} & 0 & a_{3,7} & 0 & a_{3,9} & 0 \\ 0 & 0 & a_{4,3} & 0 & a_{4,5} & 0 & a_{4,7} & 0 & a_{4,9} & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ & \begin{matrix} C_1 & & C_2 & & C_3 & & C_4 & & C_5 & & C_6 \end{matrix} \end{matrix}$$

Где коэффициенты $a_{i,j}$ —

$$\begin{aligned} a_{1,3} &= (e1 \cdot \cos(\beta(t)) - 2 \cdot e2 \cdot \sin(\beta(t) + \theta1(t))), & a_{1,5} &= e3x \cdot \sin(\psi(t)) - e4L \cdot \cos(\psi(t) + \theta3a(t)), \\ a_{2,3} &= -(e1 \cdot \sin(\beta(t)) + 2 \cdot e2 \cdot \cos(\beta(t) + \theta1(t))), & a_{2,5} &= e3x \cdot \cos(\psi(t)) + e4L \cdot \sin(\psi(t) + \theta3a(t)), \\ a_{3,3} &= e1 \cdot \cos(\beta(t)) - 2 \cdot e2 \cdot \sin(\beta(t) + \theta2(t)), & a_{3,5} &= -(e3x \cdot \sin(\psi(t)) + e4L \cdot \cos(\psi(t) + \theta4a(t))), \\ a_{4,3} &= -(e1 \cdot \sin(\beta(t)) + 2 \cdot e2 \cdot \cos(\beta(t) + \theta2(t))), & a_{4,5} &= e4L \cdot \sin(\psi(t) + \theta4a(t)) - e3x \cdot \cos(\psi(t)), \\ a_{1,6} &= -(2 \cdot e2 \cdot \sin(\beta(t) + \theta1(t))), & a_{1,8} &= -(e4L \cdot \cos(\psi(t) + \theta3a(t))), \\ a_{2,6} &= -(2 \cdot e2 \cdot \cos(\beta(t) + \theta1(t))), & a_{2,8} &= e4L \cdot \sin(\psi(t) + \theta3a(t)), \\ a_{3,7} &= -(2 \cdot e2 \cdot \sin(\beta(t) + \theta2(t))), & a_{3,9} &= -(e4L \cdot \cos(\psi(t) + \theta4a(t))), \\ a_{4,7} &= -(2 \cdot e2 \cdot \cos(\beta(t) + \theta2(t))), & a_{4,9} &= e4L \cdot \sin(\psi(t) + \theta4a(t)) \end{aligned}$$

Соответствующие приведенные коэффициенты C_i в уравнениях движения, полученных из Лагранжиана, имеют следующий вид:

$$\beta \rightarrow C_1 = \lambda_1 \cdot (a_{1,3}) + \lambda_2 \cdot (a_{2,3}) + \lambda_3 \cdot (a_{3,3}) + \lambda_4 \cdot (a_{4,3}), \quad \theta w \rightarrow C_2 = \lambda_1 \cdot (a_{1,5}) + \lambda_2 \cdot (a_{2,5}) + \lambda_3 \cdot (a_{3,5}) + \lambda_4 \cdot (a_{4,5}),$$

$$\begin{aligned}\theta_1 &\rightarrow C_3 = \lambda_1 \cdot (a_{1,6}) + \lambda_2 \cdot (a_{2,6}), \quad \theta_2 \rightarrow C_4 = \lambda_3 \cdot (a_{3,7}) + \lambda_4 \cdot (a_{4,7}), \\ \theta_3 &\rightarrow C_5 = \lambda_1 \cdot (a_{1,8}) + \lambda_2 \cdot (a_{2,8}), \quad \theta_4 \rightarrow C_6 = \lambda_3 \cdot (a_{3,9}) + \lambda_4 \cdot (a_{4,9}).\end{aligned}$$

После подстановки приведенных коэффициентов C_i в правые части соответствующих уравнений движения для $\beta, \theta w, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ вычисляются коэффициенты $\lambda_{1...4}$ из системы 4х уравнений для $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$:

$$\lambda_1 = \frac{[(a_{2,6}) \cdot \text{TH3} - (a_{2,8}) \cdot \text{TH1}]}{((a_{1,8} \cdot a_{2,6} - a_{2,8} \cdot a_{1,6}))} \quad \lambda_2 = \frac{[(a_{1,8}) \cdot \text{TH1} - (a_{1,6}) \cdot \text{TH3}]}{((a_{1,8} \cdot a_{2,6} - a_{2,8} \cdot a_{1,6}))} \quad \lambda_3 = \frac{(a_{4,9}) \cdot \text{TH2} - (a_{4,7}) \cdot \text{TH4}}{(a_{4,9} \cdot a_{3,7} - a_{3,9} \cdot a_{4,7})} \quad \lambda_4 = \frac{(a_{3,7}) \cdot \text{TH4} - (a_{3,9}) \cdot \text{TH2}}{(a_{4,9} \cdot a_{3,7} - a_{3,9} \cdot a_{4,7})}$$

где TH1...4 соответственно левые части уравнений движения системы из Лагранжиана с соответствующими коэффициентами при ускорениях, скоростях, трении и крутящих моментах исполняющих приводов:

$$\begin{aligned}\text{TH1} &= \left[\left(\frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) \right) \cdot T101 + \left(\frac{d^2}{dt^2} \gamma(t) \right) \cdot T102 + \left(\frac{d^2}{dt^2} \beta(t) \right) \cdot T103 + \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta w(t) \right) \cdot T104 + \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta_1(t) \right) \cdot T106 + \left(\frac{d}{dt} \alpha(t) \right) \cdot T1A + \left(\frac{d}{dt} \gamma(t) \right) \cdot T1G + \left(\frac{d}{dt} \beta(t) \right) \cdot T1B + (T1V + T1D) \right] \\ \text{TH2} &= \left[\left(\frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) \right) \cdot T201 + \left(\frac{d^2}{dt^2} \gamma(t) \right) \cdot T202 + \left(\frac{d^2}{dt^2} \beta(t) \right) \cdot T203 + \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta w(t) \right) \cdot T204 + \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta_2(t) \right) \cdot T207 + \left[\left(\frac{d}{dt} \alpha(t) \right) \cdot T2A + \left(\frac{d}{dt} \gamma(t) \right) \cdot T2G + \left(\frac{d}{dt} \beta(t) \right) \cdot T2B + T2V + T2D \right] \right] \\ \text{TH3} &= \left[\left(\frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) \right) \cdot T301 + \left(\frac{d^2}{dt^2} \gamma(t) \right) \cdot T302 + \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta w(t) \right) \cdot (T304 + T305) + \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta_3(t) \right) \cdot T308 + \left[\left(\frac{d}{dt} \alpha(t) \right) \cdot T3A + \left(\frac{d}{dt} \gamma(t) \right) \cdot T3G \right] + \left[\left(\frac{d}{dt} \theta w(t) \right) \cdot T3S(T3Tw) + (T3V + T3D) \right] - \tau_1 \right] \\ \text{TH4} &= \left[\left(\frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) \right) \cdot T401 + \left(\frac{d^2}{dt^2} \gamma(t) \right) \cdot T402 + \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta w(t) \right) \cdot (T404 + T405) + \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta_4(t) \right) \cdot T409 + \left(\frac{d}{dt} \alpha(t) \right) \cdot T4A + \left(\frac{d}{dt} \gamma(t) \right) \cdot T4G + \left(\frac{d}{dt} \theta w(t) \right) \cdot T4S + (T4V + T4D) + \tau_1 \right]\end{aligned}$$

При этом, данные уравнения TH1...4 в системе заменяются на вторые производные по времени голономных ограничений (34-37) вычисляемых для ускорений

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} \theta_1(t) \right), \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta_3(t) \right), \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta_2(t) \right), \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta_4(t) \right) \quad (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) \text{ см. [1]}.$$

На этом процесс аналитического вычисления закончен и перечисленные выше уравнения транслируются в код ПО численного интегрирования, например Матлаб.

Существуют так же другие походы анализа голономных связей, описанные, к примеру в работах [26,27] но все они приводят к похожему решению систем уравнений Лагранжа.

Вариативности применения

Рассмотрим метод отслеживания траектории рабочего органа манипулятора путем учета динамики беспилотного летательного аппарата (БПЛА) и нулевого пространства прикрепленного к нему манипулятора в процедуре планирования движения. Предлагаемый метод работает поэтапно. Планирование траектории начинается с того, что не учитываются углы крена и тангажа недостаточно активируемой системы БПЛА. Далее предлагается смоделировать динамику на такой траектории и получить положение БПЛА через разработанную модель. Полное состояние воздушного манипулятора, полученное таким образом, в дальнейшем используется для учета расхождений в запланированных и смоделированных состояниях рабочего органа. Наконец, положение рабочего органа корректируется через нулевое пространство манипулятора, чтобы соответствовать требуемому положению рабочего органа, полученному при планировании траектории движения БПЛА.

БПЛА, оснащенный манипулятором с тремя степенями свободы, используется для проведения контрольных операций и диагностики в стесненных условиях. Идея концепции состоит в том, чтобы использовать пустое пространство воздушного манипулятора для осмотра мест, недоступных для обычного БПЛА и человека-оператора (рис. 11).

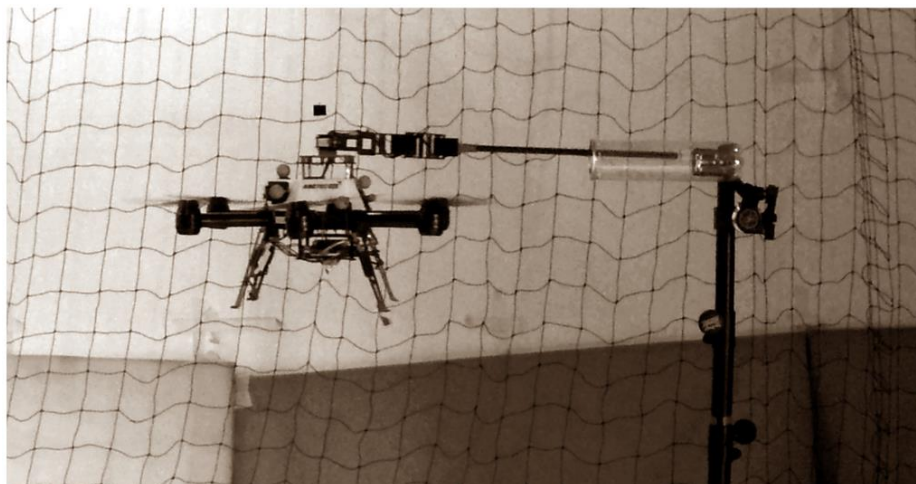


Рис. 11. БПЛА, оснащенный манипулятором с тремя DoF, выполняет задачу по установке штифта в отверстие [28]

Пустой цилиндр действует как макет ограниченного пространства задачи. Изображение получено во время экспериментальной проверки предложенного алгоритма планирования траектории.

