

МОДЕЛИ КВАНТОВЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ НАНОТЕХНОЛОГИИ

Ульянов Сергей Викторович

Доктор физико-математических наук, профессор;

ГОУ ВПО «Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»,

Институт системного анализа и управления;

PronetLabs;

141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Университетская, 19;

e-mail: ulyanovsv@mail.ru.

Дано описание основных принципов разработки информационных технологий интеллектуального управления квантовыми и релятивистскими системами применительно к формированию компьютерных нанотехнологий. Показана роль базиса квантовой механики и теории относительности в задачах проектирования элементной базы квантовых компьютеров. Рассмотрены модели квантового интеллектуального управления материальными частицами с учетом ограничений теории относительности в виде заданной метрики пространственно-временного континуума.

Ключевые слова: уравнения квантовой релятивистской механики, метрики пространства-времени, интеллектуальное управление.

MODELS OF QUANTUM RELATIVISTIC CONTROL OBJECTS AND COMPUTER SCIENCE IT NANOTECHNOLOGY

Ulyanov Sergey

Doctor of Science in Physics and Mathematics, professor;

Dubna International University of Nature, Society and Man,

Institute of system analysis and management;

PronetLabs;

141980, Dubna, Moscow reg., Universitetskaya str., 19;

e-mail: ulyanovsv@mail.ru.

Main principles of intelligent control information technology of quantum relativistic systems with applications to computer science nanotechnology design are described. The role of quantum mechanics and theory of relativity in the tasks of quantum computer hardware design is shown. Quantum intelligent control models of particles with relativity theory constraints as space-time metrics are considered.

Keywords: wave equations of quantum relativistic mechanics, metrics of space-time, intelligent control.

Введение

Разработка и развитие новых информационных технологий (ИТ) основаны на достижениях фундаментальных наук в области физики, математики, биологии, теории искусственного интеллекта, теории управления и мн. др. Однако многие из полученных результатов в области фундаментальных наук не востребованы инженерией системного проектирования в силу трудности восприятия и практического применения данного результата или, с другой стороны, недооценкой многих исследований прикладной стороны и коммерческой привлекательности полученного интеллектуального продукта.

В данном тематическом номере рассмотрена проблемно-ориентированная область разработки наукоемких ИТ – прорывные инновационные технологии интеллектуального управления квантовыми релятивистскими системами в компьютерных нанотехнологиях с целью показать перспективность данной технологии при разработке коммерчески привлекательных интеллектуальных продуктов в области робототехники, космической техники, квантового управления в нанотехнологии, информа-

ционно-управляющих комплексов социально и экономически значимых объектов, защиты информации и безопасности систем и др.

Одно из обстоятельств закономерного интенсивного развития наукоемких ИТ интеллектуального робастного управления в компьютерных нанотехнологиях связано с известным фактом появившейся возможности для системной инженерии доступного (для использования в проектировании) изложения квантовых и релятивистских макро эффектов, которые лежат в основе управления как космическими летательными аппаратами (КЛА), так и квантовыми системами, находящимися под действием слабых гравитационных полей.

С точки зрения физики и системной инженерии КЛА и квантовая частица (со спином или без спина) являются объектами управления (ОУ), находятся в геометрическом пространстве-времени с определенной метрикой, в гравитационном поле под воздействием внешних сил и должны быть описаны соответствующими математическими моделями, которые содержат надлежащие эффекты. Проявление учтенных в моделях эффектов отражается на качестве интеллектуального управления, а базы знаний интеллектуальных систем управления (ИСУ) проектируются с учетом физической сущности ОУ.

Период переосмысления системной инженерией необходимости учета такого рода эффектов осуществлен благодаря работам Эйнштейна, Дирака, Фейнмана, Алферова, Манина, Дейча, Шора, Гровера и др. в области разработки основ квантовой инженерии, а также Синга, Котельникова, Уилла, Седова, Эшби, Брумберга, Копейкина и др. в области релятивистской небесной механики.

Необходимость разработки ИТ с учетом квантовых и релятивистских эффектов продиктована также объективной формой (подтвержденная практикой) законов Мура (1965 г.) и Ландауэра (1961 г.), которые показали направление развития микроминиатюризации элементной базы электронных устройств, эволюция которой привела к необходимости учета ограничений в процессах проектирования потерь от тепловых и квантовых флуктуаций, а также физической меры стоимости квантовых вычислительных процессов.

Однако прогресс развития и создания подобного рода ИТ сталкивается с трудностью восприятия специалистами логики интерпретации квантовых и релятивистских эффектов, которые можно использовать для создания технологии проектирования новых видов компьютеров типа квантового компьютера (включая новые виды квантового программирования, технологий интеллектуальных вычислений таких как квантовые мягкие вычисления, квантовые генетические алгоритмы, квантовые нейронные сети, ДНК вычисления и др.) и применять на практике управления сложными объектами управления в непредвиденных ситуациях управления.

В данной статье обсуждается также важный (и необходимый для практики) методологический аспект: корректность, сложность и аппроксимация подробного описания (и доступного для специалистов в области теории и систем управления) физических и математических моделей ОУ на основе релятивистской квантовой механики. Модель ОУ является источником извлечения знаний и используется в интеллектуальных квантовых мягких вычислениях для проектирования моделей робастных ИСУ в непредвиденных ситуациях управления.

Необходимость данного описания объясняется во многом трудностями восприятия квантовых и релятивистских эффектов, результатов квантовой теории информации и возникающих при физической интерпретации логических «парадоксов», противоречащих выводам классической Булевой логики. Переход от традиционных методов к новым инновационным технологиям доступного изложения основ квантовой механики и теории относительности связан также с фактом существования психологического и информационного барьеров восприятия инженерной аудиторией физической модели интерпретации логики событий в теории относительности и математического аппарата квантовой механики, «парадоксов» выводов квантовой логики.

Данный факт отражается непосредственно, например, при изложении решений, получаемых на основе квантовых алгоритмов, или при выводе уравнений движения КЛА в искривленном пространстве-времени при воздействии случайных возмущений.

Поэтому для разработки прикладных моделей новых видов интеллектуальных вычислений и их эффективного применения в прикладных задачах управления возникла необходимость более детального и доступного изложения основ квантовой механики, используемых, например, в теории квантовых вычислений и квантовых алгоритмов. В частности, в настоящее время в институте системного анализа и управления (ИСАУ) Международного университета природы, общества и человека «Дуб-

на» особое внимание данному вопросу уделяется при подготовке бакалавров, магистров и инженеров-исследователей в области компьютерных технологий, информационных систем управления (ИСУ) и принятия решений, робототехники и мехатроники.

В данной статье рассмотрены только отдельные особенности разработки ИТ интеллектуального управления квантовыми и релятивистскими системами, которые на отдельных примерах более детально освещены в статьях данного тематического номера.

Квантовые эффекты в системном проектировании микро- и нанороботов: от микроэлектроники к наноробототехнике

Изменение размерности ОУ тесно связано с изменением физической модели и ее интерпретации. На рис. 1 показаны физические шкалы размерности и соответствующие виды ОУ.

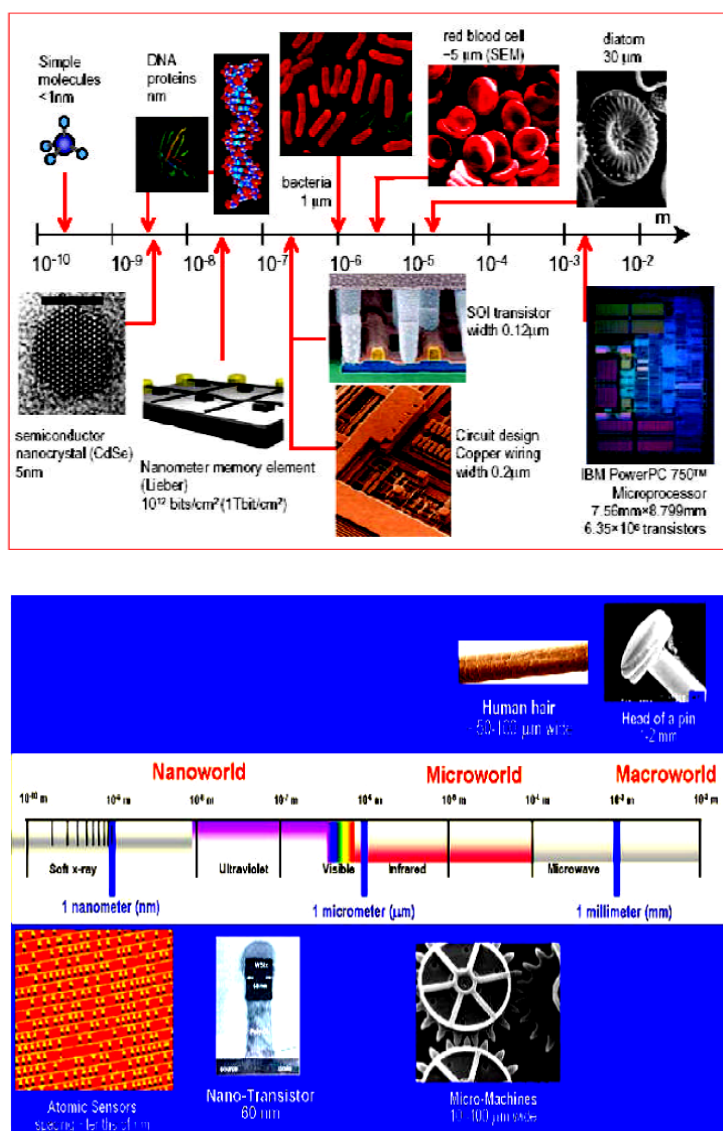


Рис. 1. Физические шкалы и размерность объектов управления

Наноробототехнические (NEMS – nano-electromechanical systems) и микроэлектромеханические (MEMS – micro-electromechanical systems) механические системы представляют собой яркий пример проявления квантовых эффектов из-за возможности реализации на малых расстояниях квантовой суперпозиции из классических состояний.

На рис. 2-6 представлены примеры MEMS/NEMS устройств, в которых проявляются эффекты суперпозиции [1-16].