В данной случае задачей является разработка автономной роботизированной системы для осмотра и обработки растений в структурированных плантациях систем выращивания на гидро- или аэропонике.

Примечание. Дело в том, что существует огромная проблема плодородности почвы, актуальная ещё с древних времён, так как от этого зависит урожайность, а соответственно объем продуктов питания. На сегодняшний день лишь некоторые страны мира обладают большей территорией плодородной почвы – Куба, Уругвай, Венгрия, Таиланд, Мозамбик. Связано это с различными климатическими поясами, близостью грунтовых вод, а также с загрязнением воды и воздуха в местности. На 2022 год эксперты прогнозируют плохой урожай из-за экстремальной засухи и резкого смены климата. Но, к сожалению, вариант смены почвенного субстрата на гидропонику не рассматривают, так как в большом масштабе её сложно контролировать. Именно поэтому интеллектуальные роботизированные системы актуальны для применения в сельскохозяйственной отрасли выращивания на плантациях гидро- или аэропонике. С помощью именно таких систем возможно контролировать весь процесс выращивания, начиная с посадки, и в течении всего цикла роста контролировать состав питательной смеси и при необходимости добавлять необходимые вещества. Заметим также, что процесс выращивания на гидро- или аэропонике полностью основывается на натуральных природных компонентах применяемых удобрений.

Воздушный манипулятор разворачивается для получения изображений растений крупным планом с помощью камеры, установленной на концевом эффекторе, избегая при этом причинения вреда растениям. Поэтому рабочий орган должен совершать движения вблизи хрупких стеблей и листьев, не повреждая их. Этот тип движения может быть аппроксимирован задачей введения штифта в отверстие, где рабочий орган следует определенной траектории и компенсирует динамическое движение БПЛА за счет его движения в нулевом пространстве. Кроме того, такую систему можно развернуть при осмотре инфраструктуры, чтобы вставить камеру в щели и другие труднодоступные места (рис. 12).

Обобщенная модель воздушного манипулятора изображена на рис. 7 в виде летательного аппарата с закрепленным на его корпусе манипулятором.

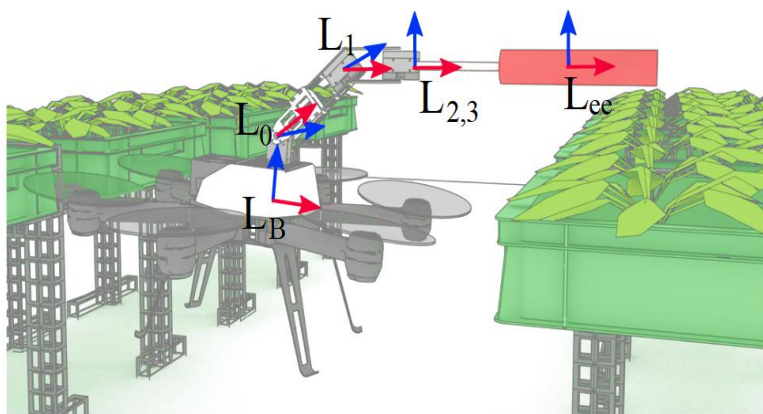


Рис. 12. Система координат БПЛА и одноплечевого манипулятора

Точки $L3$ и $L2$ систем отсчета совпадают, поскольку $L3$ представляет собой виртуальный сустав, необходимый для получения *Denavit-Hartenberg* (DH) параметров манипулятора. Такой воздушный манипулятор сталкивается с множеством ограничений, например, корпус БПЛА должен оставаться ниже растений, в то время как конечный рабочий орган должен достичь ограничений задачи, обозначенных виртуальным красным цилиндром

Математическая модель воздушного манипулятора как объекта управления

Воздушные манипуляторы создают несколько проблем при планировании траектории и управлении БПЛА. Во-первых, они, как правило, недостаточно активны. Более того, движения, например с тяжелым вооружением или тяжелой полезной нагрузки могут вызвать сложные сдвиги общего центра масс (ЦМ), что потенциально может вызвать нестабильность движения БПЛА в целом.

Существует достаточно общий класс воздушных манипуляторов, который дифференциально плоский [29]. Плоские системы эквивалентны тривиальной системе через эндогенное преобразование, которое позволяет линеаризовать динамическую обратную связь. Следовательно, результаты приводят к результатам нелинейной управляемости для этих сложных летательных аппаратов, а также к разработке локально экспоненциально стабилизирующих регуляторов. Известно, что мультикоптеры (без манипуляторов) дифференциально плоские, и на этом факте основаны важные методы планирования траектории мультироторов. Данный результат позволяет обобщить методы, разработанные для обычных мультикоптеров, на воздушные манипуляторы.

Доказательство плоскостности для воздушных манипуляторов, в котором принципиально используется положение редуцированного ЦМ, использует предположение о существовании плоских выходов, которыми являются следующие параметры: линейный импульс системы ЦМ в инерциальной системе отсчета, угол рыскания и углы сочленения манипулятора. Для полноты рассматриваются особенности и геометрический смысл вывода плоскостности. Применяя эквивалентность плоской системы тривиальной системе, получаем динамическое расширение второго порядка для входной тяги. Это позволяет спроектировать локально экспоненциально стабилизирующийся регулятор, используя квадратичную программу на основе управляющей функции Ляпунова [30,31].

Многороторная автоплатформа представляет собой воздушный манипулятор (АМ) со следующими характеристиками (рис. 13):

- Мультиротор включает n пар одинаковых роторов, прикрепленных к общему основанию, где $n \geq 2$. Каждая пара роторов состоит из одного ротора, вращающегося по часовой стрелке, и одного ротора, вращающегося против часовой стрелки. Все оси тяги указывают в общем направлении, обозначаемом единичным вектором \hat{z}_b .
- К геометрическому центру основания крепится полноприводной k -связанный манипулятор. Все составляющие плечи рук подвижны.

- Все компоненты системы являются жесткими, а взаимодействие сложной подвижной среды игнорируется.

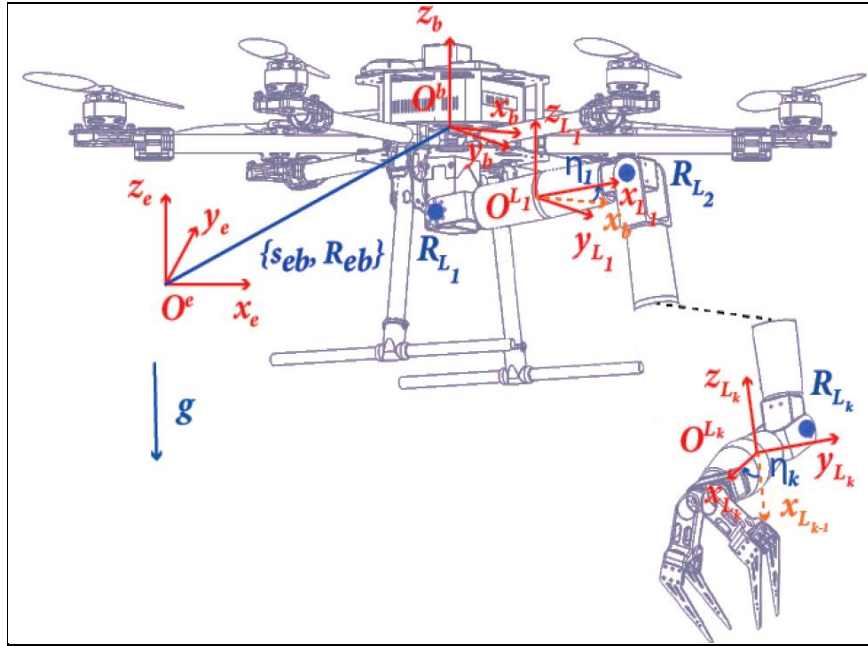


Рис. 13. Геометрия системы воздушного манипулятора

Модель использует следующие системы отсчета: 1) привязанная к Земле инерциальная система отсчета $E = \{O^e, \hat{x}_e, \hat{y}_e, \hat{z}_e\}$; 2) основа платформы корпуса БПЛА $B = \{O^b, \hat{x}_b, \hat{y}_b, \hat{z}_b\}$; 3) i - плечо манипулятора, привязанное к системе отсчета $L_i = \{O^{L_i}, \hat{x}_{L_i}, \hat{y}_{L_i}, \hat{z}_{L_i}\}$.

Условно вектор $s_{ab} \in \mathbb{R}^3$ обозначает положение начала координат системы отсчета B относительно начала координат системы отсчета A , а $\mathcal{R}_{ab} \in SO(3)$ обозначает ориентацию системы отсчета B относительно начала координат системы отсчета A . Геометрия манипулятора робота описывается с помощью системы преобразований *Denavit-Hartenberg (DH)*. Реперная система отсчета присоединяется к каждому каналу в соответствии с преобразованиями *DH*. Пусть $\mathcal{R}_{L_i}, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ обозначают набор матриц вращения, описывающих относительный поворот i -го звена в привязанной системе отсчета относительно $(i-1)$ -го звена. Пусть $\eta \triangleq [\eta_1, \dots, \eta_k]^T \in \mathbb{S}^k$ обозначает вектор углов сочленения звеньев манипулятора робота, как определено в преобразованиях *DH*. Тело базы воздушного манипулятора образует нулевое звено 0. Для простоты выводов предполагается, что $\mathcal{R}_{L_1} = I_{3 \times 3}$, и что первое звено манипулятора работает только в плоскости $\hat{x}_b - \hat{z}_b$. Это предположение легко обобщается. Линейная скорость базы БПЛА в системе отсчета B определяется как $\dot{s}_b \triangleq \mathcal{R}_{eb}^T \dot{s}_{eb}$. Используя стандартные углы крена, тангажа и рыскания $\xi = [\phi, \theta, \psi]^T$, угловая скорость ω_b базы воздушного манипулятора в системе отсчета B равна

$$\omega_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = E(\xi) \dot{\xi}$$

Наконец, $\dot{\mathcal{R}}_{eb} \triangleq \mathcal{R}_{eb} S(\omega_b)$, где $S(\omega_b)$ — 3×3 кососимметричная матрица такая, что

$$S(\omega_b) \beta = \omega_b \times \beta, \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^3$$

Рассмотрим способ упрощения описания модели рассматриваемого ОУ.

Математическая модель предварительной редукции Лагранжиана

Воздушные манипуляторы создают несколько проблем при планировании траектории и управлении БПЛА. Во-первых, они, как правило, недостаточно активны. Более того, движения, например с тяжелым вооружением или тяжелой полезной нагрузки могут вызвать сложные сдвиги общего центра масс (ЦМ), что потенциально может вызвать нестабильность движения БПЛА в целом.

Рассматриваемая механическая система определяется набором триплетом $\Sigma = (Q, L, T)$, где Q – ее конечномерное конфигурационное пространство, которое предполагается гладким многообразием. Пусть TQ обозначает касательное расслоение к Q , а T_qQ – касательное пространство к Q в точке $q \in Q$. Пусть далее $L: TQ \rightarrow \mathbb{R}$ – лагранжиан системы, и пусть $T(q, \dot{q}) \in T^*Q$ представляет собой внешние силы, действующие на Σ , где T^*Q – двойственное к TQ . Лагранжиан обладает симметрией, если существует действие на его аргументы, которое оставляет лагранжевы инвариант неизменным. Эта симметрия позволяет свести динамическую систему к фазовому пространству меньшей размерности.

Рассмотрим отмеченные особенности описания модели ОУ с позиции теории групп Ли [29].

Математические особенности модели ОУ и теория групп Ли

Механическая система обладает симметрией относительно группы Ли G , если ее лагранжиан $L: TQ \rightarrow \mathbb{R}$ и внешние силы $T(q, \dot{q})$ являются инвариантами группы Ли. Левое действие группы Ли G на гладком многообразии Q – это отображение $\Phi_g: Q \times Q \rightarrow Q$, $q \rightarrow gq$ для любого $q \in Q$. Конфигурационное пространство воздушного манипулятора имеет структуру произведения $Q = G \times \mathcal{B}$, где $G = SE(3)$ описывает положение твердого тела относительно мультиторного основания, а пространство форм \mathcal{B} моделирует совместные переменные манипулятора. Группа Ли $SE(3)$ является группой полупрямого произведения: $SE(3) = H \otimes \mathcal{V}$, где подгруппа Ли $H = SO(3)$ действует слева на $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$. Таким образом, $Q = SO(3) \otimes \mathbb{R}^3 \times \mathcal{B}$.

С группой Ли связана ее алгебра Ли, \mathfrak{g} , векторное пространство, изоморфное касательному пространству в единице группы, т. е. $\mathfrak{g} \simeq T_e G$. Алгебра Ли группы полупрямого произведения может быть записана как $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \otimes T\mathcal{V} \simeq \mathfrak{h} \otimes \mathcal{V}$ с элементами $(\xi_h, \xi_v) \in \mathfrak{g}$. В локальных/физических координатах $\xi_h = h^{-1}\dot{h} \in \mathfrak{h}$ и $\xi_v = h^{-1}\dot{g} \in E\mathcal{V}$, $(\dot{h}, \dot{g}) \in TG$ – произвольный касательный вектор, а \mathfrak{h} – алгебра Ли группы H . Следовательно, $(q, \dot{q}) = (h, \dot{h}, v, \dot{v}, \dot{r}, \dot{r})$, где $h, \dot{h} \in H$, $v, \dot{v} \in \mathcal{V}$ и $r, \dot{r} \in \mathcal{B}$.

Во время выполнения задачи манипулирования ЦМ системы смещается при движении робота-руки, нарушая симметрию потенциальной энергии системы. Используем т.н. адвективные параметры для формулировки лагранжевой редукции при изменении вклада потенциальной энергии, нарушающем симметрию. Для механических систем дополнительный (адвективный) параметр, $\gamma(t)$ – вектор, выраженный в фиксированной системе отсчета платформы БПЛА, удовлетворяющей дифференциальному уравнению: $\left(\frac{d}{dt} + g^{-1}(t)\dot{g}(t)\right)\gamma(t) = 0$, где $g \in G$.

Для воздушных манипуляторов дополнительный параметр переноса $\gamma(t) \triangleq \mathcal{R}_{eb}^T \in \mathcal{V}$ моделирует направление силы тяжести (термин, нарушающий симметрию) в фиксированных координатах, привязанных к телу платформы БПЛА. Еще одним нарушением симметрии является зависимость

потенциальной энергии от положения платформы БПЛА. При $\zeta \triangleq \mathcal{R}_{eb}^T s_{eb}$ потенциальная энергия V_{AM} может быть выражена как $V_{AM}(r, \gamma, \zeta)$, где r обозначает переменные формы. Следовательно, эта переформулированная потенциальная энергия является G -инвариантной.

Рассмотрим упрощенную математическую движения рассматриваемого объекта управления.

Кинематика

Инерциальная система отсчета определяется как L_W . Вектор силы тяжести направлен вдоль отрицательной оси z_W инерциальной системы отсчета. Жесткая рама L_B крепится к центру тяжести корпуса БПЛА. Мы можем определить обобщенные координаты БПЛА как $q_B = [p_B^T \ \Theta_B^T]^T \in \mathbb{R}^6$, где $p_B = [x \ y \ z]^T$ представляет собой положение БПЛА в инерциальной системе отсчета, а $\Theta_B^T = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ представляет вектор ориентации.

Манипулятор с M (DoF) степенями свободы считается жестко прикрепленным к корпусу БПЛА с началом в системе координат L_0 , которая также совпадает с первым шарниром манипулятора. Кинематическая цепь манипулятора представлена звеньями $(L_0, \dots, L_{M-1}, L_{ee})$, где последний обозначает звено рабочего органа. Полная кинематическая цепь воздушного манипулятора может быть записана в виде: $T_W^{ee} = T_W^B \cdot T_B^{L_0} \cdot T_{L_0}^{ee}$, где $T_a^b \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ определяет однородную матрицу преобразования между системами координат a и b . $T_B^{L_0}$ - это фиксированное преобразование, определяемое размещением манипулятора на корпусе БПЛА, а $T_{L_0}^{ee}$ может быть получена за счет непосредственной кинематики манипулятора [28].

Динамика

Чтобы справиться с динамическими эффектами во время движения в полете, необходимо исследовать полную динамическую модель воздушного манипулятора. Ранее мы определили q_B как общие координаты БПЛА. Линейная скорость \dot{p}_B является производной по времени от положения в мировой системе отсчета. Угловая скорость в мировой системе отсчета равна $\omega_B^T = p x_B + q y_B + r z_B$, где p , q и r — угловые скорости в системе отсчета тела, которые могут быть отображены в мировой системе отсчета. Это дает скорость обобщенных координат как $\dot{q}_B = [\dot{p}_B^T \ \omega_B^T]^T \in \mathbb{R}^6$.

Исполнительная установка движения БПЛА состоит из нескольких винтов, жестко прикрепленных к корпусу БПЛА. Количество винтов n_p может варьироваться в зависимости от конфигурации БПЛА. Считается, что каждый воздушный винт создает силу тяги вдоль оси z_B , что делает систему БПЛА недоиспользуемой. Можно описать вектор силы как $\mathbf{f} = [f_1 \dots f_{n_p}]^T \in \mathbb{R}^{n_p}$.

Обобщенные координаты манипулятора определяются как $q_M = [q_1 \dots q_M]^T \in \mathbb{R}^{n_p}$, где каждое сочленение может быть как вращательным, так и призматическим. В обоих случаях преобразование *Denavit-Hartenberg* предполагает, что ось z каждого сочленения представляет собой ось срабатывания: вращение для ротационных сочленений и поступательное движение для призматических сочленений.

Скорость сочленений манипулятора есть производная по времени от их положения $\dot{q}_M = dq_M / dt \in \mathbb{R}^M$. Управляющий вход для каждого сочленения считается обобщенным крутящим моментом вдоль соответствующей оси. В этом случае вектор, содержащий все обобщенные моменты, записывается как $\tau = [\tau_1 \dots \tau_M]^T \in \mathbb{R}^M$.

Обобщенные координаты воздушного манипулятора могут быть выражены как

$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_B^T \ \mathbf{q}_M^T]^T \in \mathbb{R}^{6+M}$. Таким же образом можно получить скорость: $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\mathbf{q}}_B^T \ \dot{\mathbf{q}}_M^T]^T \in \mathbb{R}^{6+M}$. Входной вектор управления всей системой можно записать в виде: $\mathbf{u}^* = [\mathbf{f}^T \ \boldsymbol{\tau}^T]^T \in \mathbb{R}^{n_p+M}$. Хотя \mathbf{u} захватывает все управляющие входные данные, более удобно записывать обобщенный входной вектор из-за недостаточно активных свойств мультироторных БПЛА. Из-за малоподвижных свойств мультироторных БПЛА необходимо определить $\mathbf{u}_{\text{БПЛА}} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3 \ \mathbf{u}_4]^T$, где \mathbf{u}_1 представляет собой тягу, а $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ и \mathbf{u}_4 — моменты вокруг осей корпуса. В зависимости от конфигурации мультироторного БПЛА силы, создаваемые каждым ротором, равны $\mathbf{f} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{u}_{\text{БПЛА}}$, где матрица $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{4 \times n_p}$ связывает подъемные силы винтов и управляющие сигналы. Полную динамику системы теперь можно зафиксировать как: $\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}$, где $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{(6+M) \times (4+M)}$ — матрица инерции, $\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{(4+M)}$ — вектор центробежной и кориолисовой сил, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{(4+M)}$ — гравитационный член, $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_{\text{БПЛА}}^T \ \boldsymbol{\tau}^T]^T$ — обобщенный управляющий вход. Состояние робота в любой момент времени определяется положением и скоростью: $\mathbf{x} = [\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T \in \mathbb{R}^{2(6+M)}$.