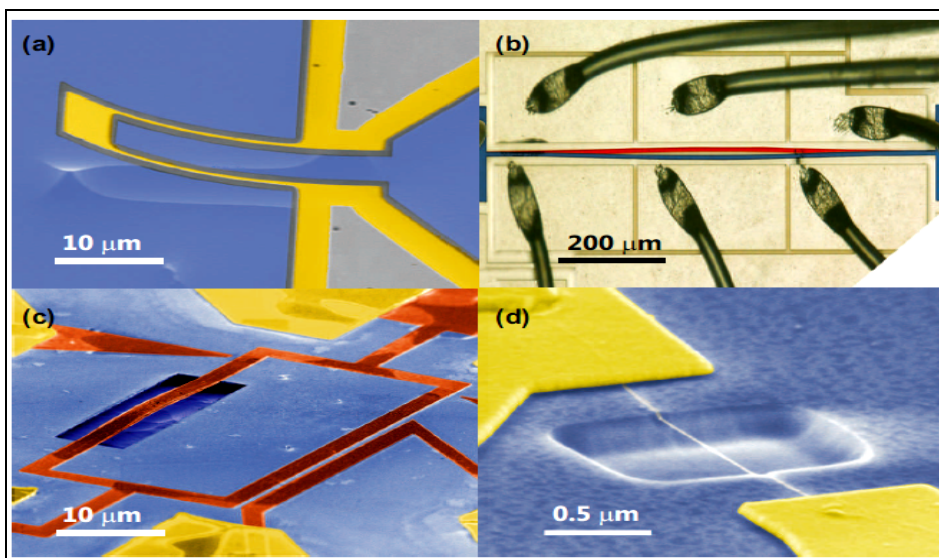


Рис. 2. Различные типы MEMS/NEMS устройств (Delft University of Technology) [1]

(а) – пьезорезистивная консоль; отклонение от прямого направления изменяет электрическую проводимость между двумя сторонами консоли. Данный резонатор используется для определения массы тела; (в) – устойчивый гибкий луч. Красный и синий цвета показывают две устойчивые позиции луча, который используется для кодирования цифровой информации; (с) – резонатор, встроенный в сверхпроводящее устройство (красный цвет). Магнитное поле контролирует положение луча при прохождении магнитного потока через контур; (d) – подвешенная карбоновая нанотрубка (белый цвет) в качестве гибкого резонатора

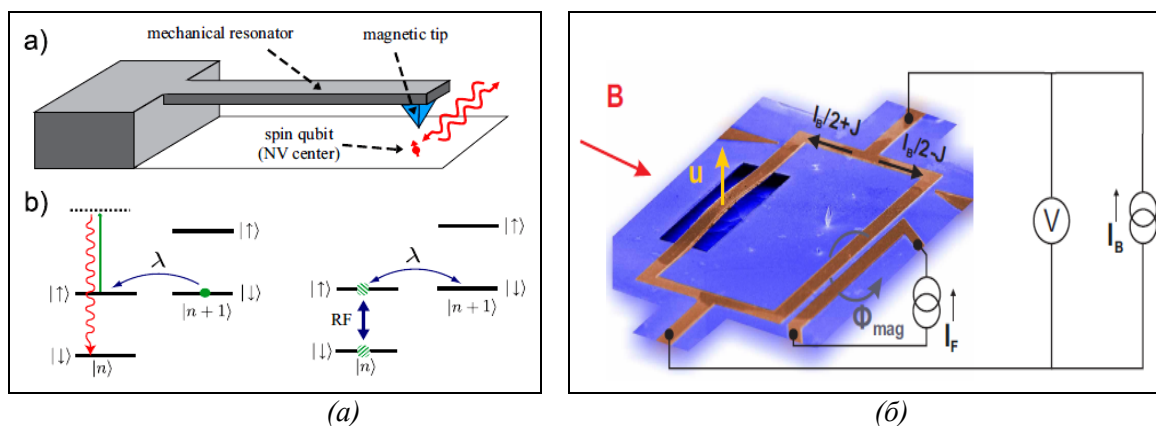


Рис. 3. Спин электрона ассоциированный с вакантной позицией примеси в кристалле, связанной с позицией сдвига Зеемана при движении магнитной головкой NEMS: (а) – охлаждение движущейся NEMS и порождение соответствующего состояния резонатора, используя когерентную связь со спином электрона и связь с накачиваемых оптических сигналов в RF-диапазоне; (б) – схема резонатора на сверхпроводящем устройстве [1]

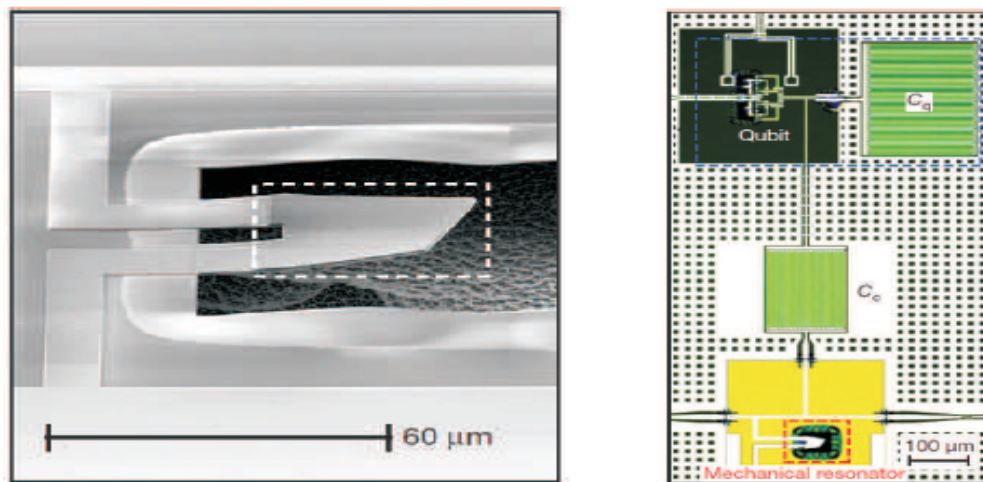


Рис. 4. Механический резонатор, связанный с кубитом схемы Джозефсона; механический резонатор (слева) охлажден в криогенной установке до основного состояния и демонстрируется возможность манипулировать его квантовым состоянием на одиночном фононном уровне. Квантовые свойства резонатора реализуются на сверхпроводящем кубите (справа) [1]

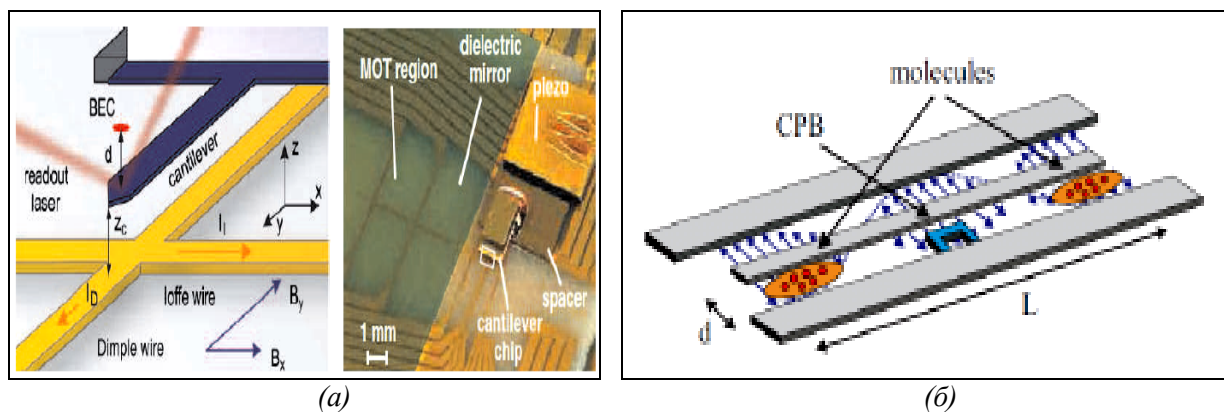


Рис. 5. Конденсат Бозе-Эйнштейна на атомном чипе, встроенном в консоль [1]; Движение консоли воспроизводит потенциал атомов, которые приводят к связанному движению в консоле (слева – вид устройства; вибрации консоли с атомами регистрируются с помощью луча лазера; слева – фотография устройства) (а); и Блок формирования кубита на паре Купера и ансамбле поляризованных молекул (связанных состояний в микроволновой полосе фотонов. Строгая связанность состояний достигается на квазиодномерной структуре длиной порядка см и шириной порядка мкм) [16]) (б)

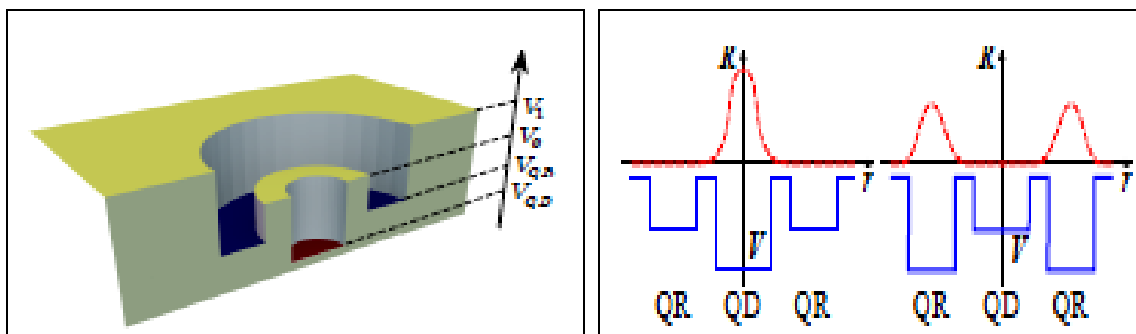


Рис. 6. Разрез квантовой точки с указанием потенциальных барьеров туннелирования (а); и виды основных и возбужденных состояний волновых функций при различных соотношениях высоты потенциальных барьеров (б)

Изучение квантовых эффектов в сверхтонких полупроводниковых гетероструктурах дало толчок появлению нового класса полупроводниковых приборов – резонансных туннельных диодов (РТД) и транзисторов (РТТ), обладающих высоким быстродействием (предельные частоты 10^{12} Гц).

Обсуждаются широко проблемы создания квантовых интегральных схем и квантового компьютера, основными элементами которых станут квантовые точки. Квантовые проводники, квантовые ямы, транзисторные структуры на основе квантовых размерных эффектов и устройств с управляемой интерференцией электронов.

Основу развивающейся нанoeлектроники составляют структуры, состоящие из чередующихся полупроводниковых слоев с различными электрофизическими характеристиками (см. рис. 7).

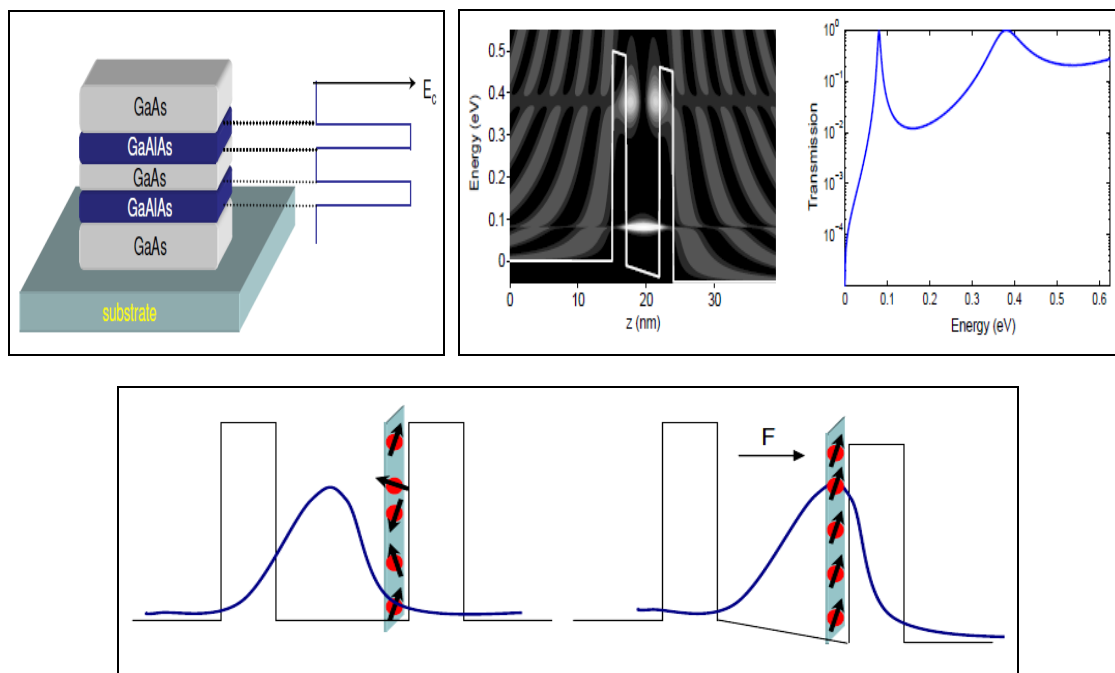


Рис. 7. Многослойные наноструктуры, состоящие из чередующихся полупроводниковых слоев с различными электрофизическими характеристиками и обладающие различными свойствами туннелирования в зависимости от вида потенциалов

Подобные, рассмотренным выше, структуры отличаются от однородных полупроводников наличием резких изменений потенциалов. Наиболее часто для описания электронных свойств многослойных структур используют метод огибающих волновых функций, в котором в области каждого слоя влияние его периодического потенциала сводится к подстановке в оператор кинетической энергии эффективной массы, а изменения законов дисперсии на гетерограницах играют роль эффективных потенциалов. Поэтому многие задачи оценки особенностей энергетического спектра и исследования движения частиц сводятся к исследованию поведения частиц в системах с различными видами потенциальных барьеров [17-20], типа представленных на рис. 7.

Рассмотрим ниже некоторые особенности поведения простейших квантовых систем в разных видах потенциальных барьеров и их принципиальное отличие от поведения классических систем. Удобнее всего это сравнение провести на примере исследования динамического поведения классического и квантового осцилляторов в заданном потенциальном поле.

Классический и квантовый гармонический осциллятор

Классический гармонический осциллятор хорошо изучен в механике и для потенциальной энергии, зависящей от квадрата смещения u для позиции равновесия $V(u) = \frac{1}{2}ku^2$, где k – постоянная, при наличии силы возмущения $F(t)$ и наличии сил трения уравнение движения имеет вид: $m\ddot{u} + m\gamma\dot{u} + ku = F(t)$, где γ – коэффициент затухания и m – масса резонатора.

Колебания резонатора осуществляются с частотой ω , а соотношение $Q = \omega / \gamma$ характеризует количество колебаний, которое совершит резонатор до того как его энергия, убывая, не достигнет фактора равновесия.

На рис. 8 (а, б) показана реакция гармонического резонатора на импульсное воздействие и его амплитудно-фазовая характеристика.

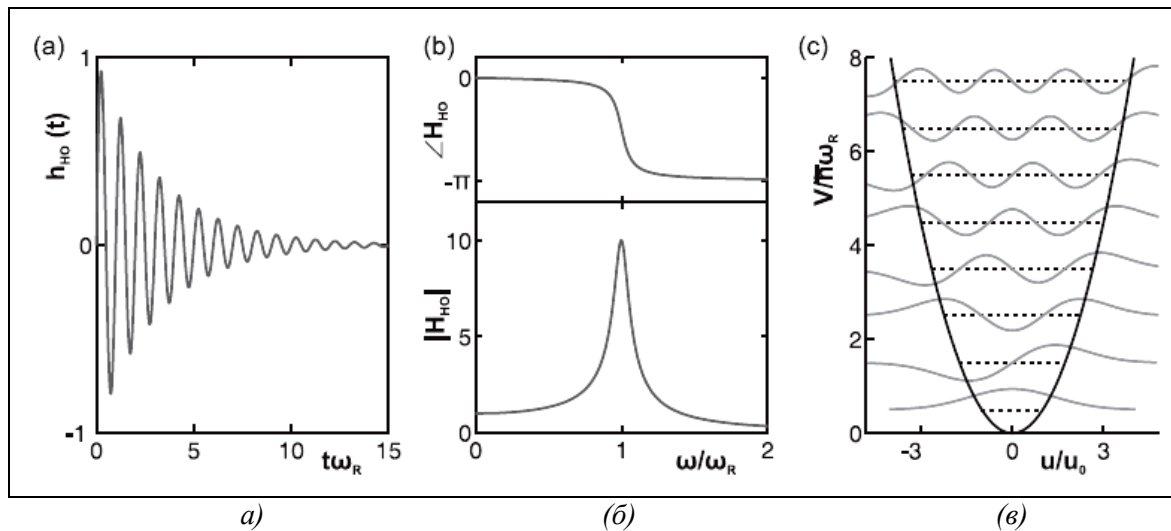


Рис. 8. Реакция гармонического резонатора на импульсное воздействие (а); амплитудно-фазовая характеристика резонатора при $Q = 10$ (б); энергетические уровни E_n (пунктир) и соответствующие волновые функции $\psi_n(u)$ (сплошные) для квантового осциллятора для $n = 0, 1, 2, \dots, 7$ (в)

В квантовой механике гармонический осциллятор описывается Гамильтонианом $\hat{H} = \hat{p}^2 / 2m + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{u}^2$, $\hat{p} = -i\hbar \cdot \partial / \partial u$, а смещение описывается волновой функцией $\psi(u)$ и удовлетворяет уравнению Шрёдингера: $\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{u}^2 = E\psi$.

Это уравнение решается с помощью введения понятия операторов рождения и аннигиляции в виде: $\hat{a}^\dagger = (m\omega\hat{u} - i\hat{p}) / \sqrt{2m\hbar\omega}$ и $\hat{a} = (m\omega\hat{u} + i\hat{p}) / \sqrt{2m\hbar\omega}$, соответственно. Тогда Гамильтониан принимает вид $\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right)$, где $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ определяет количество фононов в осцилляторе. Энергетические уровни определяются как $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$ с собственными значениями состояний $|n\rangle$. Соответствующие волновые функции ψ_n показаны на рис. 8 (в).

Характерным признаком квантового эффекта является в этом случае наличие нижнего ($n = 0$) собственного состояния с ненулевым значением энергии $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$, которое называется нулевой энергетической точкой. Вероятность найти положение резонатора u определяется как $|\psi_0(u)|^2$, когда резонатор находится в основном состоянии.

Нулевая точка движения u_0 является стандартным отклонением данной плотности вероятностей $u_0 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} u^2 |\psi_0(x)|^2 du \right)^{1/2} = \langle 0 | \hat{u}^2 | 0 \rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$. Нулевая точка движения является важной размерной шкалой, определяющей квантовый предел непрерывных линейных измерений.

На рис. 9 (а, б) показаны подробно вычисления энергетических уровней и соответствующих волновых функций квантового осциллятора по сравнению с классическим осциллятором для квадратичного потенциала.

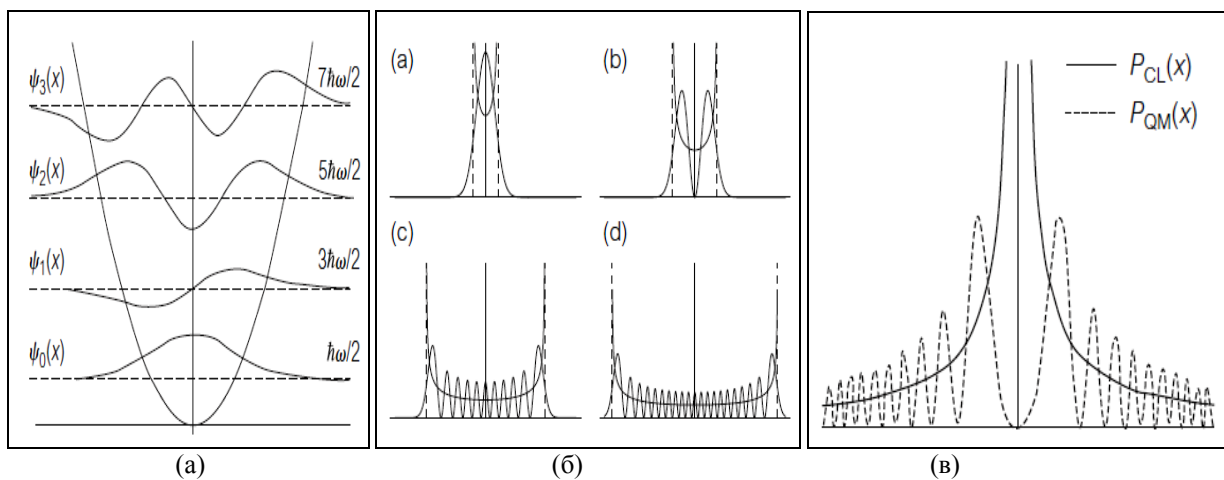


Рис. 9. Энергетические уровни и соответствующие волновые функции квантового осциллятора (а) и (б); (в) – различие поведения неустойчивого классического $p_{cl}(x)$ и квантового $p_{qm}(x)$ осциллятора

Для случая нахождения частицы вблизи состояния неустойчивого равновесия имеем $V(u) = -\frac{1}{2}ku^2$ и безразмерное уравнение Шрёдингера имеет вид:

$$\frac{d^2\psi(y)}{dy^2} + y^2\psi(y) = -\varepsilon\psi(y).$$

При $\varepsilon = 0$ решение уравнения Шрёдингера аппроксимируется волновой функцией в виде:

$$\psi(y) \propto \frac{\sin(y^2/2)}{\sqrt{y}} \left(\text{или} \frac{\cos(y^2/2)}{\sqrt{y}} \right),$$

что приводит к оценке плотности вероятности $P_{qm} \propto \frac{\sin^2(y^2/2)}{y}$.