Структура системы планирования состоит из трех основных фаз: планирование траектории в многомерном конфигурационном пространстве воздушного манипулятора; планирование траектории на основе полученного пути; и использование нулевого пространства манипулятора для компенсации положения рабочего органа для неизвестных динамических эффектов посредством моделирования.

Когда воздушный манипулятор достигает определенных точек на траектории движения, он будет делать это с некоторыми углами крена и тангажа. В квазистатическом движении, когда динамические ограничения невелики, реальная и запланированная (в пространстве управления) траектория рабочего органа может не сильно отличаться. В зависимости от задачи это может быть удовлетворительное поведение. Однако даже в лучшем случае это заставит использовать программные планы, которые выполняются в течение длительного времени и потребляют много энергии, поскольку большая часть потребляемой мощности тратится на поддержание системы в воздухе. Чтобы отслеживать желаемую траекторию рабочего органа, ошибки положения, вызванные изменениями углов ориентации, компенсируются с использованием нулевого пространства манипулятора. Это делается в два этапа: сначала моделируется траектория для получения углов крена и тангажа, которые не учитываются при планировании траектории; и, во-вторых, использование нулевого пространства манипулятора для поиска решения, как можно более близкого к запланированной траектории рабочего органа, изображенной на рис. 14.

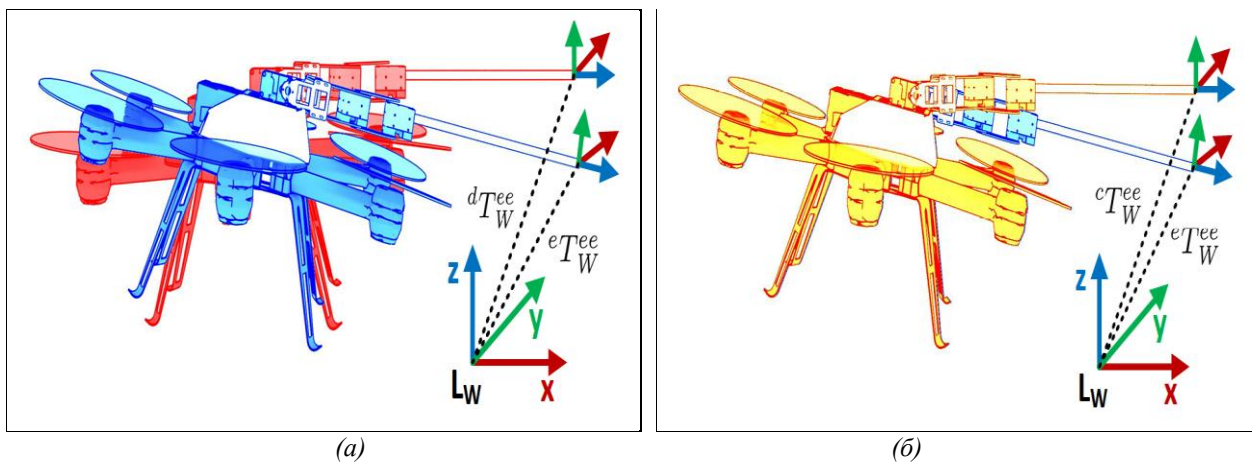


Рис. 14. Пример разницы положения рабочего органа манипулятора на запланированной и выполненной траектории. (а) Различие между желаемым (красным) и выполненным (синим) положением рабочего органа без выполнения динамической компенсации; (б) Различие между состояниями рабочего органа с (желтый) и без компенсации (синий)

Алгоритм компенсации был проверен в среде с препятствиями. Трубку для введения помещали внутрь лабиринта с известной точкой введения. Компенсированная и некомпенсированная траектории были созданы для того, чтобы сравнить выполнение задачи.

Траектории в трехмерном пространстве вместе с вставной трубкой показаны на рис. 15.

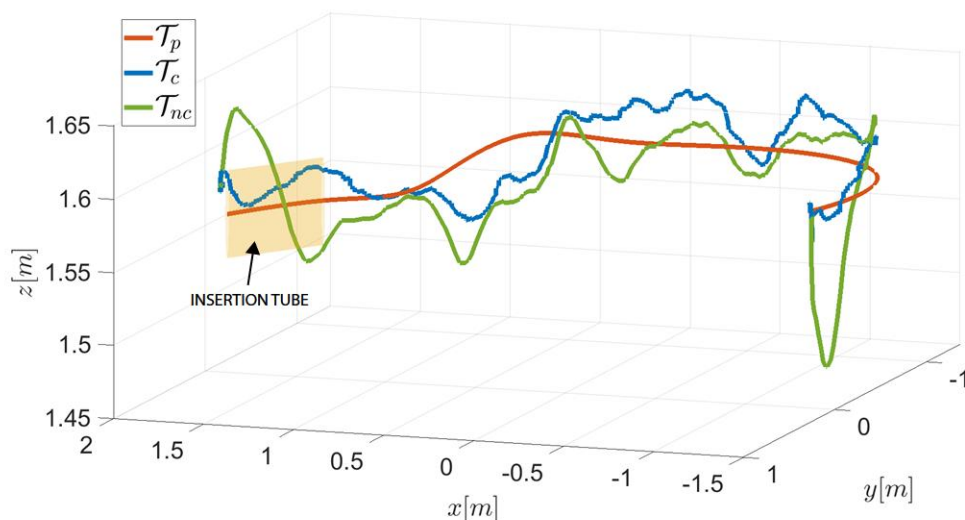


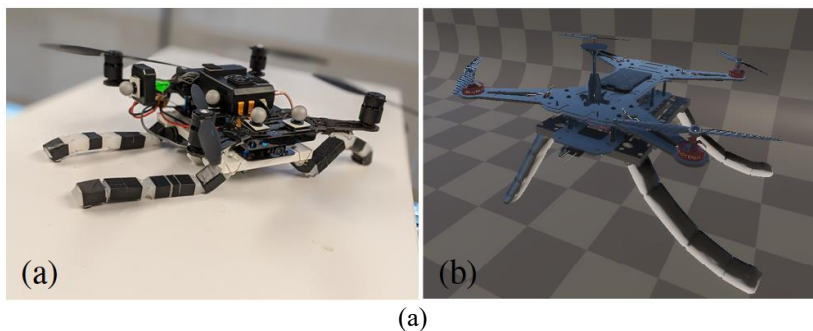
Рис. 15. Позиционирование рабочего органа во время эксперимента по обходу препятствия

Без компенсации траектории точка вставки будет пропущена.

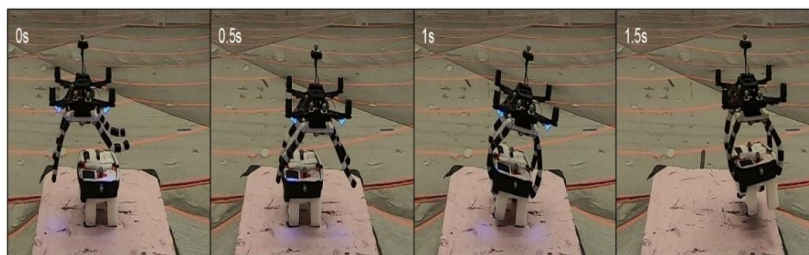
Моделирование полученной траектории с помощью динамической модели системы позволяет получить неизвестные углы крена и тангажа. Эти известные на данный момент динамические эффекты вносят ошибки в запланированную позицию конечного исполнительного элемента, что компенсируется за счет избыточности манипулятора, используя его нулевого пространства. Хотя углы сочленения манипулятора отклоняются от первоначального плана, положение рабочего органа успешно компенсируется на этапе планирования.

Жесткие захваты, используемые в существующих воздушных манипуляторах, требуют точного позиционирования для успешного захвата и передачи больших контактных усилий, которые могут дестабилизировать дрон. Это ограничивает скорость во время захвата и предотвращает «динамический захват», когда дрон пытается захватить объект во время движения. С другой стороны, биологические системы (например, птицы) полагаются на податливые и мягкие части, чтобы ослабить силу контакта и компенсировать неточность захвата, что позволяет совершать впечатляющие трюки.

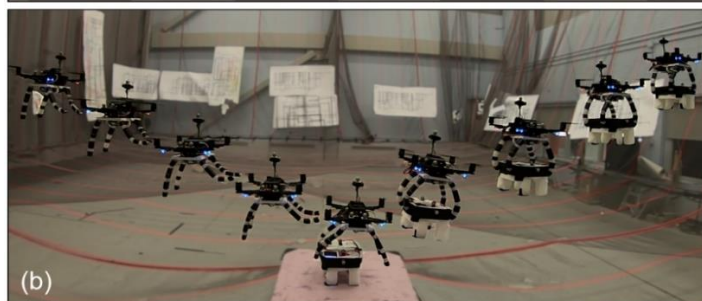
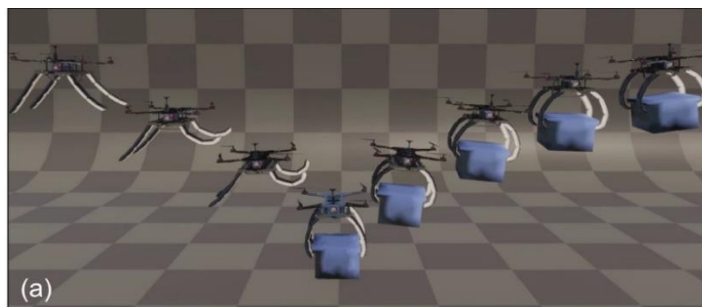
На рисунке 16, а представлен первый прототип «мягкого» дрона – квадрокоптер, в котором традиционные (т. е. жесткие) шасси заменены на мягкий захват с сухожильным приводом, обеспечивающий агрессивный захват [32].