Оценка плотности вероятности для классического осциллятора имеет вид $P_{cl}(y) \propto \frac{1}{2y}$.

На рис. 9 (в) показано сравнение и принципиальное различие поведения классического и квантового осцилляторов вблизи неустойчивого состояния равновесия.

На рис. 10 приведено сравнение влияния вида потенциальных барьеров на волновые функции при симметричном и асимметричном формах потенциалов [21].

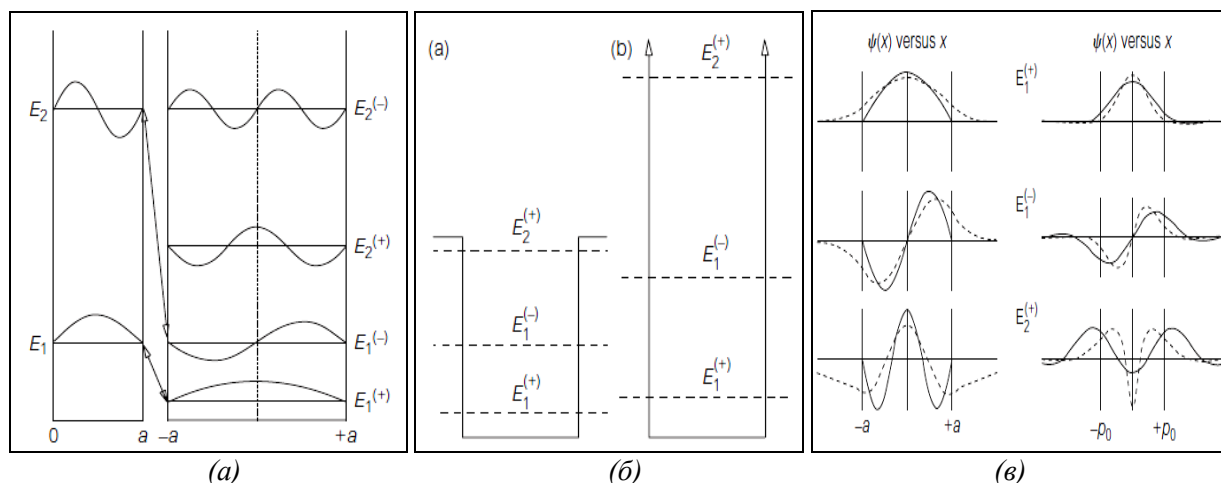


Рис. 10. Вид волновых функций при асимметричном и симметричном потенциалах (а); вид конечного и бесконечного потенциалов (б); сравнение вида волновых функций в пространстве состояний (слева) и пространстве моментов (справа) при симметричном бесконечном (сплошная) и конечном (пунктирная) потенциалах с энергетическими уровнями на рис. 10 (б)

С точки зрения приложений технология NEMS является хорошим инструментарием для обнаружения массы одноатомов, механических вычислений и эффективных процессов обработки сигналов в радиодиапазоне частот и микро-волноводов. С научной точки зрения данные устройства интересны фактом возможности охлаждения до температур, на которых резонатор находится в основном состоянии. На рис. 1 показаны некоторые шкалы для таких устройств.

В [22, 23] показано экспериментально, что механический пьезоэлектрический резонатор с частотой 6 ГГц может долго находиться в основном квантовом состоянии и демонстрирует неклассическое поведение в квантовом пределе.

Квантовые ограничения и корректность описания моделей ОУ

Ранее основное внимание было уделено роли и влиянию геометрии пространства-времени и релятивистских ограничений на корректность описания модели ОУ¹. Рассмотрим теперь аналогичные ограничения с позиции принципов квантовой механики.

Корректность идентификации моделей ОУ

В общей теории динамических систем в ряде случаев оптимальные статистические процедуры для Гауссовских случайных полей оказываются, как правило, линейными. Для стационарных полей линейные статистические задачи приводят к исследованию уравнений Фредгольма 1-го рода типа:

$$y(t) = \int_0^t k(t-s)x(s)ds, \quad t \in [0, T], \quad [x, y] = 0,$$

и являются для идентификации ОУ или его входного сигнала $[x(t), k(t)]$ некорректными задачами по Тихонову. Учет квантовой природы описываемых полей (например, бозонных) приводит к рассмотрению интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода типа [24]:

$$y(t) = \frac{\hbar}{2} x(t) + \int_0^t k(t-s)x(s)ds, \quad t \in [0, T], \quad [x, y] = i\hbar,$$

где \hbar – постоянная Планка.

¹ С.В., Ульянов и др. Физическая корректность знаний и алгоритмическая сложность описания робастных моделей объектов управления. Ч. 1 // Системный анализ в науке и образовании: электрон. науч. журнал. – Дубна, 2011. – № 3. – [Электронный ресурс]. URL: <http://www.sanse.ru/archive/21>. – 0421100111\0025.

Таким образом, учет квантовой природы физического поля (квантовые ограничения в виде некоммутативности наблюдаемых) приводит к естественной регуляризации некорректных задач, исследуемых в теории управления традиционными ОУ.

Обсудим теперь роль квантовых ограничений на поведение ОУ в виде брахистохрона.

Квантовый брахистохрон

Рассмотрим предварительно особенности физической интерпретации проблемы оптимизации эволюции квантового брахистохрона. Исследование квантовой эволюции $|\psi(t)\rangle$ физической системы между двумя чистыми состояниями $|\psi_{in}\rangle = |\psi(t=0)\rangle$ и $|\psi_{fin}\rangle = |\psi(t=\tau)\rangle$ при условии $\langle\psi_{in}|\psi_{fin}\rangle = 0$ и $\langle\psi_{in}|\psi(t)\rangle \neq 0$ для $0 \leq t < \tau$, представляет большой интерес для квантовых информационных процессов и квантовых вычислений.

В таких процессах квантовая эволюция, соединяющая начальное состояние с требуемым четко различимым конечным состоянием, рассматривается как элементарный физический процесс передачи информации. Эволюция квантового брахистохрона в виде пары начального $|\psi_{in}\rangle = |\psi(t=0)\rangle$ и конечного $|\psi_{fin}\rangle = |\psi(t=\tau)\rangle$ состояний, соединяет два данных состояния оптимальной траекторией за возможно кратчайшее время τ . При этом накладывается ограничивающее условие на разницу между значениями максимальной собственной энергии E_{\max} и минимальной собственной энергии E_{\min} для Гамильтониана, определяющего эволюцию $|\psi_{in}\rangle \xrightarrow{H} |\psi_{fin}\rangle$, в виде требования быть меньше или равным постоянной энергии 2ω .

В задаче оптимизации поиска оптимальной траектории квантового брахистохрона из всех возможных траекторией соединяющих состояния $|\psi_{in}\rangle$ и $|\psi_{fin}\rangle$ выбирается траектория с минимальным временем и проверяется выполнение ограничений на энергию. Если ограничения не выполняются (т.е., разница между указанными собственными энергиями Гамильтониана как угодно большая), то существуют траектории эволюции квантового брахистохрона, соединяющие данные состояния с любым минимально возможным временем. Соотношение Anandan-Aharonov является стандартным инструментарием для выявления роли энергетических ограничений в задаче оптимального движения квантового брахистохрона. Квантовая эволюция (независимо от условий оптимальности временной траектории) определяется отношением Anandan-Aharonov в виде: $\int \Delta E(t) dt = \frac{\hbar}{2} S$, где по определению величина $\Delta E(t)$ – неопределенность энергии $\Delta E(t)^2 = \langle\psi|H^2|\psi\rangle - \langle\psi|H|\psi\rangle^2$ (аналог дисперсии в теории вероятностей) и $S = \int ds$ – длина пути квантовой траектории $|\psi(t)\rangle$, измеряемой метрикой Fubini-Study (см. Приложение).

Согласно определению метрики Fubini-Study, расстояние между двумя замкнутыми близкими (инфинитезимальными) точками на квантовой траектории определяется как:

$$ds^2 = 4 \left(1 - |\langle\psi(t)|\psi(t+dt)\rangle|^2 \right).$$

Примечание. Рассмотрим кратко особенности метрики Fubini-Study. Эволюция нестационарного квантового состояния $|\psi(t)\rangle$ описывается уравнением Шрёдингера в виде $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle$, $H(t)$ – Гамильтониан квантовой системы. Разлагая в ряд Тейлора инфинитезимальное состояние, $|\psi(t+dt)\rangle$, получим в результате:

$$|\psi(t+dt)\rangle = |\psi(t)\rangle - \frac{i}{\hbar} dt H |\psi(t)\rangle - \frac{(dt)^2}{2\hbar} \left[i \frac{dH}{dt} |\psi(t)\rangle + \frac{1}{\hbar} H^2 |\psi(t)\rangle \right] + O((dt)^3).$$

Тогда результат внутреннего произведения $\langle \psi(t) | \psi(t+dt) \rangle$ дает

$$|\langle \psi(t) | \psi(t+dt) \rangle|^2 = 1 - \frac{(dt)^2 (\Delta E)^2}{\hbar^2} + O((dt)^3), \text{ где } (\Delta E)^2 = \langle \psi | H^2 | \psi \rangle - \langle \psi | H | \psi \rangle^2.$$

В частном случае независимости Гамильтониана от времени величина $\Delta E(t)$ постоянная и время T , требуемое для квантовой эволюции состояния из начального $|\psi_{in}\rangle$ в конечное $|\psi_{fin}\rangle$ определяется как $T = \frac{\hbar S}{2\Delta E}$.