(a)



(б)



(в)

Рис. 16. Пример захвата предмета воздушным манипулятором и доставки предмета

Прототип мягкого дрона включает электромеханическую конструкцию, программную инфраструктуру и изготовление. Набор алгоритмов используется для оптимизации траектории и управления дроном и мягким захватом; алгоритмы сочетают в себе современные методы управления квадрокоптером (т. е. адаптивный геометрический контроллер) с передовыми моделями мягкой робототехники (т. е. квазистатическая модель конечных элементов). Дрон способен динамически захватывать объекты неизвестной формы там, где базовые подходы не работают. Физический прототип обеспечивает стабильную производительность, достигая 91,7% успешных захватов в 23 испытаниях.

На рис. 17 приведен пример разработки интеллектуального БПЛА с воздушным манипулятором на основе технологии квантовых мягких вычислений для применения в условиях нештатных ситуаций.



Рис. 17. Структура интеллектуального БПЛА со встроенным воздушным манипулятором

Компенсация непредвиденных ситуаций управления осуществляется на основе самоорганизующегося квантового регулятора и гарантирует достижение поставленной цели управления. Данный подход рассмотрен в следующей работе авторов.

Построение физических теорий моделей механики на основе глубокого машинного обучения

Рассмотрим кратко проблему построения физических теорий на основе глубокого машинного обучения. Например, наличие или отсутствие патологий в контексте лагранжевой модели механики изучается с помощью алгоритмов машинного обучения. На примере (в рамках классической механики) делается доказательство концепции возможности построения новых физических теорий с использованием машинного обучения. В частности, применяя полносвязную архитектуру нейронной сети (НС) с прямой связью, стремятся различать «пригодные» и «непригодные» лагранжианы без явного извлечения соответствующих уравнений движения. Сеть после обучения используется как функция пригодности в концепции генетического алгоритма, и строятся новые «пригодные» лагранжианы. Эти новые лагранжианы отличаются от лагранжианов, содержащихся в исходном наборе данных. Таким образом, поиск лагранжианов, обладающих рядом predetermined свойств, в рамках данного подхода существенно упрощается. Такая структура может быть использована для исследования более сложных физических теорий, таких как обобщения общей теории относительности в физике гравитации или построения в физике твердого тела, в которых стандартная процедура может быть трудоемкой.

Основой, позволяющей систематически изучать физическую теорию, является лагранжев формализм. Наряду с его обобщениями, включающими различные поля и искривленное пространство-время, лагранжев формализм является краеугольным камнем современной и классической физики. В контексте классической механики и границ ее применения рассмотрим

обобщенный функционал действия $\mathcal{S}[q, t_1, t_2] = \int_{q(t_1)}^{q(t_2)} \mathcal{L}(q, \dot{q}, \dots, q^{(n)}) dt$, где t_1, t_2 – два момента

времени, а q – фундаментальная величина, описывающая физическую систему и, в частности, положение изучаемой частицы во времени. Соответствующие уравнения движения возникают при применении принципа Гамильтона, а именно эволюция физической системы происходит таким образом, что действие является стационарным. Другими словами, траектория, по которой будет

двигаться частица между $q(t_1)$ и $q(t_2)$, такова, что производная функционала действия равна нулю, т. е. $\delta S = 0$. Это требование приводит к уравнению движения

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{(n)}} \right) = 0$$

Процедура построения новой физической теории - по существу процесс построения новых лагранжианов с желаемыми свойствами (например, определенными симметриями) [33].

Лагранжиан в принципе может содержать скалярные величины, которые являются функциями объектов более высокой размерности. Например, электромагнитный лагранжиан содержит тензор $F_{\mu\nu}$, а лагранжиан Эйнштейна-Гильберта общей теории относительности обладает сокращениями тензора Римана. Чтобы подать модель лагранжиана на вход нейронной сети как сигнал для аппроксимации, необходимо перевести его в форму, которую может обработать сеть, то есть описать его как набор признаков. Формально функция $\phi: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^n$ должна быть определена, чтобы задать векторы признаков, где \mathcal{L} – пространство Лагранжа.

При создании НС все ее значения весов и смещений инициализируются случайным образом. Следовательно, чтобы НС могла правильно классифицировать данный лагранжиан, его значения необходимо скорректировать. В частности, эти значения должны быть скорректированы таким образом, чтобы при подаче в сеть пригодного лагранжиана сеть выдавала на выходе действительное число, близкое к 1, а с другой стороны, в случае непригодного лагранжиана предоставит в качестве вывода число, близкое к 0.

Здесь ограничиваемся классической механикой в том смысле, что фундаментальная величина, участвующая в лагранжиане – положение движущегося тела $x(t)$ как функция времени. Позиция вместе с ее производными по времени составляют множество физически интересных сущностей. В моделировании все физические параметры, такие как масса, установлены равными единице. Кроме того, параметры измеряются в соответствующих единицах, чтобы сохранить стандартную физическую интерпретацию потенциальной энергии.

Лагранжевы нейронные сети глубокого машинного обучения

Лагранжевы нейронные сети (*Lagrangian neural networks* – *LNN*), которые могут параметризовать произвольные лагранжианы с использованием нейронных сетей. Поэтому лагранжевы нейронные сети основаны на физико-информированном методе обучения при изучении динамики пространства состояний

В отличие от моделей, которые изучают гамильтонианы, *LNN* не требуют канонических координат и поэтому хорошо работают в ситуациях, когда канонические импульсы неизвестны или их трудно вычислить. Входными данными сети являются положение и угловая ориентация с соответствующими производными по времени. Результатом является лагранжиан системы, который используется для получения ускорения (рис. 18).

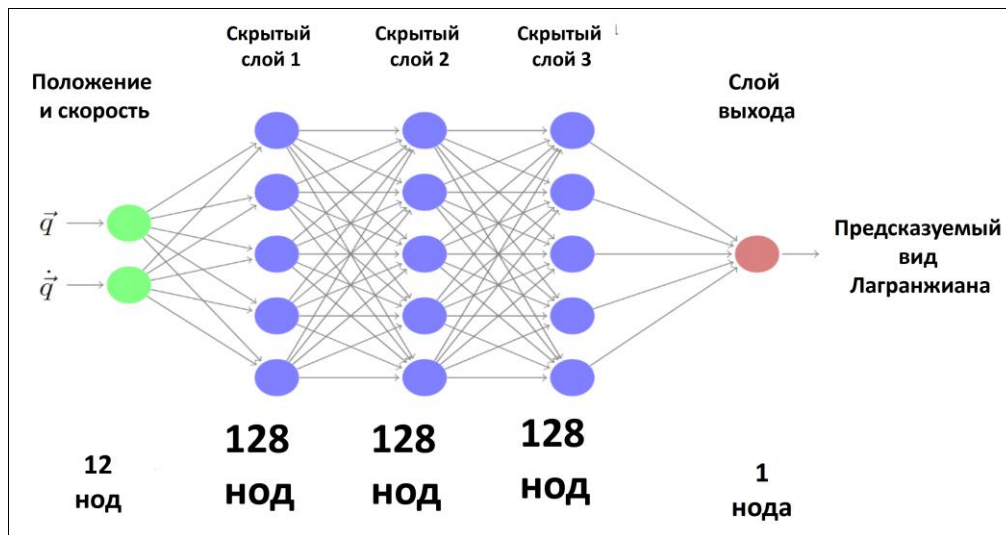


Рис. 18. Иллюстрация лагранжевой нейронной сети

Примечание. Подход протестирован на моделировании поведения модели двойного маятника и релятивистской частицы, демонстрируя сохранение энергии и моделирование относительности без канонических координат. Традиционный подход приводит к диссипации и гамильтонов подход терпит неудачу.

НС находят закономерности в зашумленных и многомерных данных. Частично успех применения НС коренится в «глубоких априорных планах», которые включают в себя жестко закодированные трансляционные инвариантности (например, сверточные фильтры), продуманный архитектурный выбор (например, уровни самоконтроля) и хорошо обусловленные ландшафты оптимизации (например, пакетная нормализация). Тем не менее, несмотря на их способность конкурировать с людьми в решении сложных задач, этим моделям не хватает многих базовых интуитивных представлений о динамике физического мира. В то время как человек - оператор может быстро сделать вывод, что мяч, брошенный вверх, вернется в его руку примерно с той же скоростью, НС может не воспринимать эту абстракцию как обучающую выборку, даже просмотрев тысячи примеров.

Основная проблема с моделями НС заключается в том, что с помощью НС пытаются изучить основные симметрии и законы сохранения. Одним из решений этой проблемы является разработка НС, способных изучать произвольные законы сохранения. Это было основной мотивацией создания гамильтоновых НС и гамильтоновы генеративные сети. Это оба типа дифференциальных уравнений, моделируются НС, или «нейронными ОДУ».

В физике традиционно записывают аналитическое выражение для лагранжиана \mathcal{L} , а затем символически разлагают уравнение Эйлера-Лагранжа в систему дифференциальных уравнений. Однако, поскольку \mathcal{L} теперь является черным ящиком, аналитического разложения уравнения Эйлера-Лагранжа быть не может. Но существует возможность вывести числовое выражение для динамики системы. Перепишем для этого уравнение Эйлера-Лагранжа в векторизованной форме как

$\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{q}} \mathcal{L} = \nabla_q \mathcal{L}$, где $(\nabla_{\dot{q}})_i \equiv \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}$. Затем мы можем использовать правило цепочки, чтобы разложить

производную по времени $\frac{d}{dt}$ через градиент лагранжиана, что даст два новых члена, один с \ddot{q} , а

другой с \dot{q} : $(\nabla_{\dot{q}} \nabla_{\dot{q}}^T \mathcal{L}) \ddot{q} + (\nabla_q \nabla_{\dot{q}}^T \mathcal{L}) \dot{q} = \nabla_q \mathcal{L}$. Здесь данные произведения ∇ - операторов являются

матрицами, например, $(\nabla_q \nabla_{\dot{q}}^T \mathcal{L})_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_j \partial \dot{q}_i}$. Теперь можно использовать обратную матрицу для

поиска решения [34] относительно \ddot{q} :

$$\ddot{q} = \left(\nabla_{\dot{q}} \nabla_{\dot{q}}^T \mathcal{L} \right)^{-1} \left[\nabla_q \mathcal{L} - \left(\nabla_q \nabla_{\dot{q}}^T \mathcal{L} \right) \dot{q} \right] \quad (34)$$

Для заданного набора координат $x_t = (q_t, \dot{q}_t)$ теперь есть метод вычисления \ddot{q}_t по лагранжиану черного ящика, который можно интегрировать для определения динамики системы. Функцию потерь можно определить через расхождение между $\ddot{x}_t^{\mathcal{L}}$ и \ddot{x}_t^{true} .

Другими словами, уравнение (34) говорит, что если предоставлены координаты состояния q и скорости \dot{q} системы, то можем численно повторить ускорение системы \ddot{q} , взяв операцию вычисления Гессiana серого ящика обучающей модели Лагранжиана \mathcal{L} .

Параметризация системного Лагранжиана НС (см. рис. 14), которая предсказывает вид лагранжиана, а затем получает значение ускорения в соответствии с уравнением (34), позволяет сформулировать параметры НС. Если Θ_L – это веса и смещения всей LNN на рис. 16, посредством обратного распространения параметры будут обновлены таким образом, чтобы минимизировать потери (MSE – mean square error – минимум среднеквадратичной ошибки) в соответствии с уравнением

$$\min_{\Theta_L} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left\| \ddot{q}_k = \left(\nabla_{\dot{q}_k} \nabla_{\dot{q}_k}^T \mathcal{L} \right)^{-1} \left[\nabla_{q_k} \mathcal{L} - \left(\nabla_{q_k} \nabla_{\dot{q}_k}^T \mathcal{L} \right) \dot{q}_k \right] \right\|_2^2 \quad (35)$$

Пока описанный LNN изучает только «статическую» часть динамики системы и, таким образом, предполагает, что система сохраняет свою энергию в соответствии с уравнениями Эйлера-Лагранжа. Можем обобщить модель (34) для произвольных неконсервативных сил \mathcal{F} , таких как управляющие воздействия и демпфирующие члены $D(v)$, действующие на систему. Ускорение, полученное в (34), больше не сможет предсказать правильное ускорение, когда на систему действуют неконсервативные силы. Это связано с тем, что эти силы нарушают предположение о сохранении энергии системы в уравнении Эйлера-Лагранжа.

В отличие от предыдущих подходов, метод не ограничивает функциональную форму изученных энергий и позволяет создавать энергосберегающие модели [34] для различных задач (рис. 19).

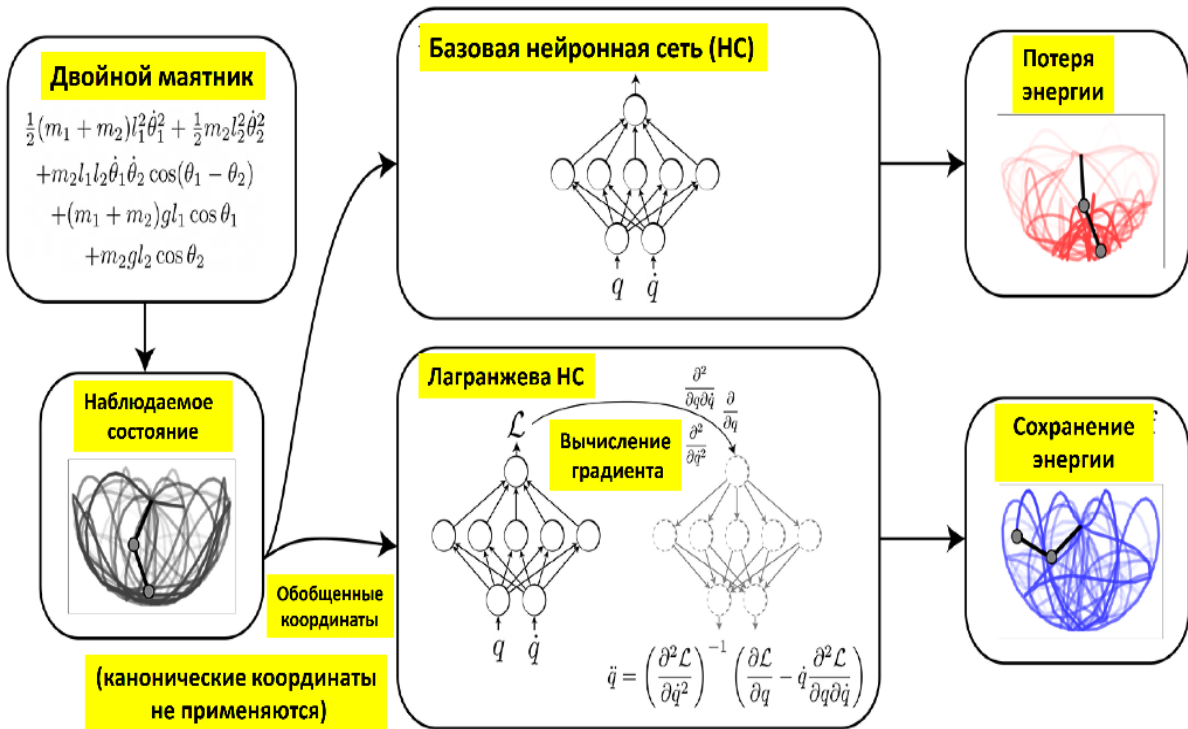


Рис. 19. Иллюстрация применения Лагранжиана для описания динамики физических систем, таких как двойной маятник (черный)

[Нейронные сети (НС) моделируют динамику в течение длительных периодов времени из-за их неспособности сохранять энергию (красный). Исследование произвольных лагранжианов с помощью НС и априорной информации о физической природе исследуемой динамики приведено (синий)].

Пример: Двойной маятник. Эффективная реализация (35) представляет собой сложную техническую задачу. Чтобы обучить эту прямую модель, необходимо вычислить обратный гессиан $(\nabla_{\dot{q}} \nabla_{\dot{q}}^T \mathcal{L})^{-1}$ (используется псевдообратный, чтобы избежать потенциальных сингулярных матриц) НС, а затем выполнить обратное распространение. Обратная матрица масштабируется как $\mathcal{O}(d^3)$ с числом координат d . В результате получено, что LNN и базовый уровень НС приводят к окончательным потерям 7:3 и $7:4 \cdot 10^{-2}$ соответственно (рис. 20).

Из рис. 18, а видно, что LNN и базовая модель одинаково работают при моделировании динамики маятника за короткие периоды времени. Однако, рис. 20, б демонстрирует результат расхождения в определении энергии за очень длительный период времени, т.е. модель LNN сохраняет полную энергию системы значительно лучше, чем базовая НС.

Более значительная разница была в энергосбережении; LNN почти точно сохранял истинную энергию с течением времени, тогда как базовый уровень – нет.

При усреднении по 40 случайным начальным условиям со 100 временными шагами каждое среднее расхождение энергии между истинной полной энергией и предсказанной составило 8% и 0,4% от максимальной потенциальной энергии для базовой модели и модели LNN соответственно.

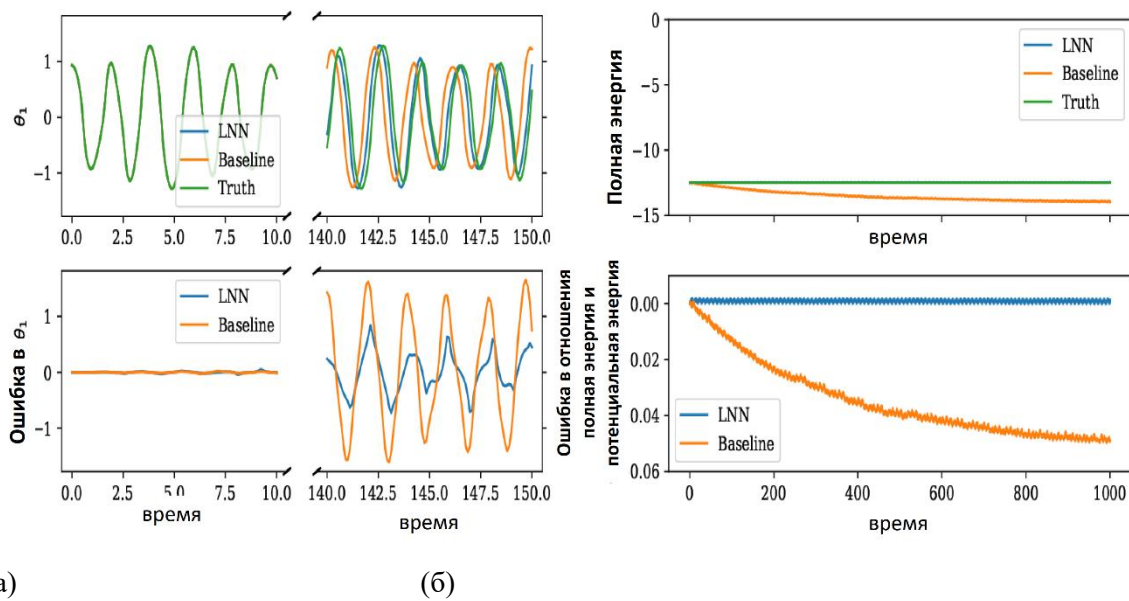


Рис. 20. Результаты моделирования двойного маятника (а) угловая ошибка; и (б) ошибка в энергии

[Для базовых моделей, моделей HNN и LNN использовали четырехслойную модель НС с 500 скрытыми единицами, затухающей скоростью обучения, начиная с 10^{-3} , и размером пакета 32. Приняты единичные масса и длина, учитывались мгновенные ускорения при более 600 000 случайных начальных условий].