Таким образом, в данном примере рассмотрим задачу для квантовой системы в виде определения оптимального управления перемещением квантовой частицы между заданными начальным и конечным состояниями. Рассмотрим общий метод решения задачи: определения оптимального времени достижения конечного состояния квантовой системой.

Исследование указанной задачи оптимизации проводится на основе метода объединения геометрического пространства квантового состояния и динамического поведения квантовой системы, определяемого классом Гамильтонианов.

Естественной метрикой геометрического пространства квантовых состояний, как отмечалось выше, является метрика Fubini-Study: $ds^2 = \langle d\psi | (1-P) | d\psi \rangle$, $P = 1 - |\psi\rangle\langle\psi|$, для вектора состояний $|\psi\rangle$. Время для перемещения квантовой частицы определяется в виде $T[|\psi\rangle] = \int \frac{ds}{\Delta E}$, где ΔE – стандартное отклонение энергии. Данное выражение выведено Anandan и Aharonov, определяя одновременно соотношение неопределенности «время-энергия». Используя комплексные параметры $\{w^i\}_{i=1}^n$ для представления точки $|\psi\rangle$ в проективном Гильбертовом пространстве $P_n(\mathbb{C})$ в виде $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{w}^j w^j}} |1, w^1, \dots, w^n\rangle$, вариационный принцип для $T[|\psi\rangle]$ приводит к уравнению брахистохрона в виде:

$$\frac{d^2 w^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dw^j}{ds} \frac{dw^k}{ds} = \left(\frac{dw^i}{ds} \frac{d}{ds} - g^{\bar{j}j} \frac{\partial}{\partial \bar{w}^j} \right) \log \Delta E.$$

Выбирая Гамильтониан в виде $\sum_i h_i^2 = [\text{tr}(HX_i)]^2 = \omega^2$, где $\{X_i\}$ задает базис для группы преобразований $su(n+1)$, а ω – постоянная, получим дополнительное условие: $\frac{\partial}{\partial h_i} \log \Delta E = 2\lambda \Delta E h_i$, а λ – множитель Лагранжа.

Рассмотрим простейший случай 2-уровневой квантовой системы в виде квантового бита (кубит). Система определяется в виде Гамильтониана $H(t) = \hbar \cdot \sigma = \omega U_0 \sigma_z U_0^\dagger$. В результате получим решение: $|\psi(t)\rangle = U_0 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} \end{bmatrix} = U_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\omega t} |0 = \psi_{in}(0)\rangle + e^{-i\omega t} |1 = \psi_{fin}(T)\rangle)$, где U_0 – постоянный унитарный оператор для диагонализации Гамильтониана H .

Полученное выражение для траектории 2-уровневой квантовой системы является решением уравнения Шрёдингера и геометрически представляет геодезическую траекторию в виде большой циклоиды на сфере Блоха (см., рис. 11,б).

Для заданных квантовых состояний $\{|\psi_I\rangle, |\psi_F\rangle\}$ существуют разные типы Гамильтонианов, принадлежащих данному множеству, под действием которых начальное состояние $|\psi_I\rangle$ эволюционирует

во времени в конечное состояние $|\psi_F\rangle$. Поэтому, в простейшей форме проблема квантового брахистохрона сводится к решению двух задач: 1) найти Гамильтониан H , удовлетворяющий заданным ограничениям такой, что унитарное преобразование:

$$|\psi_F\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} Ht\right\} |\psi_I\rangle$$

осуществлялось за кратчайшее время; и 2) найти величину времени, которое необходимо для реализации данного преобразования.

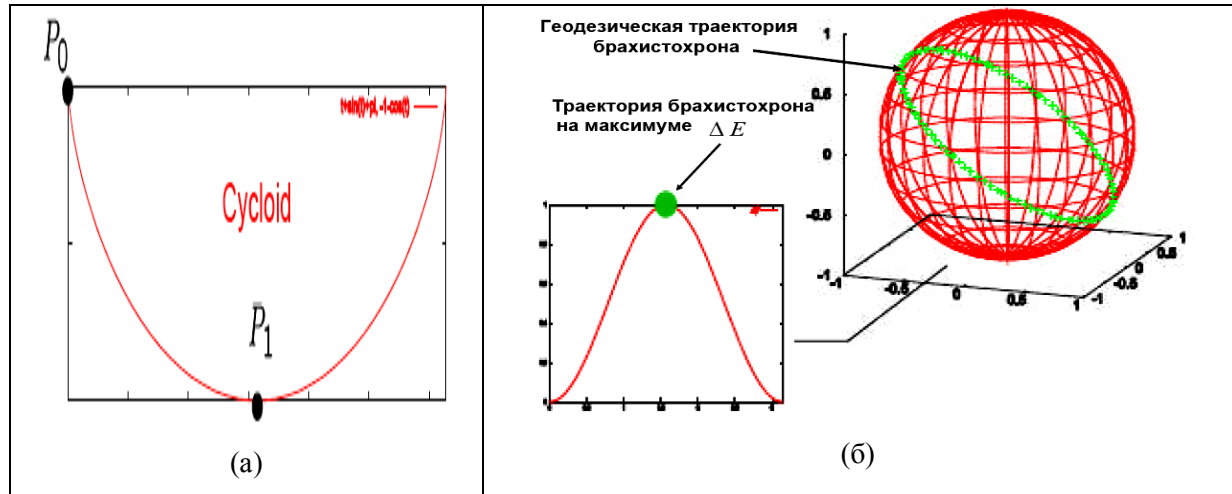


Рис. 11. Геодезическая траектория большой циклоиды на сфере Блоха

Рассмотрим пример квантового брахистохрона для указанных условий.

В Таблице 1 приведены решения указанных задач для более общих случаев.

Таблица 1: Вид общих решений задачи квантового брахистохрона

Вид	Эрмитов ортогональность ($\langle\psi_F \psi_I\rangle=0$)	Обобщенный неортогональность ($\langle\psi_F \psi_I\rangle=a, a =\sqrt{1- b ^2}$)	Неэрмитов ортогональность ($\langle\psi_F \psi_I\rangle=0$)
Гамильтониан H системы	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} s & re^{-i\theta} \\ re^{i\theta} & u \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} re^{i\theta} & s \\ s & re^{-i\theta} \end{pmatrix}$
Ограничение	$\omega = E_{\max} - E_{\min}$	$\omega^2 = (s-u)^2 + 4r^2$	$\omega^2 = 4s^2 - 4r^2 \sin^2 \theta$
Уравнение движения квантовой системы	$ \psi_t\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega t}{2\hbar}\right) \\ -i \sin\left(\frac{\omega t}{2\hbar}\right) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = e^{-\frac{1}{2\hbar}i(s+u)t} \begin{pmatrix} \cos\frac{\omega t}{2\hbar} - i\frac{s-u}{\omega} \sin\frac{\omega t}{2\hbar} \\ -i\frac{2r}{\omega} e^{i\theta} \sin\frac{\omega t}{2\hbar} \end{pmatrix}$	$e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}tr \cos \theta}}{\cos \alpha} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega t}{2\hbar} - \alpha\right) \\ -i \sin\left(\frac{\omega t}{2\hbar}\right) \end{pmatrix}$
Время τ	$\tau_p = \frac{\pi\hbar}{2\Delta H} = \frac{\pi\hbar}{\omega}$	$\tau = \frac{2\hbar \arcsin b }{\omega}$	$t = \frac{\hbar}{\omega}(2\alpha - \pi),$ $\sin \alpha = \frac{r}{s} \sin \theta$

Таким образом, как следует из Таблицы 1, время перехода из начального в конечное состояние квантовой системы может быть значительно меньше (порядка величины $\hbar - \text{постоянная}$) классического аналога, а в случае неэрмитова Гамильтониана при $\alpha \rightarrow \frac{1}{2}\pi$ время достижения конечного состояния стремится к нулю [29-33].

Рисунок 12 показывает принципиальное различие решения задачи квантового брахистохрона от классического варианта в зависимости от имеющихся физических ограничений [25, 26].

Оптимальной траекторией движения квантового брахистохрона является траектория геодезической на сфере Блоха (см., рис. 12,а), но при дополнительных ограничениях оптимальная траектория может быть отлична от геодезической траектории.

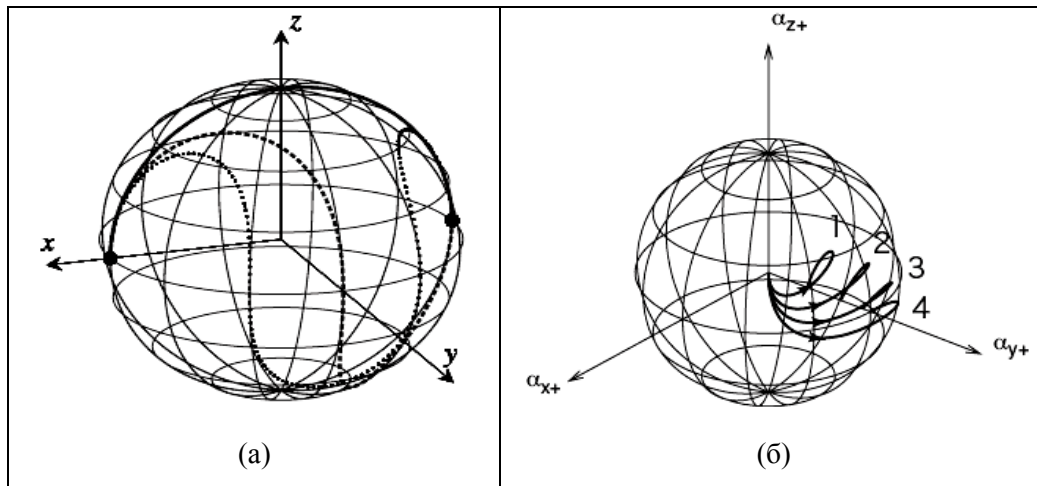


Рис. 12. Различие решения задачи квантового брахистохрона

Квантовый брахистохрон и реализация запутанных состояний

Рассмотрим, следуя [30], важную для практики квантовых вычислений и теории квантовых алгоритмов задачу определения оптимального пути для квантовой ячейки, описываемой оператором эволюции запутанных состояний $U_{3.C.}$ следующего вида:

$$U_{3.C.} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Данная ячейка, действуя на начальное состояние $|00\rangle$, производит φ -зависимое запутанное состояние: $U_{3.C.}|00\rangle = \cos \varphi |00\rangle - \sin \varphi |11\rangle$. Например, при $\varphi = \frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi$ получим максимально запутанные состояния Белла: $|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$.

Оптимальный φ -зависимый Гамильтониан имеет вид:

$$H(t) = \pm \sqrt{2}\omega \begin{bmatrix} -\cos \mu(t) & 0 & 0 & \sin \mu(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \mu(t) & 0 & 0 & \cos \mu(t) \end{bmatrix}, \quad \mu(t) = 2(\gamma_+ t + \psi_+), \quad \psi_+ = \omega(x-1)/\sqrt{x(1-x/2)}.$$

На рис. 12 (б) показаны оптимальные траектории для данного Гамильтониана при $\varphi = k\pi/8, k = 1, 2, 3, 4$.

Как следует из рис. 12 (б) оптимальные траектории для квантовой ячейки, порождающей запутанные состояния, не являются геодезическими, а сам Гамильтониан зависит от времени. Согласно [30], физическая реализация такой матрицы осуществляется квантовыми ячейками с оптимальным минимальным временем в условиях конечной энергии, которое задается в виде $\omega t_\varphi = \pi \sqrt{x \left(1 - \frac{1}{2}x\right)}$,

где $x = \frac{\varphi}{\pi}$ и ω является постоянной величиной, определяемой из условий ограничений, зависит от шкалы времени и принимается, как $\omega = 1$.

Физическое время $t_{\text{Физич}}$ реализации операции порождения запутанных состояний данными квантовыми ячейкам определяется как произведение полного числа ячеек $N_{\text{Ячеек}}$ и оптимальным временем t_φ в виде $t_{\text{Физич}} = N_{\text{Ячеек}} \times t_\varphi$.

Рисунок 13 показывает, что физическая реализация матрицы U_φ зависит от параметра φ и определяется концепциями сложности ячеек и временной сложности реализации операции.

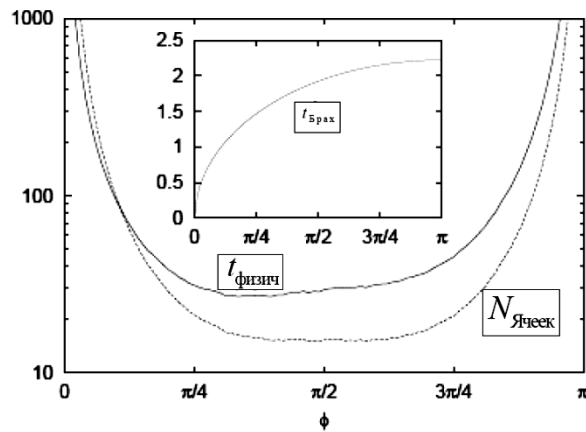


Рис. 13, Условия физической реализации матрицы U_φ

График на рис. 13 для $N_{\text{Ячеек}}$ интерпретируется как время, необходимое для выполнения операции, если все ячейки выполняют каждую операцию за оптимальное время $t_\varphi = 1$. В этом случае все ячейки со значением φ из интервала $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ эффективно используются для реализации алгоритма. Оптимальная ячейка определяется при $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Однако, как следует из рис. 13, оптимальное значение физического времени $t_{\text{Физич}}$ отличается от времени реализации операции всеми ячейками $N_{\text{Ячеек}}$. Асимметрия поведения $t_{\text{Физич}}$ по отношению к $N_{\text{Ячеек}}$ следует из поведения оптимального времени квантового брахистохрона t_φ . Так как $N_{\text{Ячеек}}$ симметрично относительно $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, то $t_{\text{Физич}}$ соответствует нижней границе значений $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Данный пример отражает важную роль временной сложности в проектировании квантовых алгоритмов на основе квантовых ячеек. Следовательно, решение проблемы квантового брахистохрона позволяет решать задачу проектирования квантовых ячеек минимальной временной сложности при реализации эффективных квантовых алгоритмов.

Рассмотрим еще одну возможность повышения качества решения задачи о квантовом брахистохроне с помощью новых методов квантовой механики на основе т.н. PT -симметрий Гамильтониана и преобразований Лоренца теории относительности.

Влияние PT -симметрии на динамическое поведение квантового брахистохрона

Требование сопряженности $H = H^\dagger$ от Гамильтоновых операторов (Эрмитов оператор), введенное в квантовую механику Дираком, не является обязательным [27-29, 32, 33]. Данное требование является аксиомой и может быть ослаблено за счет введения физического условия симметрии к отражению (инверсии координат) пространства-времени, PT -симметрия в виде $H = H^{PT}$, без нарушения других аксиом квантовой механики.

Гамильтонианы, удовлетворяющие приведенному условию, называются PT -симметричными. В этом случае оператор \mathcal{P} пространственного отражения, или оператор паритетности, действует на квантовомеханические операторы координат \hat{x} и момента \hat{p} в виде изменения знаков следующим образом: $\mathcal{P}\hat{x}\mathcal{P} = -\hat{x}$ и $\mathcal{P}\hat{p}\mathcal{P} = -\hat{p}$. Оператор \mathcal{P} линеен, сохраняет инвариантным в алгебре Гейзенберга основное фундаментальное коммутационное соотношение квантовой механики: $\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar 1$, где 1 означает идентичную матрицу. Обратимый оператор \mathcal{T} времени оставляет инвариантным оператор \hat{x} , но меняет знак оператора \hat{p} на обратный, т.е., $\mathcal{T}\hat{x}\mathcal{T} = \hat{x}$ и $\mathcal{T}\hat{p}\mathcal{T} = -\hat{p}$.

Подобно оператору \mathcal{P} , оператор \mathcal{T} также сохраняет фундаментальные коммутационные соотношения инвариантными, но изменяет знак комплексного числа i : $\mathcal{T}i\mathcal{T} = -i$. Поэтому оператор \mathcal{T} нелинейный и называется *антилинейным*. Поскольку операторы \mathcal{P} и \mathcal{T} осуществляют отражение, то их квадраты являются единичными операторами: $\mathcal{P}^2 = \mathcal{T}^2 = 1$, а сами коммутируют как $\mathcal{PT} - \mathcal{TP} = 0$. В терминах операторов \mathcal{P} и \mathcal{T} можно определить Гамильтониан H^{PT} как $H^{PT} \equiv (\mathcal{PT})H(\mathcal{PT})$ и Гамильтониан является PT -симметричным, если выполняется условие коммутации $H(\mathcal{PT}) - (\mathcal{PT})H = 0$. Поэтому PT -симметричный Гамильтониан не обязательно должен быть Эрмитов.

Оператор Гамильтониана $H = H^{PT}$ самосопряженный по отношению к новому внутреннему произведению, которое отличается от стандартного внутреннего произведения квантовой механики Дирака. Это новое внутреннее произведение определяется в терминах линейного оператора \mathcal{C} , удовлетворяющее следующим трем уравнениям:

$$\mathcal{C}^2 = 1, [\mathcal{C}, H] = 0 \text{ и } [\mathcal{C}, \mathcal{PT}] = 0.$$

Для заданного Гамильтониана вид оператора определяется как решение приведенных трех уравнений. Так, например, Гамильтониан $H = \begin{pmatrix} re^{i\theta} & s \\ s & re^{-i\theta} \end{pmatrix}$ из Таблицы 1 (третий столбец) является PT -симметричным, где \mathcal{T} задает операцию комплексного сопряжения, а оператор $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ задает операцию инвертирования (логического отрицания).

Для данного варианта оператор H имеет действительные собственные значения $E_{\pm} = r \cos \theta \pm \sqrt{s^2 - r^2 \sin^2 \theta}$ при $s^2 > r^2 \sin^2 \theta$. Данное неравенство определяет область выполнения условия PT -симметрии. Ненормированные собственные состояния оператора H имеют вид: $|E_+\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} \\ e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix}, |E_-\rangle = \begin{pmatrix} ie^{-i\alpha/2} \\ -ie^{i\alpha/2} \end{pmatrix}$, где параметр α определяется из условия $\sin \alpha = \frac{r}{s} \sin \theta$. Тогда $\mathcal{C} = \frac{1}{\cos \alpha} \begin{pmatrix} i \sin \alpha & 1 \\ 1 & -i \sin \alpha \end{pmatrix}$ и \mathcal{CPT} нормы собственных состояний определяются в виде $\sqrt{2 \cos \alpha}$.

Таким образом, PT -симметричный Гамильтониан имеет действительные собственные значения, которые эквивалентны Эрмитову Гамильтониану.

Эрмитов оператор \mathcal{CP} положителен и может быть записан в виде $\mathcal{CP} = e^Q$. Поэтому с помощью преобразования подобия $\hat{H} = e^{-\frac{1}{2}Q} H e^{\frac{1}{2}Q}$ можно построить соответствующий Эрмитов оператор \hat{H} в том смысле, что имеет одинаковые собственные значения. Состояния в PT -симметричной теории отражаются оператором $e^{-\frac{1}{2}Q}$ в соответствующие состояния в Эрмитовой теории. Но так как данный оператор не сохраняет норму квантового состояния в подобном Гильбертовом пространстве, то относительные свойства состояния могут быть изменены в процессе преобразования. Например, расстояние между двумя квантовыми состояниями не является постоянным в исходном Гильбертовом пространстве.

Рассмотренный PT -симметричный Гамильтониан характеризуется тремя действительными параметрами, число которых может быть недостаточным при определении минимального времени перехода начального состояния $|\psi_{in}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ в произвольное состояние $|\psi_{fin}\rangle$. Как следует из решения, представленного в Таблице 1 (третий столбец), состояние $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ можно перевести в состояние $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, если только относительная фаза между a и b задается в виде $\left(\pm \frac{1}{2}\pi\right)$.