Пример: Релятивистская частица в однородном потенциале. Для частицы с массой 1 в гравитационном потенциале g и скорости света $c = 1$ специальная теория относительности дает

$$\text{лагранжиан } \mathcal{L} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\dot{q}^2}} - 1 \right) + gq. \text{ Каноническая форма импульса этой системы равна } \frac{\dot{q}}{\sqrt{1-\dot{q}^2}}$$

Это означает, что гамильтонова НС не справится с задачей обучения, если будут заданы простые наблюдаемые, такие как \dot{q} и q . Чтобы проверить эти утверждения, модели HNN и LNN обучались на системах со случайными начальными условиями и значениями g .

На рис. 21 показано, что *HNN* не работает без канонических координат, тогда как *LNN* может работать без этих дополнительных априорных знаний и обучается системе так же точно, как *HNN*, обученная на канонических координатах.

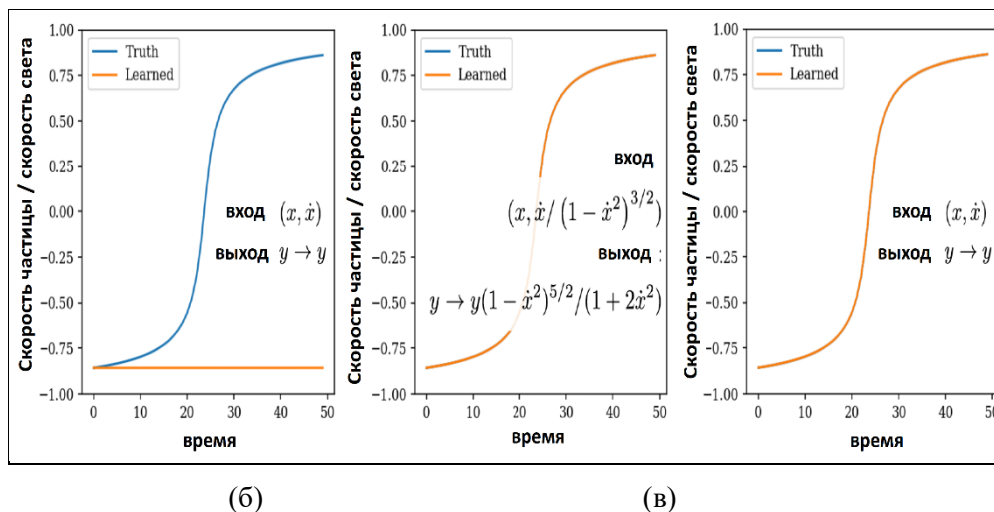


Рис. 21. Результаты моделирования релятивистской частицы: (а) модель *HNN* не может обучить динамику из неканонических координат; (б) *HNN* успешно обучает, когда заданы канонические координаты; (в) *LNN* обучает точной динамике даже при определении неканонических координат

Глубокое машинное обучение достигло значительных результатов во многих задачах с большими объемами данных и обобщением в непосредственной близости от обучающих данных. Для многих важных реальных приложений эти требования невыполнимы, и для преодоления возникающих проблем и «патологических» логических парадоксов требуются дополнительные предварительные знания в предметной области. В частности, изучение физических моделей для управления на основе моделей требует надежной экстраполяции из меньшего количества выборок, которые часто собираются в режиме онлайн в режиме реального времени, а ошибки модели могут привести к серьезным повреждениям системы.

Модели Лагранжиана на основе глубокого машинного обучения и технологии мягких вычислений

Для классификации пригодности модели Лагранжиана глубоким машинным обучением применяются полно-связные НС с прямой связью и обучение с учителем. Входной и выходной слою в структуре полно-связной НС содержат по n нейронов, а скрытых слоев по k , каждый из которых состоит из n нейронов. НС выполняет отображения из входного пространства в выходное пространство. В данном случае входное пространство содержит векторы признаков лагранжианов, а выходное пространство содержит две категории. Основным структурным элементом НС является слой, то есть группа нейронов. Нейроны каждого слоя соединяются с нейронами следующего, и эти соединения называются синапсами. Первый слой сети называется входным слоем, последний слой называется выходным слоем, а все слои между ними называются скрытыми слоями. Упомянутая выше архитектура на рис. 16 описывает типичную полностью связанную НС. Термин «прямая связь» подразумевает сеть, синапсы которой не образуют цикл, в отличие, например, от рекуррентных НС.

Нейроны первого слоя активируются, когда вводится вектор признаков (соответствующий лагранжиану). Активация означает, что нейрон вычисляет значение и пересылает его следующему слою. Поэтому в полносвязной сети все нейроны слоя связаны со всеми нейронами предыдущего слоя через синапсы. Каждый синапс содержит действительное число, называемое весом, которое указывает, насколько активация конкретного нейрона предыдущего слоя влияет на активацию нейрона следующего слоя. Кроме того, каждый нейрон содержит реальное значение, называемое смещением, которое указывает порог, выше которого нейрон будет осмысленно передавать свое значение на следующий уровень (активация).

Для построения моделей новых лагранжианов, применяют генетические алгоритмы. Основная идея генетических алгоритмов заключается в том, что в начальной популяции задается способ

оценки функции пригодности каждого члена, а результат спаривания зависит от пригодности каждого родителя. В результате через несколько итераций «поколений» пригодность текущей популяции будет равна максимуму.

Более того, разные члены популяции «спариваются» для создания новых особей, при этом вклад каждого родителя в соответствующую «дочернюю» популяцию должен быть аналогичен их относительной пригодности. Наконец, происходит случайная «мутация» одного или нескольких элементов каждого «потомка» в соответствии с заранее определенным распределением. Эти шаги соответствуют конструируемому «поколению». После выполнения вышеупомянутых шагов для ряда поколений формируется популяция, каждый член которой имеет пригодность, близкую к максимальной. Конечная популяция не имеет общих членов с исходной.

Архитектура полносвязной НС реализована и обучена различать «пригодные» и «непригодные» лагранжианы для классической теории с одной степенью свободы, свободное движение и $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\dot{x}^2$

. Был протестирован ряд различных архитектур по глубине и ширине сети, и выбрана наиболее перспективная, а именно структура с двумя скрытыми слоями по 16 нейронов в каждом. Оптимальное количество эпох для обучения сети, которое приводит к минимуму ошибку обучения, с одной стороны, и позволяет избежать переобучения, с другой, можно найти путем сравнения ошибок обучения и проверки [33]. Переобучение происходит, когда происходит увеличение ошибки тестирования, в то время как ошибка обучения постоянно уменьшается. Однако ошибка тестирования, уменьшается с течением времени, что приводит к лучшему «поведению» сети, как видно на рис. 22, а,б.

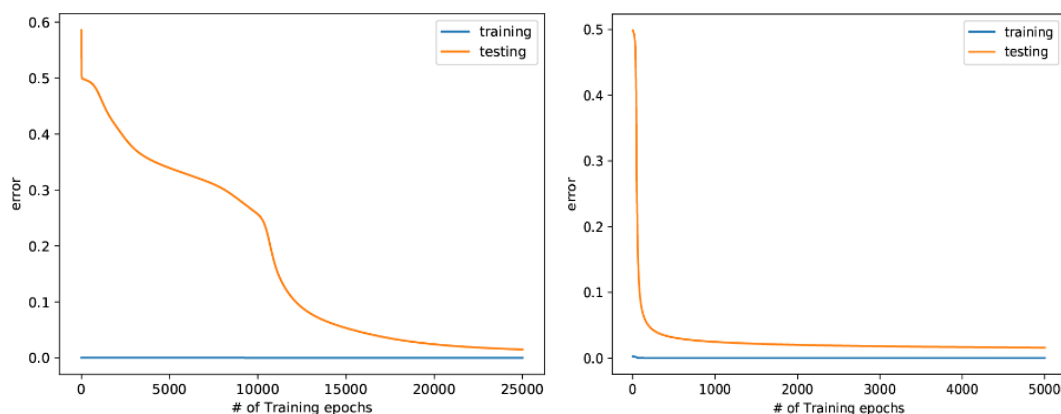


Рис. 22. (а) Ошибки обучения и тестирования в зависимости от эпох обучения для сети 8-6-6-1 с $\eta = 0.1$; (б) Ошибки обучения и тестирования в зависимости от эпох обучения для сети 8-16-16-1 с $\eta = 1$

Для учета числового значения выхода сети определена метрика Кульбака-Лейблера: $-\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M y_{ij} \log(p_{ij})$, где N – длина обучающего набора данных, M – количество различных существующих классов, y_{ij} вероятность того, что i -я точка данных принадлежит j -му классу, и p_{ij} прогнозируемая вероятность. Логарифмическая потеря не имеет верхней границы и существует в диапазоне $[0, \infty)$. Логарифмическая потеря ближе к 0 указывает на более высокую точность, тогда как если логарифмическая потеря находится за пределами 0, это указывает на более низкую точность. Применяя ГА можно спроектировать новые пригодные лагранжианы.

В Таблице 2 представлен список с наиболее пригодными лагранжианами, каждый из которых был выбран из конечной популяции, после 200 поколений, из 10 различных начальных популяций.

Процедура повторялась 10 раз, и для каждой итерации выбирался наиболее точный лагранжиан.

Эти лагранжианы были построены с помощью процедуры машинного обучения без извлечения уравнений поля. Как видно, ГА смог найти правильное свойство, что «пригодный» лагранжиан должен иметь член \ddot{x} в показателе степени 0,1, хотя изначально такое правило не было заложено

(относительно других показателей можно дополнительно требовать, например, целочисленный порядок и т.п.).

В приведенном примере выигрыш незначителен, так как исследователь относительно легко может записать лагранжианы, подобные лагранжианам из Табл. 2, что не приведет к более чем второму порядку в уравнениях поля. Действительно, это верно для этого простого подкласса одномерных лагранжианов, но становится трудоемким для большей размерности и более сложных лагранжианов. Например, в случае гравитационных теорий, таких как общая теория относительности и ее модификации, где используются четыре измерения и лагранжианы, составленные из сокращений тензора кривизны (римановой), невозможно априорно вывести, если лагранжиан приводит к уравнениям движение с членами более чем второго порядка (и, следовательно, является ли оно физически приемлемым или нет), если только эти уравнения не извлечены явно. Более того, даже после явного выделения уравнений движения необходима их тщательная проработка, поскольку члены с производными более чем второго порядка можно было бы взаимно исключить путем подходящего интегрирования по частям.