Поэтому PT -симметричный Гамильтониан более общего вида описывается четырьмя действительными параметрами (x, y, z, γ) как:

$$Y = \begin{pmatrix} x + (z + iy) & \frac{z}{\tan \gamma} - iy \tan \gamma \\ \frac{z}{\tan \gamma} - iy \tan \gamma & x - (z + iy) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} (z + iy) & \frac{z}{\tan \gamma} - iy \tan \gamma \\ \frac{z}{\tan \gamma} - iy \tan \gamma & -(z + iy) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} \sin \gamma & \cos \gamma \\ \cos \gamma & -\sin \gamma \end{pmatrix},$$

для которого ограничения на энергию $E_+ - E_- = \omega$ имеют гиперболическую форму:

$$\omega^2 = 4z^2 \csc^2 \gamma - 4y^2 \csc^2 \gamma.$$

В этом случае начальное состояние $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ эволюционирует согласно уравнению:

$$e^{-iHt/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-ixt/\hbar} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega t}{2\hbar}\right) + \frac{2y}{\omega} \sin\left(\frac{\omega t}{2\hbar}\right) - i \frac{2z}{\omega} \sin\left(\frac{\omega t}{2\hbar}\right) \\ -\frac{2y}{\omega} \tan \gamma \sin\left(\frac{\omega t}{2\hbar}\right) - i \frac{2z}{\omega \tan \gamma} \sin\left(\frac{\omega t}{2\hbar}\right) \end{pmatrix}$$

и время эволюции определяется, как $\sqrt{\left(\frac{2z}{\omega \sin \gamma}\right)}$ и сохраняется \mathcal{CPT} норма эволюции начального

состояния. Поэтому общая форма конечного состояния определяется как $|\psi_{fin}\rangle = \sqrt{\frac{2z}{\omega \sin \gamma}} \begin{pmatrix} ue^{iA} \\ ve^{i(A+\xi)} \end{pmatrix}$,

где u, v, A и ξ – действительные параметры. Тогда время достижения конечного состояния может быть как угодно малым при выборе соответствующих значений параметров u, v, A и ξ . При этом матричные элементы Гамильтониана имеют большие значения в этом пределе, но это возможно в силу гиперболического характера ограничений на энергию.

Следовательно, квантовые аналоги классических задач могут приводить к новым динамическим эффектам в ОУ.

Информационно–термодинамические ограничения на модели ОУ

Рассмотренные выше квантовые и релятивистские физические ограничения на описание моделей ОУ ограничения необходимо дополнить информационно-термодинамическими ограничениями.

Квантовые ограничения на пропускную способность канала передачи информации

В классической теории информации К. Шенноном получено выражение пропускной способности канала связи для соотношения P/N (сигнал/шум) и полосой пропускания $W = \frac{\omega}{2\pi}$ следующего вида: $C = W \ln \left(1 + \frac{P}{N} \right)$. Из данного выражения следует, что при $N \rightarrow 0$ величина $C \rightarrow \infty$, что физически нереализуемо.

Для квантового канала передачи информации с учетом квантовых флуктуаций для пропускной способности C имеем следующее выражение [34]:

$$C = W \ln \left(1 + \frac{P}{N + N_0} \right),$$

где N_0 – интенсивность квантового шума.

Таким образом, при $N \rightarrow 0$, $\lim_{T \rightarrow 0} C = W \ln \left(1 + \frac{P}{N_0} \right)$, т.е., является величиной ограниченной.

Термодинамическое ограничение на качество управления

Для классического ОУ, описываемого в общем виде $\dot{q} = \varphi(q, u, t)$, где q – обобщенная координата, u – управление, имеем термодинамический критерий оптимального распределения устойчивости, управляемости и робастности в виде:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_i q_i \varphi(q_i, u, t) + (S_{OY} - S_{Pez}) (\dot{S}_{OY} - \dot{S}_{Pez}),$$

где S_{OY}, S_{Pez} – производства энтропии (потери ресурса – полезной работы), V – функция Ляпунова. Физические ограничения на производство энтропии позволяют выполнить требования, предъявляемые к функции Ляпунова, и минимизировать потери полезного ресурса.

При этом достигается максимальная управляемость ОУ и выполняется критерий физической реализуемости оптимального процесса управления (функция пригодности в ГА в виде минимума производства обобщенной энтропии).

Приведенные примеры указывают на необходимость учета физических особенностей при построении корректных моделей исследуемого класса ОУ в виде дополнительных ограничений на структуру модели и подчеркивают их роль в повышении качества, корректности и полноты описания. Введение физических и информационных ограничений, как отмечено выше, в формализованное описание модели ОУ существенно влияет на качество формируемой БЗ в ИСУ, а исключение этих ограничений из описания моделей ОУ приводит к некорректности и потере робастности проектируемых законов управления соответственно.

Поэтому одной из сложных и ключевых проблем разработки основы информационной технологии проектирования ИСУ для такого широкого класса ОУ является создание процесса проектирования робастных БЗ в непредвиденных ситуациях управления для исполнительского уровня иерархиче-

ской структуры управления, учитывающего в продукционных правилах БЗ реальные физические и информационные ограничения.

В приведенных выше примерах рассмотрены вопросы влияния физических эффектов на корректное описание моделей ОУ и являются *внешними* факторами по отношению к классическим представлениям описания ОУ. Однако существуют классические ОУ, содержащие скрытые в структуре квантовые эффекты.

Выводы

Дана оценка влияния квантовых и релятивистских эффектов на эффективное решение традиционных задач теории искусственного интеллекта, информатики, теории сложности алгоритмов, теории и систем управления и др. В частности, к ним относятся теория игр, семантика и когнитивные процессы познания, лингвистические процессоры обработки естественного языка, интерпретации физических теорий и моделей измерений, обработки и распознавания изображений, теории вычислений и алгоритмов, робототехника и мехатроника, и мн. др. области. Даны описания квантовых эффектов и сведения из теории квантовых вычислений, используемые в информационной технологии проектирования робастных баз знаний. Рассмотрены вопросы корректного описания объектов управления с учетом физических ограничений. Результаты исследований показали, что при использовании квантовых стратегий для обработки классической информации возникает существенная возможность извлечения скрытых в классических ОУ дополнительных ресурсов и расширения их эффективного применения в процессах принятия оптимальных решений.

Приложение

Квантовые геометрические аналоги классических моделей кривизны в геометрии искривленных пространственно-временных континуумов. Рассмотрим в качестве примера факты геометрии пространства квантовых состояний. Расстояние между двумя квантовыми состояниями $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ можно определить различными способами (V. V. Dodonov, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, A. Wunsche, Phys. Scripta 59, 81 (1999)). Например, широко применяемые меры расстояния Fubini-Study (FS) и Wootters (W) определяются соответственно в следующем виде:

$$d^{(FS)}(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) = \gamma \left(\sqrt{1 - |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2} \right) \text{ и } d^{(W)}(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) = \arccos \gamma |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|,$$

где γ – постоянная величина. Несмотря на внешнее различие, данные меры расстояния эквивалентно определяют расстояние между квантовыми состояниями. Так для близких состояний, когда $|\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2 = 1 - \delta^2$, где δ – малая величина, имеем соотношение $d^{(FS)} = d^{(W)} = \gamma \delta$. Аналогичным образом определяются другие меры расстояний (см., ниже). Аналогично данному результату элементы длины для семейства (множества) векторов квантовых состояний $|\psi(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^k)\rangle$ параметризованных k параметрами $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^k$, определенные на заданных метриках расстояния, эквивалентны для различных определений расстояния $ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j$ с метрическим тензором:

$$g_{ij} = \gamma^2 \text{Re} \left(\langle \psi_i | \psi_j \rangle - \langle \psi_i | \psi \rangle \langle \psi | \psi_j \rangle \right), \text{ где } |\psi_i\rangle = \frac{\partial}{\partial \xi^i} |\psi(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^k)\rangle.$$

Приведенная форма метрики расстояния применяется на практике многими исследователями и обычно принимается $\gamma = 2$. Тогда для двумерного случая g_{ij} является метрическим тензором сферы с единичным радиусом (сфера Блоха).

При рассмотрении эволюции квантового состояния, описываемой уравнением Шрёдингера, вводится понятие скорости квантовой эволюции $\vartheta = \frac{ds}{dt} = \frac{\gamma}{\hbar} \sqrt{\langle (\Delta H)^2 \rangle}$, где $\Delta H = H - \langle H \rangle$.

Рассмотрим теперь определение геодезической кривой на пространстве векторов квантовых состояний. Геодезическая линия (однопараметрическое множество векторов квантовых состояний), соединяющая два вектора состояний $|\psi_0\rangle$ и $|\psi_1\rangle$ можно определить как линейную комбинацию (аналог суперпозиции)

$$|\psi(\xi)\rangle = C[(1-\xi)|\psi_0\rangle + \xi|\psi_1\rangle e^{i\phi}], \quad (\text{П.1})$$

где ξ – параметр, принимающий значения от 0 до 1.

Примечание. Фазовый множитель $e^{i\phi}$ выбирается следующим образом. Векторы $|\psi_0\rangle$ и $|\psi_0\rangle e^{i\phi_0}$ определяют эквивалентные квантовые состояния. Поэтому требуется выполнение условия эквивалентности геодезических линий определенных между состояниями $|\psi_0\rangle$ и $|\psi_1\rangle$, и состояниями $|\psi_0\rangle e^{i\phi_0}$ и $|\psi_1\rangle e^{i\phi_1}$. Данное условие выполняется, если выбрать $e^{i\phi} = \frac{\langle\psi_1|\psi_0\rangle}{|\langle\psi_1|\psi_0\rangle|}$. Условие нормализации для параметра C определяется из выражения внутреннего произведения $\langle\psi(\xi)|\psi(\xi)\rangle = 1$ и имеет следующий вид:

$$C = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi(1-\xi)(1 - |\langle\psi_1|\psi_0\rangle|)}}.$$

Отметим, что геодезическая линия (П.1) является множеством состояний и существует много способов её параметризации. В геометрии квантовых состояний показано, что длина кривой в квантовом пространстве состояний не зависит от пути её параметризации.

Для вычисления длины геодезической линии удобно представлять определяющее её уравнение в виде

$$|\psi(\xi)\rangle = C\left[\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)|\psi_0\rangle + \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)|\psi_1\rangle e^{i\phi}\right], \quad (\text{П.2})$$

где новый параметр $0 \leq \theta \leq \pi$ и константа нормализации $C = \frac{1}{\sqrt{1 + |\langle\psi_1|\psi_0\rangle|\sin\theta}}$.

Подчеркнем, что (П.1) и (П.2) адекватно описывают однопараметрическое семейство векторов квантовых состояний в виде геодезических линий.

Используя определение метрики как $g_{ij} = \gamma^2 \text{Re}(\langle\psi_i|\psi_j\rangle - \langle\psi_i|\psi\rangle\langle\psi|\psi_j\rangle)$ для однопараметрического множества состояний (П.2) дает выражение:

$$ds = \frac{\gamma}{2} \frac{\sqrt{1 - |\langle\psi_1|\psi_0\rangle|^2}}{(1 + |\langle\psi_1|\psi_0\rangle|\sin\theta)}.$$

Тогда длина геодезической линии, соединяющей состояния $|\psi_0\rangle$ и $|\psi_1\rangle$, определяется в виде:

$$s = \int ds = \gamma \arccos|\langle\psi_1|\psi_0\rangle|. \quad (\text{П.3})$$

Таким образом, выражение (П.3) для длины геодезической линии совпадает с выражением метрики Wootters расстояния между векторами квантовых состояний. Аналогично можно вычислить длину кривой (П.1), соединяющей состояния $|\psi_0\rangle$ и $|\psi_1\rangle$, для определенной фазы ϕ . Тогда геодезическая линия определяется как кривая минимальной длины на семействе кривых.

Минимальная длина достигается при установленном выше условии $e^{i\phi} = \frac{\langle\psi_1|\psi_0\rangle}{|\langle\psi_1|\psi_0\rangle|}$ и эквивалентно метрике расстояния Wootters.

Рассмотрим теперь другой геометрический фактор – кривизна пространства и его квантовый аналог в пространстве векторов квантовых состояний.

Кривизна Вектор состояния квантовой эволюции от одного параметра, такого как время t , определим в виде однопараметрического множества векторов состояний $|\psi(t)\rangle = \exp\{-iHt\}|\psi_0\rangle$, генерируемое гамильтонианом системы. Отклонение вектора состояний $|\psi(t)\rangle$ от геодезической линии, связывающей состояния $|\psi_0\rangle$ и $|\psi_1\rangle$, определяется через кривизну пространства. Для введения понятия кривизны рассмотрим случай эволюции из двух состояний $|\psi_0\rangle$ в $|\psi_1\rangle$. На первом этапе предположим, что осуществляется эволюция в течении отрезка времени Δt из начального состояния $|\psi_0\rangle$ в промежуточное состояние $|\psi'\rangle$ в виде $|\psi'\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H\Delta t}|\psi_0\rangle$ и далее в течении отрезка времени $\Delta t'$ из состояния $|\psi'\rangle$ в состояние $|\psi_1\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H\Delta t'}|\psi'\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(\Delta t+\Delta t')}|\psi_0\rangle$, где H – не зависящий от времени гамильтониан. Без потери общности в дальнейшем принимается $\Delta t = \Delta t'$. Отклонение квантовой эволюции от геодезической линии, связывающей состояния $|\psi_0\rangle$ и $|\psi_1\rangle$, может быть охарактеризовано максимальным значением величины $|\langle\psi'|\psi(\xi)\rangle|^2$ параметризованной ξ . При $\max|\langle\psi'|\psi(\xi)\rangle|^2 = 1$ состояние $|\psi'\rangle$ принадлежит геодезической. Отклонение $|\psi'\rangle$ от геодезической увеличивается с уменьшением величины $\max|\langle\psi'|\psi(\xi)\rangle|^2$, соответственно. Обычно вводится следующее выражение:

$$1 - \max|\langle\psi'|\psi(\xi)\rangle|^2 = \min(1 - |\langle\psi'|\psi(\xi)\rangle|^2),$$

которое эквивалентно нулю, когда отклонение равно нулю, и положительно возрастает, когда отклонение увеличивается. Нетрудно заметить, что данное выражение эквивалентно метрике расстояния Fubini-Study.

Благодарности

Автор считает своей приятной обязанностью поблагодарить соавторов Б.Н. Петрова, О.М. Белоцерковского, В.С. Пугачева, Г.М. Уланова, И.И. Гольденבלата, Р.А. Алиева, Р.Л. Добрушина, М.С. Пинскера, В.Н. Добрынина, К. Yamafuji, T. Fukuda, R. Yamashita, G.G. Degli Antoni, T. Hagiwara, I. Kurawaki, K. Takahashi и постоянных оппонентов L. Zadeh, M. Jamshidi, P. Shor, I. Hirota, Ю.И. Самойленко, В.Ф. Кротова, А.А. Красовского, А.Н. Мелихова, А.С. Холево, В.П. Белавкина, Л.Б. Левитина, А.П. Рыжова, А.Н. Райкова и А.В. Язенина за плодотворную критику, конструктивные советы и поддержку работы.

Список литература

1. Poot M., van der Zant H.S.J. Mechanical systems in the quantum regime // arXiv: 1106.2060 v2 [cond-mat. mes-hall]. – 2011.
2. Blencowe M. Quantum electromechanical systems // Physics Reports. – 2004. – Vol. 395. – № 2. – Pp. 159-222.
3. Shapiro M., Brumer P. Quantum control of bound and continuum state dynamics // Physics Reports. – 2006. – Vol. 425. – № 2. – Pp. 195-264.
4. Borzi A., Stadler G., Hohenester U. Optimal quantum control in nanostructures: Theory and application to a generic three-level system // Physical Review. – 2002. – Vol. A66. – № 5.
5. Ertler C., Matos-Abiague A., Gmitra M., Turek M., Fabian J. Perspectives in spintronics: magnetic resonant tunneling, spin-orbit coupling, and GaMnAs // arXiv:0811.0500v1 [cond-mat. mtrl-sci]. – 2008.

6. Fabian J., Matos-Abiaguea A., Ertlera Ch., Stano P., Zutici I. Semiconductor spintronics. – N.Y.: Springer Verlag, 2010.
7. Correa A.A., Reboredo F.A., Balseiro C.A. Quantum corral wave-function engineering // Physical Review. – 2005. – Vol. B71. – № 3.
8. Hohenester U. Quantum control of polaron states in semiconductor quantum dots // J. of Physics. – 2007. – Vol. B40. – № 11.
9. Stepanyuk V.S., Negulyaev N.N., Niebergall L. et all. Effect of quantum confinement of surface electrons on adatom–adatom interactions // New Journal of Physics. – 2007. – Vol. 9. – Pp. 1-15.
10. Eigler D. M., Lutz C. P., Crommie M. F. Information transport and computation in nanometre-scale structures // Phil. Trans. R. Soc. Lond. – 2004. – Vol. A362. – № 1819. – Pp. 1135-1147.
11. Snijders P. C., Moon E. J., González C., et all. Controlled self-organization of atom vacancies in monatomic gallium layers // Physical Review Letters. – 2007. – Vol. 99. – № 11. – P. 116102.
12. Yannouleas C., Landman U. Symmetry breaking and quantum correlations in finite systems: Studies of quantum dots and ultracold Bose gases and related nuclear and chemical methods // Reports on Progress in Physics. – 2007. – Vol. 70. – № 12. – Pp. 2067-2148.
13. Frolov F.P., Shoom A.A. Spinoptics in a stationary spacetime // arXiv:1105.5629v2 [gr-qc]. – 2011.
14. Zipper E., Kurpas M., Maska M.M. Wave function engineering in quantum dot–ring nanostructures // arXiv:1203.1025v1 [cond-mat.mes-hall]. – 2012.
15. Wiesendanger R. Spin mapping at the nanoscale and atomic scale // Reviews of Modern Physics. – Vol. 81. – № 4. – 2009. – Pp. 1495-1550.
16. Wallquist M., Hammerer K., Rabl P., Lukin M., Zoller P. Hybrid quantum devices and quantum engineering // arXiv:0911.3835v1 [quant-ph]. – 2009.
17. Нанотехнология: физика, процессы, диагностика, приборы / Под ред. Лучинина В.В., Таирова Ю.М. – М.: Физматлит, 2006.
18. Драгунов В.П., Неизвестный И.Г., Гридчин В.А. Основы наноэлектроники. – М.: Логос, 2006.
19. Мартинес-Дуарт Дж.М. и др. Нанотехнологии для микро-и оптоэлектроники. – М.: Техносфера, 2009.
20. Квантовые компьютеры, микро – и наноэлектроника // Труды ФТИАН. – М.: Наука, 2009. – Т. 20.
21. Robinett R.W. Quantum mechanics: classical results, modern systems, and visualized examples. – Oxford University Press, 2006.
22. O’Connell A. D., Hofheinz M., Ansmann M., Bialczak R. C., Lenander M., Lucero E., Neeley M., et al., Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator // Nature. – 2010. – Vol. 464. – P. 697.
23. Teufel J. D., Donner T., Li D., Harlow J.W., Allman M. S., Cicak K., Sirois A. J., Whittaker J. D., Lehner K.W., Simmonds R.W., Sideband cooling of micromechanical motion to the quantum ground state // Nature. – 2011. – Vol. 475. – P. 359.
24. Холево А.С. Некоторые статистические задачи для квантовых полей // Теория Вероятностей и ее Применения. – 1972. – Т. 17. – Вып. 2. – С. 360-365.
25. Carlini A., Hosoya A., Koike T. et all. Time-optimal quantum evolution // Phys. Rev. Lett. – 2006. – Vol. 96. – № 6. – P. 060503.
26. Carlini A., Hosoya A., Koike T. et all. Time-optimal unitary operations // Phys. Review. – 2007. – Vol. A75. – № 4. – P. 042308.
27. Bender C.M., Brody D.C., Jones H.F. et all. Faster than Hermitian quantum mechanics // Phys. Rev. Lett. – 2007. – Vol. 98. – № 4. – P. 040403.
28. Bender C.M., Brody D.C. Optimal time evolution for Hermitian and non-Hermitian Hamiltonians // arXiv: 0808.1823v1 [quant-ph]. – 2008.
29. Bender C.M. Making sense of non-Hermitian Hamiltonians // Rep. Prog. Phys. – 2007. – Vol. 70. – Pp. 947-1018.

30. Borrás A., Majtes A.P., Casas M. A quantum brachistochrone approach to the efficient generation of random multipartite entangled states // arXiv: 0805.2070v1 [quant-ph]. – 2008.
31. Arrighi P., Patricot Ch. A note on the correspondence between qubit quantum operations and special relativity // J. Phys. – 2003. – Vol. A36. – Pp. L287-L296.
32. Gunther U., Samsonov B.F. \mathcal{PT} - symmetric brachistochrone problem, Lorentz boosts, and nonunitary operator equivalence classes // Phys. Review. – 2008. – Vol. A78. – № 4. – P. 042115.
33. Nesterov A.I. Non-Hermitian quantum systems and time-optimal quantum evolution in vicinity of exceptional point // arXiv: 0707.2736v1 [quant-ph]. – 2007.
34. Ingarden R.S. Quantum information theory // Reports on Math. Physics. – 1976. – Vol. 10. – № 1. – Pp. 43-72.