Табл. 2. Количество «новых» лагранжианов, соответствующих пригодным теориям, построенных с использованием ГА

#	$\mathcal{L} - 1/2\dot{x}^2$
1	$0.15 x^{-0.43} \dot{x}^{-3.58}$
2	$0.51 x^{-2.26} \dot{x}^{-0.32}$
3	$-0.23 x^{-0.09} \dot{x}^{1.02} \ddot{x}$
4	$-0.01 x^{0.04} \dot{x}^{1.72} \ddot{x}$
5	$4.122 x^{-0.08} \dot{x}^{-0.2}$
6	$2.65 x^{-0.17} \dot{x}^{-0.35}$
7	$2.511 x^{-0.49} \dot{x}^{-0.5}$
8	$3.775 x^{-0.2} \dot{x}^{-0.45}$
9	$0.04 x^{-0.23} \dot{x}^{1.38} \ddot{x}$
10	$2.1975 x^{-0.4} \dot{x}^{-0.11}$

Таким образом, даже с помощью обычного программного обеспечения приведенная выше стандартная процедура генерации новых лагранжианов может быть трудоемкой. Следовательно, создание инструментов машинного обучения, которые могут строить пригодные лагранжианы без необходимости выполнять все шаги стандартной процедуры, а именно явное извлечение уравнений поля, их тщательное изучение и уточнение, было бы чрезвычайно полезным для сообщества гравитации, аналитическая и квантовая механика, твердое тело, теоретическая физика, биология и др.

Дополнительные особенности рассматриваемого подхода обсуждаются в [34-38].

Выводы

- Представлен основной подход в создании корректной математической модели динамической системы без потери физической строгости и непротиворечивости физической интерпретации результатов аппроксимации сложной математической модели объекта управления;
- Изложены основные факторы, влияющие на точность и строгость получаемой модели;
- Представлен вариант трансляции получаемых уравнений в вычислительное ПО численного интегрирования (конкретно для системы Матлаб);
- Изложены особенности и технические тонкости вычисления ММ с голономными и неголономными ограничениями;
- Рассмотрены методы глубокого машинного обучения на основе лагранжевых нейронных сетей для построения корректных моделей Лагранжианов динамических систем.

Список источников

1. Основы применения квантовых сквозных ИТ в робототехнике и интеллектуальном когнитивном управлении: стохастическая механика, квантовая информационная физика и информационная геометрия / П. В. Зрелов, В. В. Кореньков, О. Ю. Тятюшкина, С. В. Ульянов // Системный анализ в науке и образовании: сетевое научное издание. 2021, №2. – С. 83–117. – URL : <http://sanse.ru/download/439>.
2. Hamil P. Lagrangians and Hamiltonians. Cambridge Univ. Press, UK, 2014.
3. Flannery M.R. d'Alembert-Lagrange analytical dynamics for nonholonomic systems // Journal of Mathematical Physics. – 2011, №52, 032705. – DOI: 10.1063/1.3559128
4. Ulyanov S.V. Self-organizing control system . Patent No.: US 6,411,944 B1. Date of Patent: Jun. 25, 2002 (Filed: Mar. 17, 1998; Foreign Application Priority Data Mar. 21, 1997 (JP) 9-087426).
5. Ульянов В. С. Моделирование неголономных, существенно нелинейных динамических систем с использованием методов мягких вычислений с приложениями : диссертация к.т.н. – Тверь: ТвГУ, 2001.
6. Ulyanov S. V. Optimization Control Method for Shock Absorber. Patent No.: US 6,212,466 B1. Date of Patent: Apr. 3, 2001 (Filed: Jan. 18, 2000).
7. Ulyanov S. V. , Panfilov, S. System and method for stochastic simulation of nonlinear dynamic systems with a high degree of freedom for soft computing applications. USA Patent Application Publication. US 2004/0039555 A1. 2004.
8. García-Garrido V. J., Wiggins S. Lagrangian Descriptors and the Action Integral of Classical Mechanics // arXiv:2204.04728v1 [math.DS] 10 Apr 2022.
9. Green C. D. Equations of Motion for the Cart and Pole Control. – Colin Green, 2020. – Дата публикации: 04.01.2020.–URL: <https://sharpneat.sourceforge.io/research/cart-pole/cart-pole-equations.html#appendixB/>.
10. Момент инерции // Википедия : свободная энциклопедия. – URL : https://ru.wikipedia.org/wiki/Момент_инерции
11. Векторное произведение // Википедия : свободная энциклопедия. – URL : https://ru.wikipedia.org/wiki/Векторное_произведение
12. Момент силы // Википедия : свободная энциклопедия. – URL : https://ru.wikipedia.org/wiki/Момент_силы
13. Таблица моментов инерции // Википедия : свободная энциклопедия. – URL : https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_moments_of_inertia
14. Технология мягких вычислений : Учебно-методическое пособие. Часть 3: Введение в Интеллектуальную Робототехнику / А. В. Николаева, А. Г. Решетников, С. В. Ульянов, В. С. Ульянов . – Москва: КУРС, 2020. – 408 с.
15. Robust Fuzzy Control of Non-Linear Dynamic Systems Based on Soft Computing with Minimum of Entropy Production Rate / S. A. Panfilov [et al.] // Proc. Int. Conf. ICAFS 2000, Siegen, Germany. – 2000.
16. Principle of minimum entropy production in applied soft computing for advanced intelligent robotics and mechatronics/ V. S. Ulyanov, S. A. Panfilov, S. V. Ulyanov etc. // Soft Computing. –2000. – Vol. 2.
17. Computational intelligence with new physical controllability measure for robust control algorithms of extension-cableless robotic unicycle/ V. S. Ulyanov [et al.] // Journal of Advanced Computational Intelligence. – 1999. – Vol.3. – No.2.
18. A new physical measure for mechanical controllability and intelligent control of a robotic unicycle on basis of intuition, instinct and emotion computing / S. V. Ulyanov [et al.] // Proc. 2nd Intern. Conf. on Application on Fuzzy Systems and Soft Computing (ICAF'96), Siegen, Germany. – 1996. – Pp. 49-58.

19. Soft computing for the intelligent control of a robot unicycle based on a new physical measure for mechanical controllability // S. V. Ulyanov [et al.] // Soft Computing. – 1998. – Vol. 2. – No.2.
20. Computational intelligence for robust control algorithms of complex dynamic systems with minimum entropy production. Part1: simulation of entropy-like dynamic behavior and Lyapunov stability / S. V. Ulyanov [et al.] // Journal of Advanced Computational Intelligence. – 1999. – Vol.3. – No. 2.
21. Green C. D. Equations of Motion for the Cart and Pole Control. – Colin Green, 2020. – Дата публикации: 04.01.2020.–URL: <https://sharpneat.sourceforge.io/research/cart-pole/cart-pole-equations.html#appendixB/>.
22. Голономные ограничения - Holonomic constraints // abcdef.wiki : [веб-сайт]. – URL : https://ru.abcdef.wiki/wiki/Holonomic_constraints
23. Неголономная система - Nonholonomic system // abcdef.wiki : [веб-сайт]. – URL : https://ru.abcdef.wiki/wiki/Nonholonomic_system
24. Борисов А. В. Неголономные динамические системы. Интегрируемость, хаос, странные аттракторы / А. В. Борисов; под ред. И. С. Мамаев. – Москва ; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 328 с. – URL : <http://window.edu.ru/resource/932/67932/files/ics4.pdf>.
25. Шмутцер Э. Основные принципы классической механики и классической теории поля (канонический аппарат) / Э. Шмутцер. Москва: Мир. 1976.
26. An Approach to the Dynamics and Control of Uncertain Robot Manipulators / X. Yang [et al.] // Algorithms. – 2019. – Vol. 12. – P. 66. – DOI : 10.3390/a12030066. – URL: www.mdpi.com/journal/algorithms
27. Komoda K., Wagatsuma H. Energy-efficacy comparisons and multibody dynamics analyses of legged robots with different closed-loop mechanisms // Multibody Systems Dynamic. – 2017. – Vol. 40. – P. 123–153. – DOI: 10.1007/s11044-016-9532-9
28. Exploiting Null Space in Aerial Manipulation through Model-In-The-Loop Motion Planning / A. Ivanovic A. [et al.] // arXiv:2204.13540v1 [cs.RO] 28 Apr. 2022.
29. Wei S.X. , Harderup P., Burdick J. W. Differential Flatness and Flatness Inspired Control of Aerial Manipulators based on Lagrangian Reduction // arXiv:2111.01302v1 [cs.RO] 2 Nov 2021.
30. Rouch N. Stability Theory by Lyapunov's Direct Method / N. Rouch, P. Habets, M. Laloy. – Berlin : Springer. – 1977.
31. Ulyanov S.V. Self-organizing control system. Patent No.: US 6,411,944 B1. Date of Patent: Jun. 25, 2002 (Filed: Mar. 17, 1998; Foreign Application Priority Data Mar. 21, 1997 (JP) 9-087426).
32. Dynamic Grasping with a “Soft” Drone: From Theory to Practice / J. Fishman [et al.] // arXiv:2103.06465v1 [cs.RO] 11 Mar 2021.
33. Building healthy Lagrangian theories with machine learning / C. Valelis [et al.] // arXiv:2002.00049v3 [physics.comp-ph] 20 Jun 2021.
34. Lagrangian neural networks / Cranmer M. [et al.] // arXiv:2003.04630v2 [cs.LG] 30 Jul 2020.
35. Machine-Learning Non-Conservative Dynamics for New-Physics Detection / Liu Z. [et al.] // arXiv:2106.00026v2 [cs.LG] 2 Jun 2021.
36. Physics- informed machine learning / G. E. Karniadakis [et al.] // NATURE REVIEWS. – 2021. – Vol. 3 – Pp. 423-440.
37. Scientific Machine Learning through Physics-Informed Neural Networks: Where we are and What’s next / S. Cuomo [et al.] // arXiv:2201.05624v3 [cs.LG] 13 Feb 2022.
38. When physics meets machine learning: a survey of physics-informed machine learning / C. Meng et al. // arXiv:2203.16797v1 [cs.LG] 31 Mar 2022.